आत्म-निवेदन

राजस्थान विश्वविद्यालय की सन् 1974 की परीक्षा हेतु निर्धारित पाठ्यक्रम, प्रथम वर्ष के पूर्व पाठ्यक्रमों से काफी भिन्न है। इसमें पाठ्य-सामग्री की नवीनता के साथ-साथ प्रस्तुत विषय (भौतिकी) का एक नये, सही ढंग से संगठन (organization) भी किया गया है। इसी कारण हम लोगों को भी एक नई पुस्तक लिखने की प्रेरणा मिली। प्रस्तुत पुस्तक तैयार करते समय हमारा यही प्रयास रहा है कि प्रथम वर्ष के विद्यार्थियों के स्तर के अनुरूप रहते हुए, विषय का सही-सही निरूपण हो और पाठ्यक्रम की दृष्टि से आवश्यक सभी बातों का समावेश हो जावे। भाषा तथा प्रस्तुतीकरण को यथासम्भव सरल बनाने का प्रयास करते हुए यह भी ध्यान रखा गया है कि सरलीकरण के कारण गलत धारणायें पैदा होने की गुंजायश न हो जाय। इस कार्य में उपयुक्त चित्रों और आंकिक उदाहरणों से अच्छी सहायता मिलती है, अतः दोनो पर्याप्त संख्या मे दिये गये हैं। इस प्रकार विद्यार्थियों तथा प्राध्यापक बन्धुओं के लिये समान रूप से उपयोगी पाठ्य-पुस्तक तैयार करने के अपने *उद्देश्य में हम कहाँ तक सफल हुए हैं, इसका निर्णय तो हमारे प्राध्यापक बन्धु ही* कर सकेंगे। तथापि हमने अपनी ओर से इस हेतु पूरा प्रयास किया है। फिर भी अज्ञानवश या भूल से कहीं त्रुटि हो जाने की सम्भावना भी रहती ही है, उसके लिये विद्यार्थियो तथा प्राध्यापक बन्धुओं से यही निवेदन है कि अवश्य ही हमे सूचित करे।

विषय की पूर्णता की दृष्टि से कही कुछ अतिरिक्त पैराग्राफ भी दिये हैं जिन्हें तारांकित (*) कर दिया गया है। सम्पूर्ण पुस्तक मे M. K. S. पद्धति प्रयुक्त की गई है, साथ ही प्रमुख सूत्र और समीकरणो के C. G. S. रूप भी दिये गये हैं। वेक्टर-अंकन-पद्धति की परम्परानुसार वेक्टर राशि को मोटे अक्षरों (bold type) द्वारा प्रदर्शित किया गया है।*

पुस्तक तैयार करने में राजकीय महाविद्यालय, कोटा के भौतिकी विभाग के सभी साथियों के सुझाव एवं समालोचनाएँ मिलती रही हैं, जिनके लिए हम उनके आभारी हैं। विशेषत. श्री यशवन्तनारायण माथुर तथा वनस्थली कालेज के श्री सृष्टिगोपाल सक्सेना के हम आभारी हैं जिन्होंने कुछ अध्यायों को पढ़कर अपने उपयोगी सुझाव दिये।

पुस्तक को समय पर मुद्रित कराने में श्री अश्विनिकुमार दीक्षित, श्री चौथमल जैन, (अशोक बुक डिपो, कोटा) और श्री प्रेमनारायण माहेश्वरी, आगरा का पूर्ण सहयोग मिला जिसके लिए हम उनके विशेष रूप से आभारी हैं।

राजकीय महाविद्यालय, कोटा

15 अगस्त, 1973 लेखकगण

* प्रेस की भूल के कारण कुछ अध्यायों मे वेक्टर राशि ऊपर तीर लगाकर ($\vec{A}$) प्रदर्शित कर दी गई है। इसके लिए लेखकों को खेद है। भविष्य मे यह त्रुटि ठीक करदी जावेगी।

आत्म-निवेदन

राजस्थान विश्वविद्यालय की सन् 1974 की परीक्षा हेतु निर्धारित पाठ्यक्रम, प्रथम वर्ष के पूर्व पाठ्यक्रमों से काफी भिन्न है। इसमें पाठ्य-सामग्री की नवीनता के साथ-साथ प्रस्तुत विषय (भौतिकी) का एक नये, सही ढंग से संगठन (organization) भी किया गया है। इसी कारण हम लोगों को भी एक नई पुस्तक लिखने की प्रेरणा मिली। प्रस्तुत पुस्तक तैयार करते समय हमारा यही प्रयास रहा है कि प्रथम वर्ष के विद्यार्थियों के स्तर के अनुरूप रहते हुए, विषय का सही-सही निरूपण हो और पाठ्यक्रम की दृष्टि से आवश्यक सभी बातों का समावेश हो जावे। भाषा तथा प्रस्तुतीकरण को यथासम्भव सरल बनाने का प्रयास करते हुए यह भी ध्यान रखा गया है कि सरलीकरण के कारण गलत धारणायें पैदा होने की गुंजायश न हो जाय। इस कार्य में उपयुक्त चित्रों और आंकिक उदाहरणों से अच्छी सहायता मिलती है, अतः दोनों पर्याप्त संख्या मे दिये गये हैं। इस प्रकार विद्यार्थियों तथा प्राध्यापक बन्धुओं के लिये समान रूप से उपयोगी पाठ्य-पुस्तक तैयार करने के अपने उद्देश्य में हम कहाँ तक सफल हुए हैं, इसका निर्णय तो हमारे प्राध्यापक बन्धु ही कर सकेंगे। तथापि हमने अपनी ओर से इस हेतु पूरा प्रयास किया है। फिर भी अज्ञानवश या भूल से कहीं त्रुटि हो जाने की सम्भावना भी रहती ही है, उसके लिये विद्यार्थियो तथा प्राध्यापक बन्धुओं से यही निवेदन है कि अवश्य ही हमें सूचित करें।

विषय की पूर्णता की दृष्टि से कहीं कुछ अतिरिक्त पैराग्राफ भी दिये हैं जिन्हें तारांकित (*) कर दिया गया है। सम्पूर्ण पुस्तक में M. K. S. पद्धति प्रयुक्त की गई है, साथ ही प्रमुख सूत्र और समीकरणों के C. G. S. रूप भी दिये गये हैं। वेक्टर-अंकन-पद्धति की परम्परानुसार वेक्टर राशि को मोटे अक्षरों (bold type) द्वारा प्रदर्शित किया गया है।*

पुस्तक तैयार करने में राजकीय महाविद्यालय, कोटा के भौतिकी विभाग के सभी साथियों के सुझाव एवं समालोचनाएँ मिलती रही हैं, जिनके लिए हम उनके आभारी हैं। विशेषतः श्री यशवन्तनारायण माथुर तथा वनस्थली कालेज के श्री सृष्टिगोपाल सक्सेना के हम आभारी हैं जिन्होंने कुछ अध्यायों को पढ़कर अपने उपयोगी सुझाव दिये।

पुस्तक को समय पर मुद्रित कराने में श्री अश्विनिकुमार दीक्षित, श्री चौथमल जैन, (अशोक बुक डिपो, कोटा) और श्री प्रेमनारायण माहेश्वरी, आगरा का पूर्ण सहयोग मिला जिसके लिए हम उनके विशेष रूप से आभारी हैं।

राजकीय महाविद्यालय, कोटा

15 अगस्त, 1973 लेखकगण

* प्रेस की भूल के कारण कुछ अध्यायो मे वेक्टर राशि ऊपर तीर लगाकर ($\vec{A}$) प्रदर्शित कर दी गई है। इसके लिए लेखकों को खेद है। भविष्य मे यह त्रुटि ठीक करदी जावेगी।

Syllabus of the T. D. C. Ist Year Examination, 1974
University of Rajasthan, Jaipur

Paper I

Five questions are to be set from each section, of which three are to be attempted from each section.

Section A. (Mechanics and Thermodynamics)

Mechanics :

1. **Vectors**– Product of two vectors (scalar and vector with examples), Vector derivatives, Gradient.

2. **Dynamics of Rigid bodies**—Rotation of rigid body, Torque, Angular acceleration, Angular momentum, Moment of inertia (Ring, about its own axis) ; Theorem of parallel and perpendicular axes, kinetic energy of rotation; Compound pendulum as a rigid oscillating body (expression for time period only is to be derived)

3. **Conservation Laws**—Conservative and non-conservative forces with examples (without using line integral) ; Conservation of energy, momentum and angular momentum.

4. **Harmonic Oscillator**—Potential energy diagram of a simple harmonic oscillator, Potential well. One dimensional motion of a particle in given potential field, $U = \frac{1}{2} kx^2$.

Thermodynamics :

5. **Zeroth Law of Thermodynamics**– Concept of temperature and scale of temperature.

6. **First Law of Thermodynamics**—Dependence of work and heat on path; Isometric, isobaric and isothermal processes; Equation of state (without proof) for adiabatic processes and its applications.

7. **Kinetic Theory of Gases**—Postulates of kinetic theory ; Derivation of pressure, Interpretation of temperature ; Equation of state of a perfect gas ; Non ideal gas and Van der Waal's equation of state (Derivation only to be given).

8. **Radiation**—Black body ; Kirchoff's law ; Prevost's theory of Exchanges ; Stefan's law, Newton's law ; Black body spectrum, statement of Wien's displacement law and determination of temperature of a radiant body.

Section B. (Optics and Sound)

1. **Nature of Light**—Light as wave motion ; Plane and spherical waves : Huygen's principle and its application to the derivation of laws of reflection and refraction at plane surfaces;

Electromagnetic nature of light waves (non-mathematical), quantum nature of light.

2. Superposition of Waves—

(a) Sound Waves—Beats ; Interference and stationary waves; Lissajous figures (Graphical as well as analytical treatment)

(b) Light Waves—Interference, Coherent sources, Division of wave front and division of amplitude ; Fresnel's biprism and Michelson interferometer as examples (only principles and apparatus to be discussed).

3. Diffraction—Comparative study of diffraction of sound and light, Fresnel's half period zones ; Explanation of apparent rectilinear propagation of light and presence of brightness at the centre of shadow of circular obstacle

4. Polarisation—Idea of polarisation with the help of light vector (electric vector). production of plane polarised light by reflection, refraction and double refraction, Nicol prism, Polaroids.

5 Propagation of Waves—

(a) Modes of vibrations in strings and air columns.

(b) Determination of velocity of light by Michelson's method.

6. Doppler's principle and its application to sound and light waves.

Paper II

Five questions to be set from each section of which three to be attempted from each section.

Section A. (Electricity and Magnetism)

1. Magnetic properties of matter—Permeability, susceptibility and intensity of magnetisation and relation between them. Physical concepts of hystersis and B-H curve; Definitions of dia, para and ferromagnetism ; Curie temperature.

2. Electrostatics—Fundamental forces of nature (Gravitation, [illegible] d quantisation of charge, [illegible] superposition principle; [illegible] .nd its applications to the field of uniformly charged sphere, infinite line charge and infinite *sheet of charge.*

3. Potential difference and potential function, derivation of field from potential; potential at a point due to electric dipole and moment; Force on a surface charge; Energy associated with an electric field.

Current Electricity.

4. Ampere's law—its application for the determination of field along the axis of a circular coil.

Syllabus of the T. D. C. Ist Year Examination, 1974
University of Rajasthan, Jaipur

Paper I

Five questions are to be set from each section, of which three are to be attempted from each section.

Section A. (Mechanics and Thermodynamics)

Mechanics :

1. **Vectors**– Product of two vectors (scalar and vector with examples), Vector derivatives, Gradient.

2. **Dynamics of Rigid bodies**—Rotation of rigid body, Torque, Angular acceleration, Angular momentum, Moment of inertia (Ring, about its own axis) ; Theorem of parallel and perpendicular axes, kinetic energy of rotation; Compound pendulum as a rigid oscillating body (expression for time period only is to be derived)

3. **Conservation Laws**—Conservative and non-conservative forces with examples (without using line integral) ; Conservation of energy, momentum and angular momentum.

4. **Harmonic Oscillator**—Potential energy diagram of a simple harmonic oscillator, Potential well. One dimensional motion of a particle in given potential field, $U=\frac{1}{2}kx^2$.

Thermodynamics :

5. **Zeroth Law of Thermodynamics**—Concept of temperature and scale of temperature.

6. **First Law of Thermodynamics**—Dependence of work and heat on path; Isometric, isobaric and isothermal processes; Equation of state (without proof) for adiabatic processes and its applications.

7. **Kinetic Theory of Gases**—Postulates of kinetic theory ; Derivation of pressure, Interpretation of temperature ; Equation of state of a perfect gas ; Non ideal gas and Van der Waal's equation of state (Derivation only to be given).

8. **Radiation**—Black body ; Kirchoff's law ; Prevost's theory of Exchanges ; Stefan's law, Newton's law ; Black body spectrum, statement of Wien's displacement law and determination of temperature of a radiant body.

Section B. (Optics and Sound)

1. **Nature of Light**—Light as wave motion ; Plane and spherical waves : Huygen's principle and its application to the derivation of laws of reflection and refraction at plane surfaces;

Electromagnetic nature of light waves (non-mathematical), quantum nature of light.

2. Superposition of Waves—

(a) Sound Waves—Beats; Interference and stationary waves; Lissajous figures (Graphical as well as analytical treatment)

(b) Light Waves—Interference, Coherent sources, Division of wave front and division of amplitude; Fresnel's biprism and Michelson interferometer as examples (only principles and apparatus to be discussed).

3. Diffraction—Comparative study of diffraction of sound and light, Fresnel's half period zones; Explanation of apparent rectilinear propagation of light and presence of brightness at the centre of shadow of circular obstacle.

4. Polarisation—Idea of polarisation with the help of light vector (electric vector), production of plane polarised light by reflection, refraction and double refraction, Nicol prism, Polaroids.

5 Propagation of Waves—

(a) Modes of vibrations in strings and air columns.

(b) Determination of velocity of light by Michelson's method.

6. Doppler's principle and its application to sound and light waves.

Paper II

Five questions to be set from each section of which three to be attempted from each section.

Section A. (Electricity and Magnetism)

1. Magnetic properties of matter—Permeability, susceptibility and intensity of magnetisation and relation between them. Physical concepts of hystersis and B-H curve; Definitions of dia, para and ferromagnetism ; Curie temperature.

2. Electrostatics—Fundamental forces of nature (Gravitation, [illegible] d quantisation of charge, [illegible] superposition principle; [illegible] nd its applications to the field of uniformly charged sphere, infinite line charge and infinite sheet of charge.

3. Potential difference and potential function, derivation of field from potential; potential at a point due to electric dipole and moment; Force on a surface charge; Energy associated with an electric field.

Current Electricity.

4. Ampere's law—its application for the determination of field along the axis of a circular coil.

5. **Potentiometer**—Principle of a potentiometer and its applications : measurement of potential difference, internal resistance of a cell, calibration of voltmeter and ammeter.

6. **Thermo electricity**—Seebeck, Peltier and Thomson effects; Thermocouple and thermopile, measurement of thermo e.m.f.

7. **Alternating Currents**—Definitions of effective values (R.M.S. and peak), Phase relationship between voltage and current for pure resistance, inductance and capacitance (No derivation). Definition of impedance, reactance, admittance and susceptance. Expressions for the instantaneous and average power in A.C. circuits (No derivation), Power factor; Wattless current and Choke coil.

Section B. (Atomic, Nuclear and Electron Physics)

8. **Positive Ray Analysis**—Positive rays ; Thomson and Bainbridge mass spectrometer; Isotopes.

9. **Atomic structure**—Bohr's theory of hydrogen spectrum and its shortcomings; Quantum numbers (total, orbital and magnetic) Electron spin; Exclusion principle; Electron Configuration in atoms.

10. **Matter Waves**—De Broglie's hypothesis; Experimental verification of matter waves; Explanation of Bohr's Orbits on the basis of matter waves.

11. **Radioactivity**—Characteristics of α, β and γ decay processes, Neutrino hypothesis, the law of disintegiation; Half and mean lives. Successive transformations and radioactive equilibrium; Radioactive isotopes and their uses.

12. **Electronics**—Thermionic emission, Work function, characteristics and tube parameters of Diodes, Triodes Tetrodes and Pentodes; Explanation of negative resistance; Principle of triode as an amplifier; Idea of feed back and principle of an oscillator; Necessity of modulation, type of modulation and principle of a modulator; Detection and principle of diode detector; Block diagram of radio transmitter and receiver; Mode of propagation of radiowaves from transmitter to receiver.

विषय-सूची

भाग 1

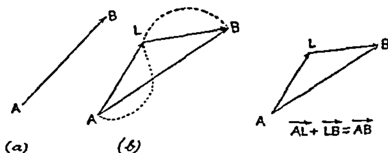
भाग 2

1

वेक्टर
(Vectors)

1·1. विस्थापन (Displacement) तथा वेक्टर की परिभाषा

किसी कण का विस्थापन, उसकी स्थिति में परिवर्तन को कहते हैं। उदाहरणार्थ किसी कण का बिन्दु A से बिन्दु B तक विस्थापन AB द्वारा दिशा



चित्र—1·1

एवं परिमाण में प्रदर्शित किया जाता है [चित्र 1·1 (a)]। यह आवश्यक नहीं कि अमुक कण एक सीधी रेखा में ही गति करे। सम्भव है कि वह वक्र ALB के अनुरूप गति कर रहा हो। इस अवस्था में गति करने पर भी कण की प्रारम्भिक एवं अन्तिम स्थिति इस प्रकार है कि कुल मिलाकर उसका विस्थापन AB तीर द्वारा दिशा एवं परिमाण में प्रदर्शित किया जा सकता है। यदि कण की, वक्र के अनुदिश गति करते समय, कोई माध्य स्थिति L से प्रदर्शित की जाये, तो कण का

A से B तक विस्थापन=कण का A से L तक विस्थापन
+कण का L से B तक का विस्थापन

अर्थात् विस्थापन को यदि दिशा एवं परिमाण में एक तीर द्वारा प्रदर्शित किया जाये तो यह निम्न नियम प्रतिपादित करेगा :—

$$\vec{AL}+\vec{LB}=\vec{AB} \qquad \ldots(1\cdot1)$$

इस नियम को समान्तर चतुर्भुज का नियम कहते हैं। बहुत-सी भौतिक राशियाँ जिनमें दिशा एवं परिमाण दोनों ही होता है तथा विस्थापन की तरह से व्यवहार करती हैं अर्थात् निम्न दो नियमों का पालन करती हैं, वेक्टर कहलाती हैं। जिन दो नियमो का पालन करते हैं, वे निम्न हैं :—

(1) दो सजातीय वेक्टरों का योग समान्तर चतुर्भुज के नियम के अनुसार होता है।

(2) वेक्टर की दिशा एवं परिमाण, निर्देशतन्त्र पर निर्भर नहीं करते अर्थात् वेक्टर की दिशा हम ऐसी किसी वस्तु के सापेक्ष दे सकते हैं जोकि अपेक्षाकृत स्थिर हो, जैसे दूरस्थ तारा (fixed star)!

बहुत-सी भौतिक राशियाँ—जैसे वेग, बल, संवेग, बल आघूर्ण, चुम्बकीय एवं विद्युत क्षेत्र की तीव्रता आदि वेक्टर राशियाँ हैं।

वेक्टर प्रदर्शन—(a) किसी वेक्टर राशि A का नोट बुक में प्रदर्शन संकेत A के ऊपर → (तीर का चिह्न) लगाकर किया जाता है, जैसे $\vec{A}$

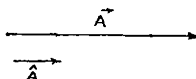
(b) पुस्तकों में वेक्टर राशि A को मोटे अक्षर **A** से प्रदर्शित किया जाता है।

1·2. स्केलर या अदिश राशियाँ

उन सभी भौतिक राशियों को जिनमें केवल परिमाण ही होता है, दिशा नहीं, स्केलर या अदिश राशियाँ कहते हैं। स्केलर राशि से हमारा अभिप्राय केवल एक संख्या से है जिससे उस भौतिक राशि के परिमाण का बोध होता है जैसे किसी वस्तु की संहति और घनत्व तथा तापक्रम, विभव आदि स्केलर राशियाँ कहलायेंगी।

1·3. इकाई वेक्टर

वेक्टर **A** की दिशा मे इकाई वेक्टर $\hat{\mathbf{A}}$ से हमारा अभिप्राय ऐसे वेक्टर मे है जिसकी दिशा **A** की दिशा के समानान्तर है तथा जिसका परिमाण इकाई है (चित्र 1·2)



चित्र—1·2

स्पष्ट है

वेक्टर $\mathbf{A}=\mathbf{A}$ का परिमाण $\times$ **A** की दिशा में इकाई वेक्टर

$$=|\mathbf{A}|\,\hat{\mathbf{A}}$$

साधारणतया **A** के परिमाण को सादा अक्षर A से प्रदर्शित करते हैं।

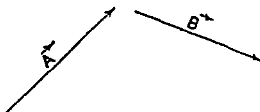
अत. $\mathbf{A}=A\hat{\mathbf{A}}$ ···(1·2)

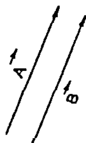
1·4. समान वेक्टर

दो वेक्टर **A** तथा **B** समान हैं यदि

(i) **A** का परिमाण $=$ **B** का परिमाण
अर्थात् $A=B$

तथा (ii) **A** तथा **B** एक दूसरे के समान्तर भी हो। (चित्र 1·3)





चित्र—1·3

चित्र 1·3 (a) में **A** तथा **B** यद्यपि परिमाण मे समान हैं अर्थात् **A** तथा **B** की लम्बाई बराबर है, परन्तु दिशा मे समान्तर नही, अतः

$$\mathbf{A}\neq\mathbf{B}$$

चित्र 1·3 (b) में **A** तथा **B** परिमाण तथा दिशा दोनो मे ही बराबर हैं अर्थात् परिमाण मे बराबर होने के साथ-साथ एक दूसरे के समानान्तर भी हैं, अतः

1·5. वेक्टर योग

(a) **सजातीय दो वेक्टरों का योग** :—दो सजातीय वेक्टरों (Vectors of same kind) का ही योग किया जा सकता है।

A तथा **B** दो वेक्टर हैं। वेक्टरों का योग एक विशेष प्रकार की संक्रिया (Operation) है जोकि निम्न प्रकार से वर्णित है :—

(i) **B** को स्वयं के समानान्तर इस प्रकार **A** तक लाया जाय कि **B** का अन्तिम विन्दु (Tail) **A** के शीर्ष को स्पर्श करे।

(ii) **A** के अन्तिम विन्दु तथा **B** के शीर्ष को मिलाने वाली रेखा परिमाण तथा दिशा में **A**+**B** को प्रदर्शित करेगी। यही वेक्टर योग का समानान्तर चतुर्भुज का नियम है [चित्र 1·4]

चित्र—1·4

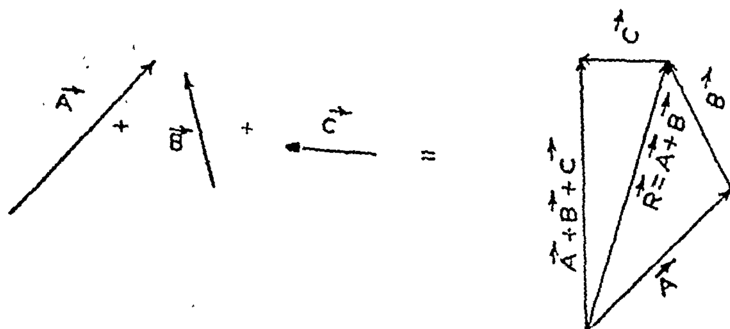
स्पष्ट है

$$\mathbf{B}+\mathbf{A}=\mathbf{A}+\mathbf{B} \qquad \cdots(1\cdot3)$$

समीकरण (1·3) वेक्टर योग का क्रम विनिमेय नियम (Law of Commutation of Addition) कहलाता है।

(b) **दो से अधिक वेक्टरों का जोड़** :—**A**, **B**, **C** तीन वेक्टर हैं, **A**+**B**+**C** का मान उपर्युक्त नियम को लगाकर निकाला जा सकता है।

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$$
$$=\mathbf{R}+\mathbf{C}$$



चित्र—1·5

प्रश्न—वेक्टर योग की परिभाषा से सिद्ध कीजिये कि

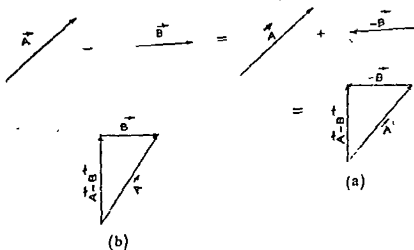
$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

अर्थात् वेक्टर योग साहचर्य नियम (Associative law of Addition) को प्रतिपादित करते हैं।

1·6. एक वेक्टर में से दूसरा वेक्टर घटाना (Subtraction of Vectors)

वेक्टर A मे से वेक्टर B का घटाना अर्थात् A—B से हमारा अभिप्राय A तथा —B के वेक्टर योग से है

अर्थात् $A-B=A+(-B)$ जैसा कि चित्र 1·6 (a) से स्पष्ट है।



चित्र—1·6

चित्र 1·6 (b) से स्पष्ट है

$$(A-B)+B=A$$

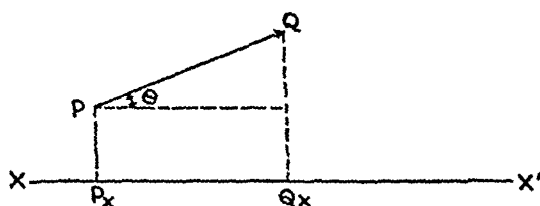
शून्य वेक्टर (Null Vector) :—यदि $A=B$ तो $A-B=$ शून्य वेक्टर। इसे O से प्रदर्शित किया जा सकता है। इसका परिमाण शून्य होता है एवं कोई निश्चित दिशा नहीं होती।

1·7. वेक्टर के घटक (Componeats of a Vector)

यद्यपि वेक्टर सकेतो को प्रयोग में लाने पर किसी भी निर्देशाक पद्धति (Co-ordinate system) की आवश्यकता नही होती, फिर भी बहुधा हमे वेक्टर

को किसी भी निर्देशांक पद्धति के अक्षों के अनुदिश वियोजित (resolve) करना पड़ता है ।

(a) **वेक्टर के द्विविम स्थान में घटक (Components of a vector in two dimensional space)** :—माना कि PQ वेक्टर कागज के धरातल अर्थात् द्विविम स्थान (two dimensional epace) में है। यदि हम एक सीधी रेखा xx' की कल्पना करें तो PQ का घटक xx' दिशा के अनुदिश PQ के प्रक्षेप (Projection) P_xQ_x से दिया जाता है, जहां पर Px, Qx रेखा xx' पर P, Q से खींचे गये अभिलम्ब के पाद हैं ।

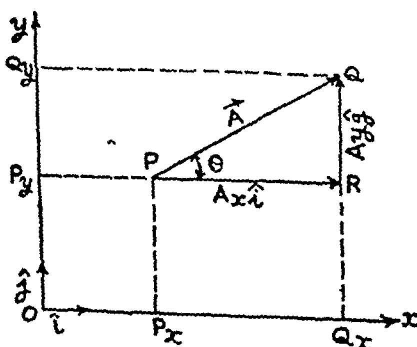


चित्र—1·7

ठीक इसी प्रकार कागज के धरातल में यदि हम दो अभिलम्बवत रेखाएं Ox, Oy की कल्पना करें तो कागज के धरातल में किसी वेक्टर PQ के घटकों के परिमाण :—

(a) $Px\ Qx$ Ox-अक्ष के अनुदिश

(b) $Py\ Qy$ Oy-अक्ष के अनुदिश



चित्र—1·8

यदि वेक्टर PQ को A से प्रदर्शित किया जाय, तथा $Px\ Qx$ को Ax से $Py\ Qy$ को Ay से तो स्पष्ट ही

$$A = A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} \qquad \ldots(1\cdot4)$$

जहाँ [illegible] के अनुदिश [illegible] है।
चित्र 1·8 से [illegible] —

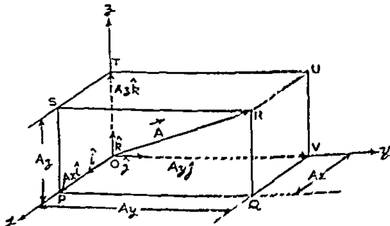
[illegible]

तथा $\tan \theta =$ [illegible]

(b) [illegible] (Components of a vector in three dimensional space) — [illegible] तीन लम्बवत रेखाएँ OX, OY, OZ एक [illegible] कार्तीय निर्देशांक पद्धति (Cartesian Co-ordinate System) [illegible] Ax, Ay, Az वेक्टर A के क्रमशः x—, y— z— अक्षों के अनुदिश घटक हों (चित्र 1·9) तो वेक्टर A को निम्न रूप में लिखा जा सकता है —

$$A = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \qquad \ldots(1 \cdot 5)$$

Ax, Ay, Az वेक्टर A के x—, y—, z— अक्षों के अनुदिश घटक कहलाते हैं।



चित्र—1·9

चित्र 1·9 से स्पष्ट है,

$|OP| = A_x, \; |OV| = A_y$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

चूँकि $|OR|^2 = OQ^2 + QR^2$

$= A_y^2 + A_x^2 + OT^2$

$= A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

अर्थात $|A|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$ ...(1·6)

$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

या $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

A_x; A_y, A_z से केवल परिमाण का वोध होता है, अतः ये स्केलर राशियां हैं।

यदि A तथा B दो वेक्टर है :—

$$\mathbf{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x \hat{i} + By \hat{j} + B_z \hat{k}$$

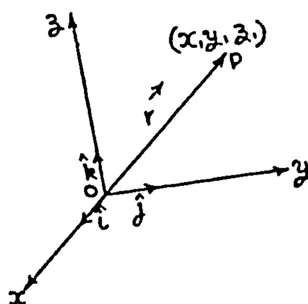
अतः $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k}$

यहाँ पर यह स्पष्ट कर देना चाहिये कि वेक्टर के घटक किसी भी निर्देशांक द्धति के अनुसार निकाले जा सकते हैं, अतः वेक्टर घटकों का मान इस पर निर्भर रता है कि हम कौन-सी निर्देशांक पद्धति के अनुसार वेक्टर घटकों का मान निकालना चाहते हैं। निर्देशांक पद्धति का चयन हमारी सुविधानुसार होता है।

1·8. किसी विन्दु की स्थिति-सदिश (Position Vector)

किसी विन्दु P की स्थिति-सदिश विन्दु O के सापेक्ष विन्दु O तथा P को मिलाने वाली रेखा OP से दी जाती है (चित्र 1·10)। यदि P के निर्देशांक x, y, z हों तो ...(1·7)

$$OP = \mathbf{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$



चित्र—1·10

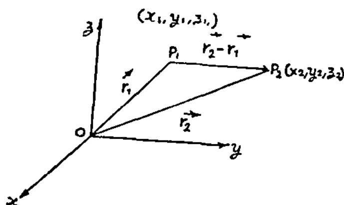
जैसा पहले देख चुके हैं :—

$$OP^2 = |\mathbf{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{r} = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)} \qquad ...(1·8)$$

यदि दो बिन्दु P_1 तथा P_2 की स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{r}_1$ तथा $\mathbf{r}_2$ से प्रदर्शित की जाये तो

$$P_1P_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \text{ (चित्र 11·1)}$$



चित्र—1·11

$$\therefore \quad P_1P_2 = (x_2\,\hat{i} + y_2\,\hat{j} + z_2\,\hat{k}) - (x_1\,\hat{i} + y_1\,\hat{j} + z_1\,\hat{k})$$

$$P_1P_2 = (x_2 - x_1)\,\hat{i} + (y_2 - y_1)\,\hat{j} + (z_2 - z_1)\,\hat{k}$$

$$\therefore \quad |P_1P_2|^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$$

सूत्र $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$ की मदद से

$$\therefore \quad |P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} \qquad ...(1·9)$$

19 वेक्टरों का गुणनफल (Product of Vectors)

यह हम पहले देख चुके हैं कि वेक्टरो का जोड़ तभी सार्थक होता है जब सभी वेक्टर सजातीय हों, अर्थात सभी वेक्टर एक ही भौतिक राशि को प्रदर्शित करे। वेक्टरों के गुणा में हम दो भिन्न-भिन्न वेक्टरो का गुणा करके एक नयी भौतिक राशि प्राप्त कर सकते हैं।

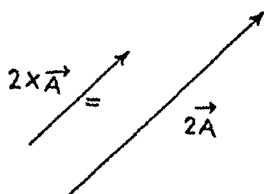
हम निम्न तीन प्रकार के गुणा की कल्पना करते हैं जोकि हमारे लिये महत्वपूर्ण हैं :—

(a) किसी दिये हुये वेक्टर का स्केलर से गुणा ।

(b) दो वेक्टरों का इस प्रकार से गुणा कि एक स्केलर प्राप्त हो।

(c) दो वेक्टरों का इस प्रकार गुणा कि एक वेक्टर प्राप्त हो ।

(a) **वेक्टर का स्केलर से गुणा :—**वेक्टर का स्केलर से गुणा का सीधा अर्थ है, वेक्टर की दिशा अपरिवर्तित रहती है, वेक्टर का परिमाण उसके प्रारम्भिक परिमाण का स्केलर गुणा हो जाता है। (चित्र 1·12)

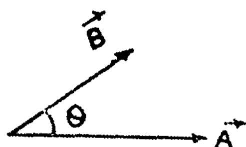


चित्र—1·12

(b) **वेक्टरों का अदिश या स्केलर गुणनफल :—**A तथा B के स्केलर गुणनफल को A. B (पढ़ने में A Dot B) से प्रदर्शित किया जाता है।

परिभाषा :—A तथा B का स्केलर गुणनफल A तथा B के परिमाण के गुणा तथा उनके मध्य निहित कोण के कोज्या (cosine) के गुणा के बराबर होता है। ध्यान रहे A. B एक स्केलर है :—

$$\mathbf{A}.\,\mathbf{B} = |\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}| \cos\theta \qquad \ldots(1\cdot10)$$
$$= AB\cos\theta \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$



चित्र—1·13

नोट :—A तथा B के मध्य निहित उस कोण की कोज्या लेनी है जोकि 180° से कम हो।

वेक्टरों के स्केलर गुणा में निम्न नियम सत्य है

(a) A. B = B. A

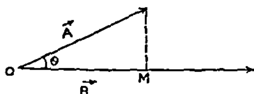
चूँकि
$$\mathbf{A}.\,\mathbf{B} = |\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}| \cos\theta$$
$$= |\mathbf{B}|\ |\mathbf{A}| \cos\theta$$
$$= \mathbf{B}.\,\mathbf{A} \qquad \ldots(1\cdot11)$$

यह नियम गुणा का क्रम विनिमेय नियम (Commutative law of multiplication) कहलाता है अर्थात् A तथा B के क्रम का परिवर्तन करने से स्केलर गुणा अपरिवर्तित रहता है।

किसी वेक्टर का दूसरे वेक्टर के अनुदिश प्रक्षेप (Projection of a vector along another vector)

चित्र मे A तथा B, θ कोण पर झुके हुये दो वेक्टर हैं (चित्र 1·14)।

A का B पर प्रक्षेप $OM = A \cos \theta$ (परिमाण में)



चित्र—1·14

यदि $\hat{A}$ तथा $\hat{B}$ वेक्टर A तथा B की दिशा मे इकाई वेक्टर हैं, तो स्पष्ट ही

$$\hat{A}.\,\hat{B} = 1.1 \cos\theta = \cos\theta$$

अतः A का B पर प्रक्षेप $OM = A \cos\theta = A(\hat{A}.\,\hat{B})$

$$\text{परन्तु } A\hat{A} = A$$

अत. OM का मान केवल परिमाण मे

$$= A.\,\hat{B} \qquad \ldots(1{\cdot}12)$$

ठीक इसी प्रकार B का A पर प्रक्षेप

$$= B.\,\hat{A} \qquad \ldots(1{\cdot}13)$$

(b) सिद्ध करना कि

$$A.\,(B+C) = A.\,B + A.\,C$$

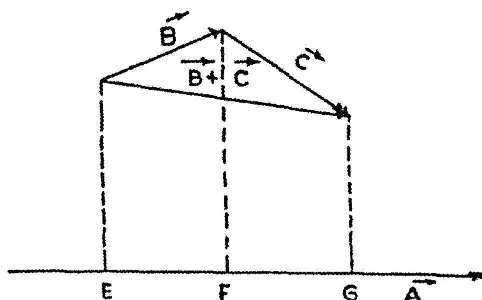
चित्र से स्पष्ट है कि

B+C का A पर प्रक्षेप = B का A पर प्रक्षेप + C का A पर प्रक्षेप

अथवा $(B+C).\,\hat{A} = B.\,\hat{A} + C.\,\hat{A}$

अतः **A** से गुणा करने पर

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C}).\ \mathbf{A}=\mathbf{B}.\ \mathbf{A}+\mathbf{C}.\ \mathbf{A}$$



चित्र—1·15

(c) आसानी से निम्न देखा जा सकता है

$$m\ (\mathbf{A}.\ \mathbf{B})=(m\ \mathbf{A}).\ \mathbf{B})=\mathbf{A}.\ (m\ \mathbf{B})=(\mathbf{A}.\ \mathbf{B})\ m$$

जहाँ पर कि m कोई स्केलर है।

(d) $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ Ox, Oy, Oz अक्ष के अनुदिश इकाई वेक्टर हैं, तो निम्न को सरलतापूर्वक समझा सकता है

$$\hat{i}.\ \hat{i}=\hat{j}.\ \hat{j}=\hat{k}.\ \hat{k}=1 \qquad \ldots(1{\cdot}14)$$

क्योंकि परिमापानुसार

$$\hat{i}.\ \hat{j}=|\hat{i}|\ |\hat{i}|\cos 0$$
$$=1 \text{ इत्यादि}$$

तथा $\hat{i}.\ \hat{j}=\hat{j}.\ \hat{k}=\hat{k}.\ \hat{i}=0$ ...(1·15)

क्योंकि परिमापानुसार

$$\hat{i}.\ \hat{j}=|\hat{i}|\ |\hat{j}|\cos 90$$
$$=0$$

(c) यदि $A=A_x\,\hat{i}+A_y\,\hat{j}+Az\,\hat{k}$

तथा $B=B_x\,\hat{i}+B_y\,\hat{j}+B_z\,\hat{k}$

तो सिद्ध करो कि

$$A.\ B=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

क्योंकि

$$A.B=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}).(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})$$

$$=A_x\hat{i}.(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})+A_y\hat{j}.(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$$

$$+A_z\hat{k}.(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})$$

$$=A_xB_x\hat{i}.\hat{i}+A_xB_y\hat{i}.\hat{j}+A_xB_z\hat{i}.\hat{k}+A_yB_y\hat{j}.\hat{i}$$

$$+A_yB_y\hat{j}.\hat{j}+A_yB_z\hat{i}.\hat{k}+A_zB_x\hat{k}.\hat{i}$$

$$+A_zB_y\hat{k}.\hat{j}+A_zB_z\hat{k}.\hat{k}$$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

क्योंकि $\hat{i}\ \hat{i}=\hat{j}.\hat{j}=\hat{k}\ \hat{k}=1$

$\hat{i}.\hat{j}\quad \hat{j}.\hat{k}=\hat{k}.\hat{i}=0$

अतः $\boxed{A.B=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}$ ...(1·16)

प्रश्न—यदि A कोई वेक्टर है, तो सिद्ध करो कि

$$A^2=A_x^2+A_y^2+A_z^2$$

हल— $A.A=|A|\ |A|\cos 0=A^2$ ...(i)

तथा $A=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$

अतः $A.A=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z k\hat{j}+A_z\hat{k}).$

$(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})$

$=A_x^2+A_y^2+A_z^2$ ...(ii)

अतः (i) व (ii) से

$$A^2=A_x^2+A_y^2+A_z^2$$

$\therefore$ A का परिमाण$=\sqrt{A^2}=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$

प्रश्न—यदि A तथा B दो लम्बवत् वेक्टर हैं तो सिद्ध कीजिये कि

$$A.B=0$$

प्रश्नानुसार $A.B=|A|\ |B|\cos\theta$

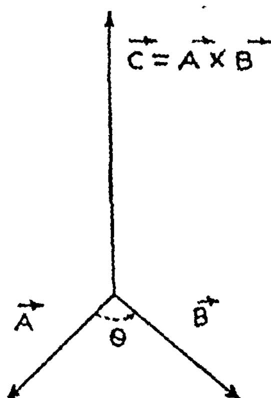
परन्तु $\theta=90$

अत: $A.B = |A|\ |B| \cos 90 = 0$

अत: $A.B = 0$

1·10. वेक्टर या सदिश गुणनफल (Vector Product)

A तथा B का वेक्टर गुणनफल $A \times B$ (पढ़ने में 'A cross B) एक नया वेक्टर C है जिसका परिमाण A के परिमाण, B के परिमाण तथा इन दोनों वेक्टरों के मध्य कोण θ की ज्या (sine) के गुणनफल के बराबर होता है तथा जिसकी दिशा A तथा B के तल के लम्बवत इस प्रकार होती है कि A, B तथा C दक्षिणवर्ती नियम का प्रतिपादन करे (चित्र 1·16)।



चित्र—1·16

$$A \times B = C = |A|\ |B| \sin \theta\ \hat{n} \qquad ...(1·17)$$

जबकि $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

जहाँ पर $\hat{n}$ = A व B के तल के लम्बवत इकाई वेक्टर है, इसकी दिशा दक्षिणवर्ती पेच नियम द्वारा बतायी जाती है।

C की दिशा जानने का दक्षिणवर्ती पेच नियम :—यदि हम एक दक्षिणवर्ती पेच को, जिसकी अक्ष A तथा B के तल के लम्बवत है, वेक्टर A से B की ओर θ कोण की दिशा में घूमता हुआ कल्पना करें तो जिस ओर पेच बढ़ेगा वही दिशा $A \times B$ अर्थात् C की होगी।

वेक्टरों के सदिश गुणनफल के निम्न नियम सरलतापूर्वक देखे जा सकते हैं :—

(a) $A \times A = 0$

$\because A \times A = |A|\ |A| \sin 0 = 0$

(b) $A \times B = -B \times A$

अर्थात् वेक्टर गुणा में क्रम-विनिमेय नियम का प्रतिपादन नहीं होता।

(c) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

(d) $m\ (A \times B) = (mA) \times B = (A \times mB) = (A \times B)\ m$

m कोई स्केलर है।

(e) $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \qquad ...(1·18)$

$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k};\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i},\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \qquad ...(119)$

ध्यान रहे $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k},\ \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$

(f) यदि A तथा B दो समान्तर वेक्टर हैं तो सिद्ध करो कि

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$$

$\because \quad |\mathbf{C}| = |\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$

$\quad\quad = |\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}| \sin\theta$

परन्तु $\quad \theta=0$ तथा $\sin 0=0$

$\therefore \quad \mathbf{C}=0$

$\therefore \quad \mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$

उदाहरण : यदि $\mathbf{A}=A_x\,\hat{i}+A_y\,\hat{j}+A_z\,\hat{k}$

तथा $\mathbf{B}=B_x\,\hat{i}+B_y\,\hat{j}\,B_z\,\hat{k}$

तो $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ का मान निकालो ?

उत्तर—$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(A_x\,\hat{i}+A_y\,\hat{j}+A_z\,\hat{k})\times(B_x\,\hat{i}+B_y\,\hat{j}+B_z\,\hat{k})$

$$=A_x\,\hat{i}\times(B_x\,\hat{i}+B_y\,\hat{j}+B_z\,\hat{k})$$

$$+A_y\,\hat{j}\times(B_x\,\hat{i}+B_y\,\hat{j}+B_z\,\hat{k})$$

$$+A_z\,\hat{k}\times(B_x\,\hat{i}+B_y\,\hat{j}+B_z\hat{k})$$

$$=A_x\,B_x\,\hat{i}\times\hat{i}+A_xB_y\,\hat{i}\times\hat{j}+A_xB_z\hat{i}\times\hat{k}$$

$$+A_yB_x\,\hat{j}\times\hat{i}+A_yB_y\,\hat{j}\times\hat{j}+A_yB_z\,\hat{j}\times\hat{k}$$

$$+A_zB_x\,\hat{k}\times\hat{i}+A_zB_y\,\hat{k}\times\hat{j}+A_zB_z\,\hat{k}\times\hat{k}$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_z\,B_x-A_xB_z)\,\hat{j}$$

$$+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k} \qquad \ldots(1{\cdot}20)$$

अर्थात
$$\left.\begin{aligned}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_x&=A_yB_z-A_zB_y\\(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_y&=A_zB_x-A_xB_z\\(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_z&=A_xB_y-A_yB_x\end{aligned}\right\} \qquad \ldots(1{\cdot}21)$$

$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ को संक्षिप्त रूप में निम्न डिटर्मिनेण्ट (*Determinant*) के रूप में लिख सकते हैं :

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad \cdots(1\cdot22)$$

उदाहरण : यदि $A = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$, $B = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$

तो (i) $A \times B$ (ii) $B \times A$ (iii) $(A+B) \times (A-B)$ का मान निकालो ?

हल—(i) पहली प्रकार

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}[-3 \times -2 - (4 \times -1)] - \hat{j}[2 \times -2 - (1 \times -1)]$$

$$+ \hat{k}[2 \times 4 - 1 \times (-3)]$$

$$= \hat{i}[10] - \hat{j}[-3] + \hat{k}[11]$$

$$= 10\hat{i} + 3\hat{j} + 11\hat{k}$$

(ii) दूसरी प्रकार

$$A \times B = (2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}) \times (\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= 2\hat{i} \times (\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}) - 3\hat{j} \times (\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}) - \hat{k} \times (\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= 2\hat{i} \times \hat{i} + 8\hat{i} \times \hat{j} - 4\hat{i} \times \hat{k} - 3\hat{j} \times \hat{i} - 12\hat{j} \times \hat{j} + 6\hat{j} \times \hat{k}$$

$$= \hat{k} \times \hat{i} - 4\hat{k} \times \hat{j} + 2\hat{k} \times \hat{k}$$

$$=0+8\hat{k}+4\hat{j}+3\hat{k}-0+6\hat{i}-\hat{j}+4\hat{i}+0$$

$$=10\hat{i}+3\hat{j}+11\hat{k}$$

(ii) $B\times A=-A\times B=-(10\hat{i}+3\hat{j}+11\hat{k})$

$$=-10\hat{i}-3\hat{j}-11\hat{k}$$

अथवा हम पहले प्रकार हल की तरह वेक्टर गुणा करके भी $B\times A$ का मान मालूम कर सकते थे।

(iii) $A+B=(2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k})-(\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k})$

$$=3\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$$

$$A-B=(2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k})-(\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k})$$

$$=\hat{i}-7\hat{j}+\hat{k}$$

अतः $(A+B)\times(A-B)$

$$=(3\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k})\times(\hat{i}-7\hat{j}+\hat{k})$$

$$=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}$$

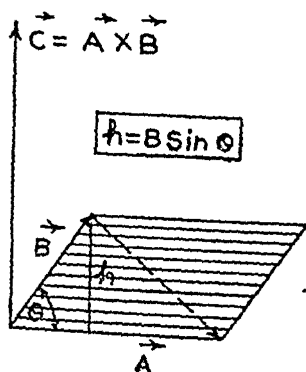
$$=\hat{i}\,[1-(21)]\;-\hat{j}\,[3-(-3)]\;+\hat{k}\,[-21-1]$$

$$=-20\hat{i}-6\hat{j}-22\hat{k}$$

1·11 वेक्टर गुणनफल के कुछ उदाहरण :—

उदाहरण 1 : समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

समानान्तर चतुर्भुज जिसकी भुजायें **A** तथा **B** हों परिमाण में $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ से प्रदर्शित किया जा सकता है। चित्र 1·17 से स्पष्ट है :



चित्र— 1·17

समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$= 2 \triangle$ का क्षेत्रफल

$= 2 \times \frac{1}{2} |\mathbf{A}| h$

$= 2 \times \frac{1}{2} |\mathbf{A}| \; |\mathbf{B}| \sin\theta$

$= |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$

यदि समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल एक दिष्ट राशि हो तो वैक्टर **C**, जो कि **A** तथा **B** के तल के लम्बवत होगा, तथा जिसका परिमाण $|\mathbf{A}| \; |\mathbf{B}| \sin\theta$ होगा, समानान्तर चतुर्भुज का वैक्टर क्षेत्रफल प्रदर्शित करेगा।

$$\text{वैक्टर क्षेत्रफल } \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

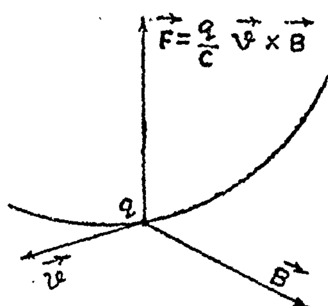
उदाहरण 2 : चुम्बकीय क्षेत्र में गतिमान एक आवेश पर बल :—

आवेश q जो कि चुम्बकीय क्षेत्र **B** में v वेग से चल रहा हो, (चित्र 1·18), तो गतिमान आवेश पर बल **B**, के उस घटक के समानुपाती होता है जो कि आवेश के v के लम्बवत हो : वैक्टर संकेतों में यह बल

$$F = \frac{q}{C}(v \times B) \text{ (Gaussian units)}$$

$$= q \; (v \times B) \quad \text{(M.K.S. इकाई)}$$

स्पष्ट है, बल की दिशा v तथा **B** के तल के लम्बवत है



चित्र 1·18

1·12 स्केलर गुणा के कुछ उदाहरण :—

उदाहरण 1 : बल के द्वारा किसी कण के विस्थापन में किया गया कार्य :

माना कोई कण बल F के अन्तर्गत दूरी ds विस्थापित हो, बल द्वारा किया गया कार्य

$$dW = F \cos\theta \; ds$$

जहाँ पर कि θ बल F तथा विस्थापन ds के बीच का कोण है। स्पष्ट है

$$dW = F. ds$$

∴ बल द्वारा किया गया कार्य = F तथा ds का स्केलर गुणन

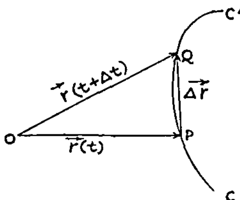
अतः शक्ति = कार्य करने की दर

$$= \frac{dW}{dt} = F. \frac{ds}{dt} = F.v$$

जहाँ पर v वस्तु का वेग है।

1·13 वेक्टर अवकलज (Vector derivative)

माना कि कोई कण वक्र C C' के अनुदिश गति कर रहा है। यदि किसी क्षण t पर कण की स्थिति P है जिसे किसी अन्य बिन्दु O के सापेक्ष r (t) में प्रदर्शित किया जाये तथा $t+\triangle t$ समय पश्चात, जबकि कण Q पर आ जाये, कण की स्थिति r $(t+\triangle t)$ से प्रदर्शित की जाये, अर्थात् कण की स्थिति स्केलर t के साथ बदल रही है (चित्र 1·19)



चित्र—1·19

चित्र से स्पष्ट है कि कण की स्थिति में परिवर्तन ($\triangle t$ समय के अन्दर)

$$= r(t+\triangle t) - r(t)$$

= जीवा (Chord) PQ

$$= \triangle r$$

यदि कण की स्थिति r केवल t पर निर्भर करे तो स्पष्ट है $\triangle r$ भी केवल t पर निर्भर करेगा। $\frac{\triangle r}{\triangle t}$ PQ की ही दिशा में वेक्टर है तथा जिसका परिमाण PQ के परिमाण के $\frac{1}{\triangle t}$ गुणा है।

यदि Q विन्दु P के अति सूक्ष्म दूरी पर हो अर्थात् $\triangle t$ का मान अति सूक्ष्म हो, अथात्

$$\triangle t \rightarrow O$$

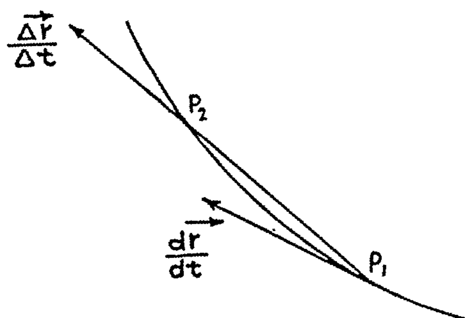
तो इस अवस्था में $\frac{\triangle r}{\triangle t}$ का मान $\frac{dr}{dt}$ का मान $\frac{dr}{dt}$ से प्रदर्शित किया जाता है।

$$\text{अर्थात्}\ \frac{dr}{dt} = \lim_{\triangle t \rightarrow O} \frac{\triangle r}{\triangle t} \qquad (1\cdot23)$$

$\frac{dr}{dt}$ को r का स्केलर t के सापेक्ष अवकलन (derivative) कहते हैं।

$$\text{अर्थात्}\ v = \frac{dr}{dt} = \lim_{\triangle t \rightarrow O} \frac{\triangle r}{\triangle t}$$

स्पष्ट ही $\frac{dr}{dt}$ विन्दु P पर कण का वेग वक्र के विन्दु P पर स्पर्श रेखा की दिशा में बताता है चित्र (1·20) वेग के परिमाण $|v|$ को कण की चाल (Speed) कहते हैं। चाल स्केलर है तथा वेग वेक्टर है।



चित्र—1·20

यदि r को $r\hat{r}$ से प्रदर्शित किया जाये जहाँ पर r वेक्टर r का परिमाण है तथा $\hat{r}$ वेक्टर की दिशा में इकाई वेक्टर है :

$$r = r\hat{r}$$

$$\text{तो}\quad \frac{dr}{dt} = \lim_{\triangle t \rightarrow O} \frac{\triangle r}{\triangle t}.$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t)\,\hat{r}(t+\Delta t) - r(t)\,\hat{r}(t)}{\Delta t}$$

आसानी पूर्वक दायी ओर के व्यंजक का मान निकाला जा सकता है परन्तु हम इस गणना का केवल अन्तिम परिणाम निम्न लिख रहे हैं।

$$\frac{dr}{dt} = \hat{r}\ \frac{dr}{dt} + r\ \frac{d\hat{r}}{dt} \qquad (1{\cdot}24)$$

या $\quad v = \hat{r}\dfrac{dr}{dt} + r\ \dfrac{d\hat{r}}{dt}$

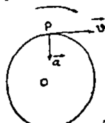
अर्थात् कण का वेग (i) कण की चाल मे परिवर्तन (ii) कण की दिशा मे परिवर्तन, दोनो का संयोजन है। यदि कण किसी वृत्ताकार मार्ग के अनुदिश समान चाल से गति कर रहा है तो कण के वेग मे परिवर्तन केवल दिशा के परिवर्तन के कारण ही होता है, चाल के कारण नहीं।

$\dfrac{dv}{dt}$ को वेग v का t के सापेक्ष अवकलन कहते हैं। $\dfrac{dv}{dt}$ को कण का त्वरण a कहते है। यदि v केवल t पर निर्भर करे तो $\dfrac{dv}{dt}$ भी केवल t पर निर्भर करेगा। यदि कण की केवल चाल मे ही परिवर्तन होता है दिशा मे नही अर्थात् कण एक सीधी रेखा मे गति करता हो तो वेग वृद्धि तथा वेग एक रेखा के अनुदिश ही होगे तथा $\qquad a = \dfrac{dv}{dt}$

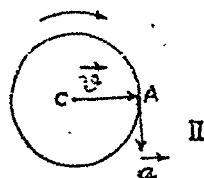
वृत्ताकार गति

यदि वेग केवल दिशा मे ही बदलता हो, परिमाण मे नहीं उदाहरणार्थ कण वृत्ताकार मार्ग के अनुदिश समान चाल से गति कर रहा हो, तो हम a का मान निम्न प्रकार से निकाल सकते हैं।

कण का वेग P पर v से प्रदर्शित किया गया है [चित्र 1·21 (I)]। वेग वृद्धि की दिशा निकालने के लिये हम एक सहायक वृत (चित्र 1·21 II) जिसकी त्रिज्या v है, खींचते हैं। वृत (I) में कण का P पर वेग (II) मे v से दिखाया गया है। कण का वृत (I) में पूरा चक्कर होने पर v का सिरा A भी वृत (II) का एक पूरा चक्कर लगा लेगा।



स्पष्ट है वृत (II) मे A का वेग $= \dfrac{dv}{dt} = a$



चित्र—1·21

जो कि विन्दु A पर स्पर्श रेखा की दिशा में है वृत (I) में कण का P पर वेग वृद्धि कहलायेगा। यदि a को वृत (I) में P पर खींचे तो स्पष्ट है कि यह वृत के केन्द्र की ओर होगा। अतः वृताकार मार्ग में जब कोई कण गति करता है तो वेग वृद्धि a वेग v के लम्बवत दिशा में अर्थात् केन्द्र की ओर अग्रसित होगा।

a का परिमाण जानने के लिये हम वृत (II) में A का वेग 'निकालते हैं। अर्थात् वृत (II) में

$$A \text{ का वेग} = a = \frac{2\pi v}{T}$$

परन्तु T = कण का वृत (I) P का एक पूरा चक्कर लगाने में लगा समय

$$= \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{2\pi r}{v}$$

$$\therefore \quad a = \frac{2\pi v^2}{2\pi r} = \frac{v^2}{r}$$

यही केन्द्रापिसारी त्वरण कहलाता है।

1·14. ग्रेडिएन्ट

स्केलर क्षेत्र में सम्बन्धित स्केलर राशि का मान सामान्यतः भिन्न-भिन्न विन्दुओं पर भिन्न होता है (यदि सभी विन्दुओं पर समान हो तो ऐसे क्षेत्र को एक-समान क्षेत्र कहते है)। अतः हम क्षेत्र के मान का, विन्दु की स्थिति के साथ परिवर्तन, का अध्ययन कर सकते हैं। उदाहरणार्थ यदि एक विन्दु A पर स्केलर क्षेत्र का मान ϕ हो तथा उसके अत्यन्त निकटस्थ विन्दु B पर मान $\phi + \triangle\phi$ हो तो उसमें परिवर्तन की दर

$$= \frac{\triangle\phi}{\triangle r} \qquad (1·25)$$

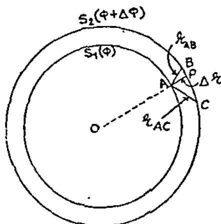
जबकि $\triangle r$, A से B के विस्थापन का मान है।

इस प्रकार यदि हम भिन्न-भिन्न दिशाओं में 'ϕ' में परिवर्त्तन की दर ज्ञात करें तो इसका मान भिन्न-भिन्न होगा। स्पष्ट ही, किसी दिशा-विशेष में 'ϕ' के परिवर्तन की दर अधिकतम होगी। इस अधिकतम दर को ग्रेडिएन्ट कहते हैं। अतः

किसी स्केलर क्षेत्र में स्थित किसी विन्दु पर 'ग्रेडिएन्ट' का मान उस विन्दु पर क्षेत्र के अधिकतम परिवर्त्तन की दर के बराबर होता है और अधिकतम परिवर्तन दर की ही दिशा में होता है। (वृद्धि की दिशा में) इस प्रकार यह एक वैक्टर राशि है।

उदाहरण के लिए यदि किसी स्केलर क्षेत्र में उस राशि का मान एक गोलीय पृष्ठ पर एक समान है तो हम ऐसे दो गोलो S_1 और S_2 की कल्पना करें जिन पर उस राशि का मान क्रमशः ϕ और $\phi+\triangle\phi$ है। देखिये चित्र 1·22

अब प्रथम गोले पर स्थित बिन्दु A से दिशा AB मे परिवर्त्तन की दर $=\dfrac{\triangle\phi}{\triangle r_{AB}}$, दिशा AC में परिवर्तन की दर$=\dfrac{\triangle\phi}{\triangle r_{AC}}$. स्पष्ट ही यह दर अधिकतम तब होगी, जब $\triangle r$ का मान न्यूनतम हो, अतः स्पष्ट ही यह दर त्रिज्या की दिशा में अधिकतम होगी अर्थात AP दिशा में, जब कि यह दर होगी :— $\dfrac{\triangle\phi}{\triangle r}$



चित्र—1·22

अतः इस उदाहरण मे ग्रेडिएन्ट $=\left(\dfrac{\triangle\phi}{\triangle r}\right)$, $\overrightarrow{AP}$ दिशा में। इस प्रकार ग्रेडिएन्ट सदैव स्केलर राशि के समान-मान वाले पृष्ठ के लम्बवत होता है; गोलीय पृष्ठ होने पर त्रिज्या के अनुदिश (radial) होता है।

किसी बिन्दु पर ग्रेडिएन्ट निकालने के लिए $\left(\dfrac{\triangle\phi}{\triangle r}\right)$ का मान ज्ञात करने के लिए ($\triangle r$) अत्यन्त लघु, अर्थात् शून्य के निकटतम (Tending to zero) लिया जाना चाहिए। स्केलर क्षेत्र का एक उदाहरण किसी गर्म की जा रही वस्तु का तापक्रम है। यदि वस्तु का आकार बडा है और वह किसी लघु स्थल पर गर्म की जा रही है, तब वहाँ पर उसका ताप अधिक होगा तथा अन्य बिन्दुओ पर कम; अर्थात् भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर भिन्न-भिन्न ताप होगा। इस स्केलर क्षेत्र मे किसी एक क्षण दो बिन्दुओं P और Q का ताप अन्तर P पर ग्रेडिएन्ट के पद मे लिखा जा सकता है। यदि बिन्दु P पर ताप किसी निश्चित समय पर T_1 से प्रदर्शित करें तथा बिन्दु Q पर उसी समय ताप को T_2 से प्रदर्शित करें तो,

बिन्दु P और Q के मध्य तापान्तर$=T_2-T_1=\triangle T$. x, y, z, निर्देशाङ्क पद्धति में यदि P के निर्देशाङ्क (x, y, z) से प्रदर्शित किये जाये तथा Q के निर्देशाङ्क $(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z)$ से प्रदर्शित करें

तो $\triangle T=T(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z)-T(x, y, z)$

$$=\frac{\partial T}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial T}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial T}{\partial z}\Delta z \qquad ...(1\cdot27)$$

[डिफरेंशल केलकूलस की मदद से]

चूंकि ΔT अर्थात् तापान्तर इस बात पर निर्भर नहीं करता कि हम कौन सी निर्देशाङ्क पद्धति उपयोग में ला रहे हैं, अर्थात् ΔT एक स्केलर है अतः समीकरण (1·26) की दायीं ओर की राशि भी स्केलर होनी चाहिए। अत:

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial T}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial T}{\partial z}\Delta z=\text{एक स्केलर राशि} \qquad ...(1\cdot27)$$

यदि $Ax\ Bx+Ay\ \ By+Az\ \ Bz=A.B=$स्केलर से तुलना हम करें तो स्पष्ट है कि $\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$ एक वेक्टर के घटक हैं, क्योंकि Δx, Δy, Δz भी वेक्टर ΔR के घटक हैं।

अत: जिस प्रकार $\hat{i}\ Ax+\hat{j}\ Ay+\hat{k}\ Az=A$

ठीक उसी प्रकार $\hat{i}\ \frac{\partial T}{\partial x}+\hat{j}\ \frac{\partial T}{\partial y}+\hat{k}\ \frac{\partial T}{\partial z}=$एक वेक्टर ...(1·28)

समीकरण (1·28) के बायीं ओर की राशि को स्केलर T का ग्रेडिएन्ट कहते हैं अर्थात्

$$\text{Grad } T\equiv\hat{i}\ \frac{\partial T}{\partial x}+\hat{j}\ \frac{\partial T}{\partial y}+\hat{k}\ \frac{\partial T}{\partial z} \qquad ...(1.29)$$

$$=\left[\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\ \frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right]T$$

$$=\overleftarrow{\nabla}\ T$$

जहां पर $\overrightarrow{\nabla}\equiv\hat{i}\ \frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\ \frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\ \frac{\partial}{\partial z}$ को ग्रेडिएन्ट (Gradient) या डेल (Del) संकारक (Operator) कहते है।

ध्यान रहे कि स्केलर का ग्रेडिएन्ट एक वेक्टर होता है।

इस प्रकार समीकरण (1·26) से स्पष्ट है कि

$$\Delta T=(\nabla T).\ (\Delta R) \qquad (1\cdot31)$$

अत: ग्रेडिसन्ट ज्ञात होने पर हम उसकी सहायता से दो निकटस्थ बिन्दुओं पर उस राशि के मान का अन्तर ज्ञात कर सकते हैं। ग्रेडिएन्ट का एक अन्य उदाहरण विद्युत विभव भी है जिसका ग्रेडिएन्ट एक विद्युत क्षेत्र होता है। विद्युत विभव तथा विद्युत क्षेत्र के विषय में अधिक जानकारी भाग 2 के अध्याय 2 और 3 में दी गई है $[E = -\nabla\phi]$

उदाहरण 1·1 : $A = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ तथा $B = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ के मध्य निहित कोण का मान बताओ

$A.B = AB\cos\theta$; $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$

$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{36+9+4} = 7$

$A\ B = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

$= (2)(6) + (2)(-3) + (-1)(2) = 12 - 6 - 2 = 4$

$\therefore\quad \cos\theta = \frac{A\ B}{AB} = \frac{4}{(3)(7)} = \frac{4}{21} = 0{\cdot}1905$

अत: $\theta = \cos^{-1}{\cdot}1905 = 79^\circ$ लगभग

उदाहरण 1·2 : सिद्ध करो कि

$A = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ तथा $B = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ एक दूसरे के अभिलम्बवत हैं।

$A{\cdot}B = AB\cos\theta = AB\cos 90 = 0$

यदि A तथा B लम्बवत हैं तो हमें A·B का मान निकालना चाहिये और यदि यह मान शून्य आता हो तो A तथा B लम्बवत होंगे।

$A.B = A_x B_x + A_y B_y + A_zB_z$

$= (2)(4) + (3)(-2) + (1)(-2)$

$= 8 - 6 - 2 = 0$ अत: दोनों वेक्टर लम्बवत हैं।

उदाहरण : 1·3 $A = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ के द्वारा x तथा y तथा z अक्षों के मध्य कोण की गणना करो ?

माना A तथा x-अक्ष के बीच का कोण α, A तथा y-अक्ष के मध्य कोण β, A तथा z अक्ष के मध्यकोण γ है।

तो $A.\hat{i} = (A)(1)\cos\alpha$

$= \sqrt{3^2 + (-6)^2 + (2)^2}\cos\alpha = 7\cos\alpha$

$A.\hat{i} = (3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})\hat{i} = 3\hat{i}\hat{i} - 6\hat{j}\hat{i} + 2\hat{k}\hat{i} = 3$

$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{3}{7} = \cdot 4286$ अत: $\alpha = 64 \cdot 6^\circ$ लगभग

इसी प्रकार $\mathbf{A}.\hat{j} = (A)\,(1)\cos\beta = 7\cos\beta$

$$\mathbf{A}.\hat{j} = (3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}).\hat{j} = -6$$

$$\therefore \quad \cos\beta = -\frac{6}{7} \quad \therefore \quad \beta = 149^\circ$$

ठीक इसी प्रकार $\cos\gamma = \frac{2}{7} \quad \therefore \quad \gamma = 73 \cdot 4^\circ$

आसानी पूर्वक यह देखा जा सकता है कि

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ को **A** के दिशात्मक कोज्या (Direction Cosines) कहते हैं।

उदाहरण 1·4 : वेक्टर $\mathbf{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ का वेक्टर $\mathbf{B} = 4\,\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ पर प्रक्षेप निकालो ?

A का **B** पर प्रक्षेप $= A\cos\theta = (A)\,(\hat{A}.\hat{B})$

$$= \mathbf{A}.\hat{\mathbf{B}}$$

B की दिशा में इकाई वेक्टर $\hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}}{\sqrt{(4)^2 + (-4)^2 + (7)^2}}$

$$= \frac{4}{9}\hat{i} - \frac{4}{9}\hat{j} + \frac{7}{9}\hat{k}$$

अत: **A** का **B** पर प्रक्षेप $= \mathbf{A}.\hat{\mathbf{B}} =$

$$= (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}).(\tfrac{7}{9}\hat{i} - \tfrac{4}{9}\hat{j} + \tfrac{4}{9}\hat{k})$$

$$= (1)(\tfrac{4}{9}) + (-2)(-\tfrac{4}{9}) + (1)(\tfrac{7}{9}) = \tfrac{19}{9}$$

उत्तर

उदाहरण 1·5 : एक कण पर स्थिर बल $\mathbf{F} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ क्रियान्वित है। कण का विन्दु (0,0,0) से (3,2,−5) तक के विस्थापन में बल के द्वारा कण पर किये गये कार्य की गणना करो ?

$$\mathbf{r} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}) - (0\hat{i} - 0\hat{j} - 0\hat{k})$$

$$=3\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}$$

कार्य $=\mathbf{F}.\mathbf{r}$

$$=(2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}).(3\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k})$$

$$=(2)\,(3)+(-1)\,(2)+(-1)(-5)=6-2+5=9$$

इकाई उत्तर :

उदाहरण 1·6 : यदि A तथा B समान्तर है तो सिद्ध करो कि (A तथा B शून्य नहीं हैं)

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$$

उत्तर $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathrm{A\ B}\sin\theta\,\hat{n}$

$$=\mathrm{A\ B}\sin 0\hat{n} \qquad [\because \theta=0 \text{ तथा } \sin 0=0]$$

$$=0$$

प्रश्न

(1) कोई भौतिक राशि वेक्टर से कब प्रदर्शित की जा सकती है ?

(2) क्या स्केलर का मान निर्देशांक पद्धति पर निर्भर करता है ?

(3) यदि A तथा B दो वेक्टर हैं सिद्ध करो कि

(a) A तथा B लम्बवत है यदि $\mathbf{A}.\mathbf{B}=0$

(b) A तथा B समान्तर है यदि $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$

(4) क्या ऐसे दो वेक्टरों का परिणामी शून्य हो सकता है जिनके परिमाण बरावर न हो, क्या तीन वेक्टरों का परिणामी शून्य हो सकता है ?

(5) समझाइये कि (a) $\mathbf{A}.\mathbf{B}=\mathbf{B}.\mathbf{A}$

(b) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}$

(6) स्पष्ट कीजिये कि $\mathbf{A}.\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=0$

(7) ग्रेडिएन्ट संकारक को लिखो। "स्केलर का ग्रेडिएन्ट एक वेक्टर है" की भौतिक सार्थकता क्या है।

(8) क्या क्षेत्रफल को वेक्टर से प्रदर्शित किया जा सकता है ? सिद्ध करो कि समान्तर चतुर्भुज जिसकी आसन्न भुजाएँ A तथा B है, का क्षेत्रफल $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ के बरावर है।

(9) A, B दो वेक्टर हैं। सिद्ध करो कि परिणामी वेक्टर का अधिकतम परिमाण A+B तथा न्यूनतम A−B होगा।

(10) A, B के गुणों की निम्न अवस्थाओं में व्याख्या करो

(i) A+B=C तथा A+B=C

(ii) A+B=A—B

(iii) A+B=C तथा $A^2+B^2=C^2$

संख्यात्मक प्रश्न

(11) यदि $A=4\hat{i}-3\hat{j}$ तथा $B=6\hat{i}+8\hat{j}$ तो A, B, A+B, B—A तथा A—B का परिमाण तथा दिशा ज्ञात करो ?

उत्तर : परिमाण 5, 10, 11·2, 11·2, 11·2

दिशा : x अ क्ष के साथ कोंण : 323°, 53·1°, 26·5°, 79·7°, 260°

दिया है :

(12) $a=3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$; $b=-\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k}$ तो

(i) दोनों वेक्टरों की लम्बाई क्या है ?

(ii) a. b का मान बताओ

(iii) a तथा b के मध्य निहित कोंण क्या है

(iv) a+b तथा a—b का मान क्या होगा ?

(v) a×b का मान बताओ ?

(i) $a=\sqrt{50}$, $b=\sqrt{41}$ (ii) —25 (iii) 123·5°

(iv) $a+b=2\hat{i}+6\hat{j}+\hat{k}$ (v) $34\hat{i}-13\hat{j}+10\hat{k}$

(13) यदि $a+b=11\hat{i}-\hat{j}+5\hat{k}$

$$a-b=-5\hat{i}+11\hat{j}+9\hat{k}$$

(i) a व b का मान निकालो।

(ii) a व a+b के मध्य निहित कोंण बताओ ?

(14) यदि a तथा b अभिलम्बवत है तो सिद्ध करो कि

$|a+b|=|a-b|$ (राजस्थान वि० वि० 1972)

(15) दो स्थिर बल $F_1=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ (Dynes) तथा $F_2=4\hat{i}-5\hat{j}-2\hat{k}$ (Dynes) एक कण पर एक साथ कार्य करते हैं। यदि बलों के अन्तर्गत कण विन्दु A (20, 15, 0) cm. से विन्दु B(0, 0, 7) cm. विस्थापित होता है :

(a) परिणामी बल के द्वारा कण पर किया गया कार्य का मान निकालो।

(b) यदि इन्ही दो बलों के अन्तर्गत कण का विस्थापन B से A की ओर होता, तो इस अवस्था में कण पर किया गया कार्य क्या होगा ?

Hint : [राजस्थान वि० वि० 1972]

$$W = F.\,dr, \quad F = F_1 + F_2 = 5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}, \quad dr = AB = r_2 - r_1$$

जहाँ पर $r_2 = 7\hat{k}$, $r_1 = 20\hat{i} + 15\hat{j}$

उत्तर (a) -48 ergs (b) $+48$ ergs

(16) किसी बिन्दु O के परितः बल आघूर्ण K परिमाणानुसार $r \times F$ के बराबर होता है जहाँ पर F = बल तथा r बिन्दु O के सापेक्ष उस बिन्दु की सदिश स्थिति बताता है जिस पर कि बल क्रियान्वित है। यदि $F = -3\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$ (dynes) किसी बिन्दु $7\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ (cm) पर क्रियान्वित हो तो

(a) (0, 0, 0) बिन्दु के सापेक्ष बल आघूर्ण क्या होगा ?

(b) (0, 10, 0) बिन्दु के सापेक्ष बल आघूर्ण क्या होगा ?

Hint : (a) $K = r \times F = (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z) \times (\hat{i}F_x + \hat{j}F_y + \hat{k}F_z)$

$$= \hat{i}(yF_z - zF_y) + \hat{j}(zF_x - xF_z) + \hat{k}(xF_y - yF_x)$$

$$= \hat{i}(15 - 1) + \hat{j}(-3 - 35) + \hat{k}(7 + 9)$$

$$= 14\hat{i} - 38\hat{j} + 16\hat{k} \text{ dyne cm}$$ उत्तर

(b) यहाँ पर $r = (7\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) - (0\hat{i} + 10\hat{j} + 0\hat{k})$

$$= 7\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$$

अतः $K = r \times F = -36\hat{i} - 38\hat{j} - 14\hat{k}$ dyne cm उत्तर

(17) यदि किसी कण पर एक साथ तीन बल F_1, F_2, F_3, क्रियान्वित होते हैं, यदि कण इन बलो के अन्तर्गत साम्यावस्था में है तो सिद्ध करो कि परिणामी बल F_R जो कि F_1, F_2, F_3, का वेक्टर योग है, शून्य होना चाहिये अर्थात् यह सिद्ध करना है कि F_1, F_2, F_3 एक त्रिभुज बनाते हैं।

2 संरक्षण सिद्धान्त
(Conservation Laws)

2·1. बल क्षेत्र (Force Field)

यदि कोई वस्तु जब अपने आस पास की अन्य वस्तुओं से अन्योन्य क्रिया (Interact) करती है तो हम कहते हैं कि वस्तु एक निश्चित बल क्षेत्र में स्थित है और उस पर एक बल कार्य करता है। वस्तु पर लगने वाला यह बल वस्तु की स्थिति पर निर्भर करता है अर्थात् वस्तु की प्रत्येक स्थिति (x, y, z) के लिये एक निश्चित बल—

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}\,(x, y, z)$$

होगा। सामान्यतः वस्तु की भिन्न भिन्न स्थिति पर यह बल भी भिन्न भिन्न होगा। इस प्रकार प्रत्येक बिन्दु पर 'बल' का निश्चित मान है जो अपने आस पास के बिन्दुओं पर बलों के मान से निश्चत नियमों द्वारा सम्बन्धित होता है। **दिक में इस प्रकार के बलों के समूह को बल-क्षेत्र कहते हैं जो कि कोई कण भिन्न भिन्न स्थिति में अनुभव करता है।**

किसी कण पर लगने वाले बल से यह ज्ञात होता है कि अमुक कण अन्य कणों से किस प्रकार अन्योन्य क्रिया (Interact) कर रहा है। उदाहरणार्थ जब कोई कण पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण बल क्षेत्र में प्रवेश करता है तो उस पर उसकी प्रत्येक स्थिति पर एक निश्चित बल लगता है। यहाँ पर यह स्पष्ट कर देना महत्वपूर्ण है कि दिक (Space) के किसी बिन्दु पर क्षेत्र एक भौतिक वास्तविकता

(Physical reality) है जो किसी भी रूप में उस बिन्दु पर कण की उपस्थिति के ऊपर निर्भर नहीं करता अर्थात् दिक के किसी बिन्दु पर वेक्टर राशि $F = F(x, y, z)$ होती है, जब कोई कण इस बिन्दु पर होता है तो उस पर एक निश्चित बल लगता है। यदि दिक के प्रत्येक बिन्दु पर, कण पर लगने वाला बल समान हो, ऐसे बलक्षेत्र को समरूप बलक्षेत्र (Uniform force field) कहते हैं, तथा जो बलक्षेत्र समय के साथ अपरिवर्तित रहते हैं, उन्हें स्थिर बलक्षेत्र (Constant force field) कहते हैं। पृथ्वी का गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र एक सीमित स्थान में समरूप एवम् स्थिर कहा जा सकता है।

बल के द्वारा किया कार्य :— यदि कोई वस्तु किसी बल क्षेत्र में गति कर रही हो तो बल के द्वारा किसी वस्तु को ds दूरी विस्थापित करने में किया गया

कार्य, dw = बल का विस्थापन की दिशा में घटक × विस्थापन ...(2·1)

चित्र (2·1) में APB वह मार्ग है जिसके अनुदिश वस्तु गति रही है। वस्तु को ds दूरी विस्थापित करने में बल के द्वारा किया गया कार्य (2·1) से

$$dw = F_s\, ds \quad ..(2{\cdot}2)$$

जहाँ पर F_s बल F का विस्थापन की दिशा में घटक है।

स्पष्ट है $F_s = F \cos\theta$

चित्र—2·1

अतः समीकरण (2·2) से

$$dw = F\cos\theta\, ds = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \quad ..(2{\cdot}3)$$

अतः बल के द्वारा किसी वस्तु को अति सूक्ष्म दूरी (Infinitesimal Distance) विस्थापित करने में किया गया अति सूक्ष्म कार्य (Infinitesimal work) F तथा ds के बिन्दु गुणनफल के बराबर होता है। अत. किसी वस्तु को किसी बिन्दु A से अन्तिम बिन्दु B तक APB मार्ग के आनुदिश ले जाने में कुल कार्य उन सभी कार्यों के योग के बराबर होगा जोकि मार्ग APB को अतिसूक्ष्म मार्गों (Infinitesimal Paths) $\triangle s_1\ \triangle s_2, \ldots$ इत्यादि मे बाँटकर, वस्तु को विस्थापित करने में भिन्न भिन्न बलो $F_1, F_2 \cdots$ इत्यादि से प्राप्त होता,

अर्थात् $$W_{A\to B} = F_1\cdot\triangle s_1 + F_2\cdot\triangle s_2 + F_3\cdot\triangle s_3 \ldots\ldots$$

$$= \int_A^B \mathbf{F}.d\mathbf{s} \quad ...(2{\cdot}4)$$

परिभाषा से स्पष्ट है यदि बल गति के लम्बवत हो (उदाहरणार्थ : वृत्ताकार गति में) तो बल के द्वारा किया कार्य,

$$dw = F.\ ds = F\ ds \cos 90 = 0$$

कार्य ऊर्जा सम्बन्धी प्रमेय :—कार्य की परिभाषा से

$$dw = F_s\ ds$$

चूंकि $F = m \frac{dv}{dt}$

तथा F का गति की दिशा में घटक $F_s = m\frac{dv}{dt}$

जहां पर कि $\frac{dv}{dt}$, वेग वृद्धि वेक्टर $\frac{dv}{dt}$ का गति की दिशा में घटक है।

$$\therefore \quad dW = F_s\ ds = m\frac{dv}{dt} ds$$

$$= m\ v\ dv \quad \left(\because \frac{ds}{dt} = v\right)$$

अथवा $\boxed{dW = d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)}$ $\left(\because d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = mvdv\right)$ ...2·5

अतः किसी कण को F द्वारा अति सूक्ष्म दूरी (Infinitesimal distance) विस्थापित करने में किया कार्य dw उस कण के $\frac{1}{2}mv^2$ में वृद्धि के बराबर होता है। $\frac{1}{2}mv^2$ को कण की गतिज ऊर्जा कहते हैं। समीकरण (2·5) को निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$\int dW = \int_A^B d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = \left[\tfrac{1}{2}mv^2\right]_A^B$$

$$\boxed{W = \tfrac{1}{2}mv^2{}_B - \tfrac{1}{2}mv^2{}_A} \quad ...2·6$$

समीकरण (2·6) पहले प्राप्त समीकरण (2·5) का ही दूसरा रूप है। अतः किसी बल के द्वारा किया गया कार्य उस कण की गतिज ऊर्जा में वृद्धि के बराबर होता है। यह परिणाम एक व्यापक परिणाम है तथा सभी प्रकार के बल क्षेत्रों के लिये लागू होता है।

2·2. संरक्षी तथा असंरक्षी बल

यदि कोई कण किसी बल क्षेत्र में गति कर रहा हो तो क्षेत्र के बलों (Field

forces) द्वारा कण को उसके मार्ग A से B तक विस्थापित करने में किया गया कार्य, निम्न सूत्र से दिया जाता है :

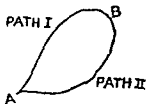
$$W_{A \to B} = \int_A^B F.\, ds$$

साधारणतया $W_{A \to B}$ का मान कण के द्वारा A से B तक पहुँचने मे अनुसरण किये गये मार्ग पर निर्भर करता है। अर्थात् क्षेत्र बलो द्वारा कण को A से B तक विस्थापित करने में अलग अलग मार्गों के लिये अलग अलग कार्य करना पड़ेगा, दूसरे शब्दों मे, $W_{A \to B}$ मार्ग पर निर्भर करने वाली राशि होती हैं। कुछ बल क्षेत्र ऐसे भी होते हैं जिनके लिये कण को A से B तक विस्थापित करने मे किया गया कार्य सभी मार्गों के लिये समान होता है अर्थात् $W_{A \to B}$ इस बात पर निर्भर नहीं करता कि कण ने किस मार्ग का अनुसरण किया। ऐसे बल क्षेत्रों को संरक्षी बलक्षेत्र कहते हैं।

चित्र (2·2) मे A से B तक पहुँचने के लिये दो मार्ग क्रमश. Path I तथा Path II हैं। यदि बल क्षेत्र सरक्षी है तो परिभाषानुसार

$$\left(W_{A \to B}\right)_{Path\ No. 1} = \left(W_{A \to B}\right)_{Path\ No. 2} \quad \ldots 2{\cdot}7$$

गुरुत्वाकर्षण बल क्षेत्र, स्थिर वैद्युत बल, स्प्रिंग के द्वारा लगाया गया बल, सरक्षी बलो के उदाहरण हैं।



चित्र—2·2

स्थिर बल क्षेत्र अर्थात् वो बल क्षेत्र जो कि समय पर निर्भर नही करते (Constant force field) की प्रमुख विशेषता यह है कि कण को A से B तक विस्थापित करने में किया कार्य पथ के ऊपर नही होता

अर्थात् $W_{A \to B} = \int_A^B F.ds$ केवल कण की प्रारम्भिक एवम् अन्तिम स्थिति क्रमश: A तथा B पर निर्भर करता है। दूसरे शब्दो में

$$\left(W_{A\to B}\right)_I = \left(W_{A\to B}\right)_{II}$$

$$= -\left(W_{B\to A}\right)_{II}$$

(∵ कण को A से B के विपरीत B से A दिशा में लाने पर कार्य का चिन्ह + से — होगा)

$$\left(W_{A\to B}\right)_I + \left(W_{B\to A}\right)_{II} = 0 \qquad \ldots(2\cdot8)$$

अथवा कण को A से शुरू कर किसी बन्द वक्र (Closed curve) के द्वारा पुनः A तक लाने में क्षेत्र बलों के द्वारा किया गया कुल कार्य शून्य के बराबर होता है, ऐसे बल क्षेत्र, जिनमें किसी कण को इसकी प्रारम्भिक स्थिति से किसी भी मार्ग द्वारा उसी स्थिति में लाया जाये, ऐसा करने में कुल कार्य शून्य हो, संरक्षी बल क्षेत्र कहलाते हैं, स्पष्ट है संरक्षी बल क्षेत्रों के लिये

$$\boxed{\oint F\cdot ds = 0} \qquad \ldots(2\cdot9)$$

जहाँ पर $\oint$ चिन्ह एक बन्द वक्र के अनुदिश समाकलन (Integration) को प्रदर्शित करता है। स्थिर बल क्षेत्र संरक्षी होते हैं।

संरक्षी बल क्षेत्र में कण को A से B तक विस्थापित करने में किया गया कार्य चूँकि A से B तक के मार्ग पर निर्भर नहीं करता, केवल A तथा B की स्थिति पर ही निर्भर करता है, अतः यह राशि (अर्थात् A से B तक कण को लाने में किया गया कार्य) संरक्षी बल क्षेत्रों के लिये अति महत्वपूर्ण है। यदि हम संरक्षी बल क्षेत्र में किसी बिन्दु O को शून्य स्थिति (Origin) मान लें तो O से P तक किसी कण को ले जाने में क्षेत्र बलों के द्वारा किया गया कार्य केवल बिन्दु P की स्थिति पर ही निर्भर करेगा, इस कार्य को $-U$ से प्रदर्शित किया जाता है, जहाँ पर $U = -$कण को बिन्दु O से बिन्दु P तक ले जाने में बल क्षेत्रों द्वारा किया गया कार्य $=$ कण की बिन्दु P पर स्थितिज ऊर्जा (Potential energy) कहलाती है। स्पष्ट है कि U केवल बिन्दु P की स्थिति P की स्थिति $P(x, y, z)$ पर ही निर्भर करता है, अर्थात्

$$U = U(x, y, z) \qquad \ldots(2\cdot10)$$

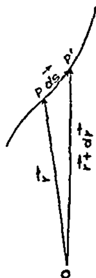
अतः A से B तक कण को विस्थापित करने में बल क्षेत्रों द्वारा किया गया कार्य यदि $W_{A\to B}$ से प्रदर्शित किया जाये तो यह स्पष्ट है कि

$$W_{A\to B}=W_{O\to B}-W_{O\to A}$$
$$=-U(B)-(-U(A))$$

$$\boxed{W_{A\to B}=U(A)-U(B)} \qquad ....(2\cdot11)$$

अत. कण को A से B तक विस्थापित करने मे क्षेत्र बलो द्वारा किया कार्य =कण की प्रारम्भिक एव अन्तिम स्थिति मे स्थितिज ऊर्जा का अन्तर

यदि कण का बिन्दु P से अतिसूक्ष्म दूर विन्दु P′ तक का विस्थापन करने में क्षेत्र बलो द्वारा किया कार्य dW से प्रदर्शित किया जाये, तथा PP′ विस्थापन को ds से प्रदर्शित किया जाये (चित्र 2·3)



चित्र—2·3

चित्र से स्पष्ट है :

$$PP'=ds=dr$$

अत. $dW=F.\ ds=F.\ dr=-dU$

अतः $\boxed{F\cdot dr=-dU}$ ...(2 12)

स्थितिज ऊर्जा तथा बल मे यह एक अत्यन्त महत्वपूर्ण सम्बन्ध है। समीकरण (2 12) से स्पष्ट है कि बल सदैव उसी दिशा मे कार्य करता है जिस दिशा मे स्थितिज ऊर्जा घटती है। समीकरण (2·12) से

$$F_s\ d_s=-dU$$

$$\boxed{F_s=-\frac{dU}{ds}} \qquad ...(2\cdot13)$$

अर्थात् U का किसी दिशा मे ऋण चिन्ह सहित परिवर्तन (Derivative) उस दिशा में बल का घटक कहलायेगा। उदाहरणार्थ F यदि एक स्थिर समरूप बल क्षेत्र है, माना कि इसकी दिशा z-अक्ष से प्रदर्शित की जा सकती है। हम इस बल क्षेत्र मे कण की स्थितिज ऊर्जा निकालना चाहते हैं। बल क्षेत्रो द्वारा कण को विस्थापित करने में अतिसूक्ष्म कार्य $dW=F\cdot dr=Fdz$

परन्तु $dW=-dU$

$\therefore\ -dU=Fdz$

अथवा $U=-Fz+\text{Constant}$

समीकरण (2·14) से स्पष्ट है कि कण की स्थितिज ऊर्जा का मान एक स्थिरांक राशि के मान तक अज्ञात है। अर्थात् स्थिरांक का मान क्या लिया जाये यह हमारे स्वेच्छा के चयन पर निर्भर करता है। इसका कारण यह है कि हमने विन्दु O से P तक के कार्य को कण की P पर स्थितिज ऊर्जा माना था तथा O को हमने स्वेच्छा से शून्य स्थिति मानी थी। यदि O के बजाय O′ को शून्य स्थिति मानते तो P की स्थितिज ऊर्जा O′ के सापेक्ष, O के सापेक्ष P की स्थितिज ऊर्जा से एक स्थिराङ्क से अन्तर पर होती। अत: कण की किसी विन्दु पर स्थितिज ऊर्जा का मान एक स्थिराङ्क के मान के मान के अन्दर अज्ञात है। साधारणतया कण की स्थितिज ऊर्जा का मान, जबकि वह अन्य कणों से अनन्त दूरी पर हो अर्थात् वह अन्य कणों से किसी प्रकार की अन्योन्य क्रिया न करे, शून्य माना जाता है :

$$U(\infty) = \text{शून्य} \tag{2·15}$$

अर्थात् शून्य विन्दु O को अनन्त पर स्थित मान जाता है। जिस दिशा में स्थितिज ऊर्जा बढ़ती है, बल उसके विपरीत दिशा में कार्य करता है। बल सदैव स्थितिज ऊर्जा के घटने की दिशा में कार्य करता है।

2·3 ऊर्जा के संरक्षण का सिद्धान्त :—

चूँकि हम जानते हैं कि क्षेत्र बलों के द्वारा वस्तु को विस्थापित करने में किया गया कार्य वस्तु की गतिज ऊर्जा में वृद्धि के बराबर होता है : अर्थात्

$$dW = F_s ds = m \frac{dv}{dt} ds$$

$$= mvdv$$

$$= d(\tfrac{1}{2}mv^2) \tag{2·16}$$

तथा यदि बल क्षेत्र संरक्षी है, तो क्षेत्र बलों के द्वारा किया गया कार्य कण की स्थितिज ऊर्जा में ह्रास के बराबर है, $dW = -dU$ (2·17)

समीकरण (2·16) तथा (2·17) से

$$d(\tfrac{1}{2}mv^2) = -dU$$

$d(U + \tfrac{1}{2}mv^2) = 0$ चूँकि चिन्ह 'd' अतिसूक्ष्म परिवर्तन को बताता है, अत $U + \tfrac{1}{2}mv^2$ राशि का परिवर्तन शून्य है, दूसरे शब्दों में

$$U + \tfrac{1}{2}mv^2 = \text{Constant (स्थिराङ्क)} \tag{2·18}$$

अर्थात् संरक्षी बल क्षेत्र में कण की स्थितिज तथा गतिज ऊर्जा का योग सदैव स्थिर होता है। इस नियम को ऊर्जा के संरक्षण का नियम कहते हैं।

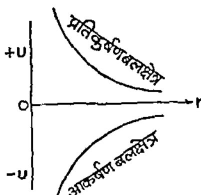
समीकरण (2·18) एक ऐसी विशेष अवस्था के लिये निकाला गया था जिसमें कि बल क्षेत्र स्थिर (Constant) था, अर्थात् उन सभी कणों का समूह जिनसे

कि क्षेत्र वल उत्पन्न हुआ था, स्थिर अवस्था में थे तथा केवल एक कण ही गति अवस्था में था, जो कि इन कणो के समूह मे अन्योन्य क्रिया करता था। व्यापक अवस्था मे, जिसमें केवल एक कण गति मे होने के वजाय यदि अन्य कण भी गतिमान हों तथा गतिमान होने के साथ-साथ आपस मे अन्योन्य क्रिया करें, ऐसी स्थिति में भी ऊर्जा के संरक्षण का नियम दिया जा सकता है। यदि हम एक बन्द तन्त्र (Closed System) की कल्पना करें, अर्थात् ऐसा तन्त्र जिसमें विभिन्न कण आपस में तो अन्योन्य क्रिया करें परन्तु किसी भी प्रकार का वाह्य वल क्षेत्र न हो तो सभी कणों की अलग-अलग गतिज ऊर्जा का योग समय के साथ परिवर्तित नहीं होता।

$$\text{अथवा } E = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + \cdots + U(r_1r_2, \cdot\ ) = \text{स्थिरांक} \quad (\cdot 219)$$

किसी भी वन्द तन्त्र के लिये सम्पूर्ण ऊर्जा का मान सदैव स्थिर है। यदि ब्रह्माण्ड को ही एक बन्द तन्त्र माना जाये तो ब्रह्माण्ड की सम्पूर्ण ऊर्जा एक स्थिर राशि है।

चूंकि गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}mv^2$ सदैव धनात्मक है, अत U का मान धनात्मक या ऋणात्मक दोनो हो सकता है। यदि दो कणों के बीच की दूरी अनन्त हो, तथा उनकी इस स्थिति मे स्थितिज ऊर्जा का मान्य शून्य माना जाये, तो स्पष्ट है कि यदि कणो के मध्य आकर्षण बल क्षेत्र है, तो कणो के पास आने पर स्थितिज ऊर्जा घटेगी (क्योंकि वल की दिशा मे स्थितिज ऊर्जा घटती है) अत. U का मान ऋणात्मक होगा (∴ $U<0$) यदि वल क्षेत्र प्रतिकर्षण का है तो पास मे आने से U का मान बढ़ेगा अत. U धनात्मक होगा। यह चित्र (2·4) में दिखाया गया है।



चित्र—2·4

जब स्थितिज ऊर्जा घटती है तो गतिज ऊर्जा बढ़ती है तथा इन दोनों का योग स्थिर होता है।

2·4 असंरक्षी वल

असरक्षी वल क्षेत्र वह है जिसमे क्षेत्र बलो के द्वारा किया गया कार्य पथ के ऊपर निर्भर करता है। अर्थात् प्रत्येक अलग मार्ग के लिये वलो के द्वारा किया कार्य भिन्न होता है। ऐसे वलक्षेत्र मे क्षेत्र वलो के द्वारा वस्तु पर किया गया कार्य वस्तु की गतिज ऊर्जा मे कुल वृद्धि के बराबर नहीं होता। *उदाहरणार्थ घर्षण बल असंरक्षी* वल है। जब वलक्षेत्र असरक्षी है तो वस्तु की स्थितिज ऊर्जा मे ह्रास वस्तु की गतिज

ऊर्जा में वृद्धि के बराबर नहीं होता। दूसरे शब्दों में, असंरक्षी बल क्षेत्रों में

$$K_1 + U_1 \neq \text{स्थिरांक}$$

यदि वस्तु को उसकी स्थिति से पुनः उसी स्थिति तक किसी बन्द वक्र के अनुदिश लाया जाये तो क्षेत्र बलों के द्वारा किया गया कार्य शून्य के बराबर नहीं होता अर्थात् असंरक्षी बल क्षेत्र के लिये

$$\oint F \cdot dr \neq 0$$

2·5 संवेग के संरक्षण का नियम

यदि कोई कण अपने समूह के अन्य कणों से इतनी दूर हो कि उनके बल क्षेत्र का उस कण पर कोई भी प्रभाव न हो, ऐसे बल रहित कण को मुक्त कण (Free body) कहते हैं। मुक्त कण की गति, हम न्यूटन के प्रथम नियम से जानते हैं, किसी जड़त्वीय निर्देश तंत्र के सापेक्ष एक निश्चित गति से सीधी रेखा में होती है या वह कण स्थिर रहता है : अर्थात्

$$V = \text{स्थिर (यदि } F = 0) \qquad \ldots(2{\cdot}20)$$

यदि विभिन्न कण आपस में अन्योन्य क्रिया (Interact) करें तो उन कणों का वेग परिवर्तित होगा। वेग में परिवर्धन कणों की अन्योन्य क्रिया के फलस्वरूप हुए वेग में परिवर्तन के नियम को जानने के लिये हम कणों के एक ऐसे तंत्र की कल्पना करते हैं जिसमें भिन्न-भिन्न कण आपस में तो अन्योन्य क्रिया करते हैं परन्तु उन पर किसी भी प्रकार का बाह्य बल क्षेत्र नहीं है, ऐसे तंत्र को हम बन्द तंत्र (Closed system) कहते हैं।

[बन्द तंत्र के लिये, कणों के वेगों से सम्बन्धित कुछ ऐसी भौतिक-राशियाँ है जिनका मान सदैव स्थिर रहता है अर्थात समय के साथ अपरिवर्तित रहता है। बन्द तंत्र का संवेग भी एक ऐसी ही संरक्षित भौतिक राशि है।]

किसी कण का संवेग जो कि उसके वेग के समानुपाती होता है, यदि p से प्रदर्शित किया जाये तो $p = mv$ ...(2·21)

जहाँ पर m कण की सहति कहलाती है।

बन्द तंत्र का संवेग p उसके कणों के संवेगों के वेक्टर योग के बराबर होता है।

अर्थात् $p = p_1 + p_2 + \ldots\ldots = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \ldots\ldots$

संवेग के संरक्षण के नियमानुसार, किसी बन्द तंत्र में कण आपस में इस प्रकार अन्योन्य क्रिया करते हैं कि कणों के संवेगों का वेक्टर योग सदैव स्थिर राशि है; अर्थात्

$$p_1 + p_2 + \ldots\ldots = \text{स्थिर} \qquad \ldots(2{\cdot}22)$$

स्पष्ट ही $\frac{dp_1}{dt}+\frac{dp_2}{dt}+\ldots\ldots=0$

या $F_1+F_2+\ldots\ldots=0\ldots\ldots$ $\left[\because \frac{dp_i}{dt}=F_i = i\text{th कण पर बल}\right]$

अतः किसी बन्द तन्त्र मे सब बलो का वेक्टर योग शून्य के बराबर होता है। उदाहरणार्थ यदि तन्त्र केवल दो कणो से ही मिलकर बना हो तो

$$F_1+F_2=0$$

अथवा $$F_1=-F_2 \qquad \ldots(2\cdot23)$$

अर्थात् एक कण के द्वारा दूसरे कण पर लगाया गया बल, दूसरे कण द्वारा पहले कण पर लगाये गये बल के बराबर व विपरीत होता है। यह न्यूटन का तृतीय नियम कहलाता है।

*[संवेग के संरक्षण का नियम दिक (Space) के मौलिक गुण समांगता (Homogeneity) का ही परिणाम है। दिक की समांगता (Homogeneity of Space) से हमारा अभिप्राय यह है कि किसी भी बन्द तन्त्र के गुण दिक के प्रत्येक बिन्दु पर समान रहते हैं, अर्थात् दिक का प्रत्येक बिन्दु बन्द तन्त्र के लिये समतुल्य हैं। अतः यदि हम तंत्र का दिक मे अति सूक्ष्म (Infinitesimal) दूरी से विस्थापन करें तथा इस विस्थापन को dr वेक्टर से प्रदर्शित किया जाये तो तन्त्र के किसी कण (माना कि ith कण) को विस्थापित करने में किया कार्य $F_i \cdot dR$ होगा। इसलिये तन्त्र के सभी कणों को dR मे विस्थापित करने मे कार्य

$$dW=F_1\cdot dR+F_2\cdot dR+\ldots\ldots$$

परन्तु तंत्र पर किया गया यह कार्य तन्त्र की स्थितिज ऊर्जा मे परिवर्तन के बराबर होना चाहिये; क्योंकि तन्त्र के गुण दिक की समांगता के गुण के कारण अपरिवर्तित रहते हैं अतः

$$F_1\cdot dr+F_2\cdot dR+\ldots\ldots=0$$

अथवा $$(F_1+F_2+\ldots\ldots)\,dR=0 \qquad (2\cdot24)$$

क्योंकि dR की किसी भी दिशा के लिये (2·24) सही है, अतः

$$F_1+F_2+\ldots\ldots=0$$

अथवा $$p_1+p_2+\ldots\ldots=\text{स्थिर}$$

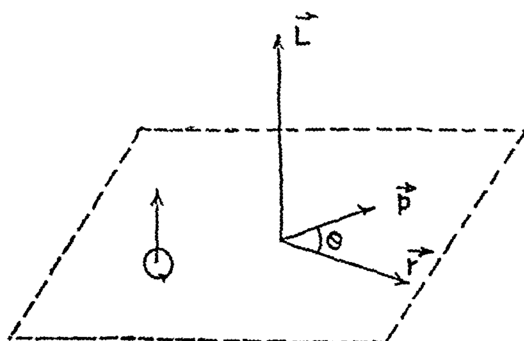
अतः दिक की समांगता के गुण के कारण तन्त्र पर लगने वाले सभी बलों का वेक्टर योग शून्य होता है। इस प्रकार संवेग के संरक्षण के नियम का मूल आधार दिक की समांगता ही है।]*

संवेग के संरक्षण का नियम चूँकि एक वेक्टर नियम है अतः यह नियम वास्तव में तीन घटकों में बँटता है :

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \Sigma p_x = \text{स्थिराङ्क} \\ P_y &= \Sigma p_y = \text{स्थिराङ्क} \\ P_z &= \Sigma p_z = \text{स्थिराङ्क} \end{aligned}\right\} \quad \ldots(2{\cdot}25)$$

2·6. कोंणीय संवेग के संरक्षण का नियम (Law of Conservation of Anguler momentum)

किसी भी वन्द तंत्र (अर्थात् वाह्य वल क्षेत्र=0) के लिये उर्जा व संवेग

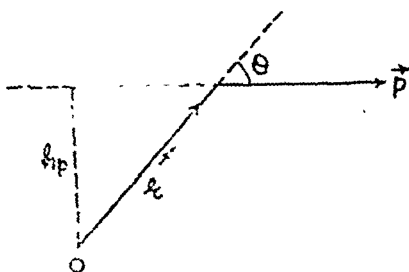


चित्र—2.5

के संरक्षण के अतिरिक्त एक और वेक्टर राशि संरक्षित होती है, यह कोंणीय संवेग के संरक्षण के सम्बन्ध में है। कोणीय संवेग की परिभाषा के लिये माना कोई कण p संवेग से गति कर रहा है (चित्र 2·6) तथा इसकी स्थिति किसी विन्दु O के सापेक्ष r से प्रदर्शित की जाये तो कण का कोंणीय सवेग L विन्दु O के सापेक्ष एक वेक्टर है जिसका परिमाण

$L = rp \sin\theta$ होगा ...(2.26)

तथा जिसकी दिशा p तथा r के धरातल के लम्बवत होगी। L की संभव दो दिशाओं, अर्थात् ऊपर या नीचे, में से कौनसी दिशा L को प्रदर्शित करेगी यह वेक्टर गुणन के दक्षिणवर्ती पेच नियम से दी जाती है। यह चित्र (2·5) से स्पष्ट है



चित्र—2·6

अतः परिभाषा से

$$L = r \times p = r \times mv \quad \ldots(2{\cdot}27)$$

समीकरण (2·26) से कोंणीय सवेग का परिमाण

$$L = r \sin \theta \; p$$
$$= hp$$

= O से सवेग की दिशा मे खीचा गया लम्ब × सवेग

= सवेग का O के परित: आघूर्ण

अत: किसी कण का विन्दु O के परित. कोणीय सवेग का परिमाण संवेग का O के परित: आघूर्ण के बराबर होता है। h को प्राय· सवेग की O के परित. घूर्ण भुजा (Moment arm) कहते है।

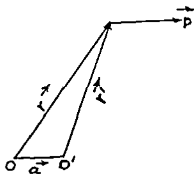
कणों के किसी तन्त्र का सम्पूर्ण कोणीय सवेग L उसके भिन्न-भिन्न कणो के कोणीय सवेग के वेक्टर योग के बराबर होता है।

$$L = r_1 \times p_1 + r_2 \times p_2 + \ldots\ldots$$
$$= L_1 + L_2 + \ldots\ldots \qquad (2\cdot28)$$

कोंणीय सवेग के सरक्षण के नियमानुसार बन्द तन्त्र का सम्पूर्ण कोणीय संवेग का मान समय के साथ अपरिवर्तित रहता है :

$$L_1 + L_2 + \ldots\ldots = \text{स्थिर} \qquad \cdots(2\cdot29)$$

$L = r \times p$ में r कण की किसी विन्दु O के सापेक्ष स्थिति बतलाता है। यदि हम कण की स्थिति O के सापेक्ष के बजाय किसी अन्य विन्दु O′ के सापेक्ष बतायें तो स्पष्ट है कि कण का कोंणीय संवेग का मान कोई दूसरा होगा। महत्वपूर्ण बात यह है कि कोणीय सवेग की परिभाषा की इस अस्पष्टता (अर्थात् कोणीय सवेग किस विन्दु के परित:, O के या O′ के ?) का कोंणीय संवेग के संरक्षण के नियम पर कोई प्रतिकूल प्रभाव नही होता अर्थात सम्पूर्ण कोणीय संवेग सदैव सरक्षित रहता है (चाहे यह O के परित: हो अथवा O′ के)। इसके स्पष्टीकरण के लिये चित्र (2·7) देखें



चित्र—2 7

चित्र से स्पष्ट है :

$$L' = r' \times p = (r + a) \times p$$
$$= r \times p + a \times p$$
$$= L + a \times p \qquad \text{(एक कण के लिये)}$$

$\therefore \quad L' - L = a \times p_1 + a \times p_2 + \ldots$

$= a \times (p_1 + p_2 + \ldots)$ (पूरे तन्त्र के लिये)

परन्तु किसी भी वन्द तन्त्र के लिये

$p_1 + p_2 + \ldots\ldots =$ स्थिर

अत: $L' = L +$ एक स्थिर राशि

अर्थात् कोंणीय संवेग यदि O के परित: संरक्षित हो तो किसी अन्य विन्दु O′ के परित: भी संरक्षित रहेगा। अत. हमारा निष्कर्प कि किसी भी वन्द तन्त्र के लिये कोंणीय संवेग संरक्षित रहेगा, एक सार्वभौम सत्य (Universal truth) है। किसी तन्त्र का कोंणीय संवेग साधारणतया तन्त्र के द्रव्यमान केन्द्र के परित: परिमापित होता है।

कोंणीय संवेग तथा वल आघूर्ण में सम्वन्ध :—

हम जानते हैं : $L = r \times p$

अत: $$\frac{dL}{dt} = r \times \frac{dp}{dt} + \frac{dr}{dt} \times p$$

परन्तु $$\frac{dp}{dt} = F \text{ (न्यूनटन के द्वितीय नियमानुसार)}$$

तथा $$\frac{dr}{dt} = v$$

अत: $$\frac{dL}{dt} = r \times F + v \times mv$$

परन्तु वेक्टरों के वज्र गुणन नियम से $v \times mv = 0$

अत: $$\frac{dL}{dt} = r \times F$$

$r \times F$ को विन्दु O के सापेक्ष वल आघूर्ण (Troque) कहते हैं। इसे K से प्रदर्शित करते है।

अत: $$\frac{dL}{dt} = K \quad \ldots(2{\cdot}30)$$

अर्थात् कोंणीय संवेग के परिवर्तन की दर = वल आघूर्ण

चूंकि वन्दतंत्र के लिये $L_1 + L_2 + \ldots\ldots =$ स्थिर

अत: $$\frac{dL_1}{dt} + \frac{dL_2}{dt} + \ldots\ldots = 0$$

अथवा $$K_1 + K_2 + \ldots\ldots = 0$$

अत: किसी भी वन्द तंत्र में वल आघूर्णों का वेक्टर योग शून्य के वरावर होता है।

*[कोणिय सवेग के संरक्षण का नियम, सवेग के सरक्षण के नियम की तरह, दिक के एक विशेष मौलिक गुण का ही परिणाम है। किसी भी बन्द तन्त्र के गुण दिक की प्रत्येक दिशा मे समान है। अर्थात् दिक की सभी दिशायें किसी भी बन्द तंत्र के सापेक्ष समतुल्य है अर्थात् दिक समदैशिक (Isotropic) है। अतः किसी बन्द तंत्र को अति सूक्ष्म कोण $d\phi$ से घुमाने पर बल आघूर्ण द्वारा किया गया कार्य शून्य के बराबर होना चाहिये, क्योकि तन्त्र के गुण सभी दिशाओ मे समान होते है अतः तंत्र की स्थितिज उर्जा भी अपरिवर्तित रहनी चाहिये।

दूसरे शब्दो मे किसी अक्ष Z के परितः घूर्णन में स्थितिज उर्जा अपरिवर्तित रहती है।

$$\frac{dU}{d\phi}=0$$

परन्तु यह हम अगले अध्याय मे देखेंगे कि $-\frac{dU}{d\phi}=K_z$

अतः दिक की समदैशिकता के परिणाम स्वरूप

$$K_{1z}+K_{2z}+\ ..\ .=0$$

या $$L_{1z}+L_{3z}+\ ..\ =\text{स्थिर}$$

अतः कोणीय सवेग के सरक्षण के नियम का आधार दिक की बन्द तन्त्र के सापेक्ष (किसी जडत्वीय निर्देश तन्त्र मे) समदैशिकता (Isotropy) में है। अध्याय 4 मे हम देखेंगे कि वस्तु का कोणीय सवेग बाह्य बल आघूर्ण की अनुपस्थिति मे सदैव स्थिर रहता है अर्थात् $I\Omega=$ स्थिर जहां पर $I=$ वस्तु का जडत्व आघूर्ण

$\Omega=$ वस्तु का कोणीय वेग]*

उदाहरण : 2·1 एक वस्तु किसी समान सहति वाली दूसरी वस्तु से टक्कर करती है। यह दूसरी वस्तु शुरू में विरामावस्था मे थी। यदि टक्कर मे दोनो वस्तुओ की आन्तरिक ऊर्जा अपरिवर्तित रहे, अर्थात् टक्कर पूर्ण प्रत्यास्थ (Elastic) हो तो सिद्ध करो कि दोनो वस्तु टक्कर के बाद एक दूसरे मे 90° का कोण बनाती हुई अलग होगी।

ऊर्जा के सरक्षण के नियम से

$$(K_1+U_1)+(K_2+U_2)=(K_1'+U_1')+(K_2'+U_2')$$

जहां पर $K=$ गतिज ऊर्जा

$U=$ स्थितिज ऊर्जा (आन्तरिक ऊर्जा)

चूंकि टक्कर प्रत्यास्थ है अतः आन्तरिक ऊर्जा अपरिवर्तित रहती है :

अतः $U_1=U_1'$

$U_2=U_2'$

इसलिये $\quad K_1 + K_2 = K_1' + K_2'$

प्रश्नानुसार प्रारम्भ में दूसरा गोला विरामावस्था में है।

$\therefore \quad K_1 + 0 = L_1' + K_2'$

या $\quad \frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} mv'^2_1 + \frac{1}{2} mv_2'^2$

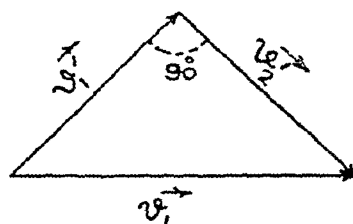
या $\quad v_1^2 = v_2'^3 + v_2'^2$ ...(A)

संवेग संरक्षण के नियम से

$$mv_1 = mv_1' + mv_2'$$

या $\quad v_1 = v_1' + v_2'$ ....(B)

अतः v_1, v_1', v_2' एक त्रिभुज बनाते हैं, जिसमें (A) के द्वारा $v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$, अतः समकोण त्रिभुज की पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार, स्पष्ट हो v_1' व v_2' के मध्य का कोंण 90° होगा, जैसा कि चित्र (2·8) में दिखाया गया है।



चित्र—2·8

उदाहरण 2·2 दो पिण्डों की सीधी टक्कर (Head on Cellision)

m_1 संहति की एक गेंद m_2 संहति की एक स्थिर गेंद से टक्कर करती है। टक्कर के बाद दूसरी गेंद उसी दिशा के अनुदिश चलती है, जिस दिशा में कि टक्टर से पहले पहली गेंद आ रही थीं अर्थात् दोनों गेंद सीधी टक्कर करती हैं। टक्कर के बाद दोनों गेंदों के वेग निकालो। टक्कर पूर्ण प्रत्यास्थ है। m_1 गेंद का प्रारम्भिक वेग u_1 है।

संवेग के संरक्षण के नियमानुसार

$$m_1u_1 + 0 = m_1v_1 + m_2v_2 \quad ....(A)$$

चूंकि टक्कर सीधी है, अतः u_1, v_1, v_2 एक ही रेखा के अनुदिश है, अतः समीकरण (A) में संवेगों का केवल परिमाण ही लिया जा सकता है।

$$m_1u_1 = m_1v_1 + m_2v_2 \quad ...(B)$$

ऊर्जा के संरक्षण के नियम से

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

अथवा $(u_1^2 - v_1^2) = \frac{m_2}{m_1} v_2^2$ ...(C)

तथा समीकरण (B) से

$$m_1(u_1 - v_1) = m_2v_2$$

$$u_1 - v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2 \quad ...(D)$$

समीकरण (C) में D का भाग देने पर

$$\frac{u_1^2-v_1^2}{u_1-v_1}=\frac{v_2^2}{v_2}$$

या $$u_1+v_1=v_2 \quad ...(E)$$

समीकरण (D) तथा (E) को जोड़ने पर

$$2u_1=\left(\frac{1+m_2}{m_1}\right)v_2=\frac{m_1+m_2}{m_1}v_2$$

∴ $$v_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1$$

अतः (E) से $$v_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1 \quad ...(F)$$

प्रथम स्थिति : (एक भारी गेंद की हल्की गेंद से टक्कर)

यदि $m_1>>m_2$ अर्थात् m_2 नगण्य है (m_1 के सापेक्ष) तो (F) में $v_2=2u_1$; $v_1=u_1$

अर्थात् भारी गेंद का वेग अपरिवर्तित रहता है, तथा हल्की गेंद जो कि टक्कर से पहले स्थिर थी अब भारी गेंद के दुगने वेग से चलेगी। ऊर्जा का विनिमय (Exchange) शून्य है।

द्वितीय स्थिति : यदि $m_1<<m_2$ अर्थात् एक हल्की गेंद एक भारी स्थिर गेंद से टकराती है। m_1 को नगण्य मानकर, (F, से हमें निम्न वेगों के मान प्राप्त होंगे : $v_2=O$; $v_1=-u_1$

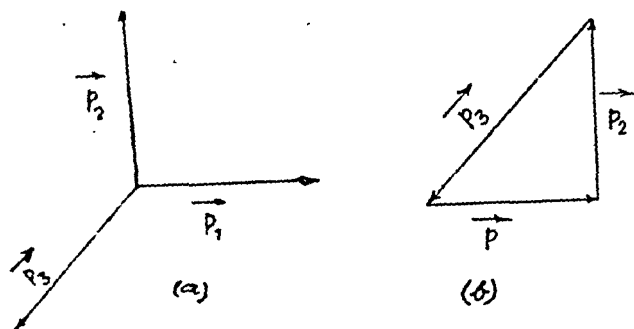
अर्थात् भारी गेंद अविचलित रहती है, हल्की गेंद भारी गेंद से टक्कर खाकर उसी वेग से परन्तु विपरीत दिशा में वापिस आ जाती है। स्पष्ट ही ऊर्जा का विनिमय शून्य है।

तृतीय स्थिति : यदि $m_1=m_2$ तो $v_1=O$, $v_2=u_1$ अर्थात् टक्कर के बाद प्रथम गेंद तो स्थिर हो जाती है, परन्तु द्वितीय गेंद प्रथम गेंद के वेग से चलती है अर्थात् दोनों गेंदे अपने वेग आदान प्रदान (Exchange) करते हैं। इसमें ऊर्जा का विनिमय अधिकतम है।

उदाहरण 2 3 : विश्रान्त में रखा एक बर्तन अचानक विस्फोट से तीन भागों में टूट जाता है। दो समान संहति के भाग परस्पर लम्बवत दिशा में समान वेग 30 m/sec से दूर छिटक जाते हैं। तीसरे भाग की संहति शेष दो भागों से प्रत्येक से तीन गुनी है। विस्फोट के तुरन्त बाद इसके वेग का मान व दिशा क्या है।

संवेग के संरक्षण के नियम से

$$0=p_1+p_2+p_3$$



चित्र—2·9

अर्थात् p_1, p_2, p_3 को एक त्रिभुज की तीन भुजाओं द्वारा क्रम से प्रदर्शित कर सकते हैं। प्रश्नानुसार p_1 व p_2 परिमाण में तो बराबर हैं परन्तु एक दूसरे के लम्बवत है अतः समकोण त्रिभुज के गुण से

$$p_1^2+p_2^2=p_3^2$$

परन्तु $p_1^2=p_2^2$, अतः $2\,p_1^2=p_3^2$

$$2\times[M\,(30)]^2=p_3^2$$

$$1800\ M^2=[3\ MV]^2$$

$$\therefore\quad V^2=200$$

$$\therefore\quad V=10\sqrt{2}\ m/sec$$

अतः तीसरे भाग का वेग परिमाण में $10\sqrt{2}$ m/sec है, तथा दिशा जैसा कि चित्र से स्पष्ट है दोनों भागों से बराबर कोण पर जायेगा। इस कण की दिशा त्रिभुज के कर्ण के अनुदिश अर्थात $90+45=135°$ पर पहले दोनों कणों से छिटकेगा। उत्तर

उदाहरण 2·4 : 50 Kg का एक व्यक्ति नगण्य घर्षण वाले धरातल पर पड़ी 25 gm की एक गेंद में पैर से ठोकर लगाता है। यदि ठोकर लगने से गेंद 2 m/sec की चाल से भागे तो व्यक्ति का पीछे लौटने का वेग बताओ ?

संवेग के संरक्षण के नियम से, स्पष्ट है, व्यक्ति को उसी संवेग से पीछे लौटना चाहिये जिससे गेंद आगे जा रही है ताकि कुल संवेग प्रारम्भिक संवेग के मान के बराबर अर्थात् शून्य हो।

अर्थात् $$O=p_{man}+p_{ball}$$

या $$p_{man}=-p_{ball}$$

अथवा $$50\times10^3\ V=-25\times2\times10^2$$

$$\therefore\quad V=-\cdot1\ cm/sec$$

अतः मनुष्य 0·1 cm/sec के वेग से पीछे लौटेगा। उत्तर

उदाहरण 2·5 : यूरेनियम न्यूक्लियस (U^{238}) रेडियोधर्मी गुण के कारण एक α-कण $1{\cdot}404 \times 10^7$ m/sec की चाल से उत्सर्जित करता है। अवशेष न्यूक्लियस के लौटने का वेग निकालो ?

$$p_{residual\ nucleus} + p_{\alpha} = 0$$

$$\therefore \quad 234 \times V = -4 \times 1{\cdot}404 \times 10^7$$

$$\therefore \quad V = -2{\cdot}4 \times 10^5 \text{ m/sec}$$ उत्तर

उदाहरण 2·6 : एक न्यूट्रॉन जिसकी ऊर्जा 1 MeV है, एक प्रोटॉन के निकट इतनी दूरी पर गुजरता है कि उसका कोणीय संवेग लगभग 10^{-26} erg-sec है। न्यूट्रॉन की प्रोटॉन तक पहुँचने की निकटतम दूरी बताओ ? [न्यूट्रॉन तथा प्रोटॉन के मध्य अन्योन्य क्रिया नगण्य है] दिया है 1 MeV $= 1{\cdot}6 \times 10^{-6}$ ergs; न्यूट्रॉन की सहति $= 1{\cdot}6 \times 10^{-24}$ gms.

न्यूट्रॉन का कोणीय संवेग $= r \times mv$

$= b\, m\, v \sin 90$ (परिभाषा से)

mvb



चित्र—2·10

b को निकटतम पहुँचने की दूरी कहते हैं।

प्रश्नानुसार $mvb = 10^{-26}$

$$\therefore \quad b = \frac{10^{-26}}{mv} = \frac{10^{-26}}{\sqrt{2\,mE}}$$

क्योंकि $2mE = 2m \times \frac{1}{2} mv^2 = m^2v^2$

$$\therefore \quad mv = \sqrt{2\,mE}$$

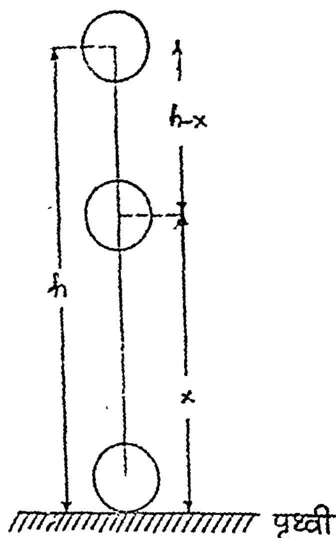
अतः $$b = \frac{10^{-26}}{\sqrt{2 \times 1{\cdot}6 \times 10^{-24} \times 1{\cdot}6 \times 10^{-6}}}$$

$$= \frac{10^{-26}}{10^{-15} \times 1{\cdot}6 \times \sqrt{2}}$$

$$=\frac{14 \cdot 14}{3 \cdot 2} \times 10^{-12}$$

$$=4 \times 10^{-12} \text{ cms} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 2·7 : सिद्ध करो कि गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र में यदि कोई वस्तु विरामावस्था से नीचे ऊर्ध्वाधार दिशा में गिर रही हो तो वस्तु की गतिज तथा स्थितिज ऊर्जा का योग स्थिर होता है।



हमें सिद्ध करना है कि गेंद की सम्पूर्ण ऊर्जा

$$E = K \cdot E + P \cdot E = \text{स्थिर}$$

यदि पृथ्वी की सतह पर स्थितिज ऊर्जा शून्य मानें तो

स्थिति A पर : गतिज ऊर्जा $= 0$,

स्थितिज ऊर्जा $= mgh$

$\therefore \quad E = O + mgh = mgh$

स्थिति B पर : $\frac{1}{2} mv^2 \frac{1}{2} m \times 2g(h-x)$

स्थितिज ऊर्जा $= mgx$

$\therefore$ सम्पूर्ण ऊर्जा $E = mgh - mgx + mgx$

$= mgh$

स्थिति C पर : गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \, 2gh = mgh$

स्थितिज ऊर्जा $= 0$

$\therefore$ सम्पूर्ण ऊर्जा $E = mgh$

अतः $$E_A = E_B = E_C$$

अर्थात $$K \cdot E + P \cdot E = \text{constt} = mgh$$

प्रश्न

(1) बल क्षेत्र, बन्द संस्थान की परिभाषा दो।

(2) सिद्ध करो कि किसी तंत्र पर क्षेत्र बलों द्वारा किया गया कार्य = तंत्र की गतिज ऊर्जा में वृद्धि।

(3) संरक्षी तथा असंरक्षी बलों की परिभाषा दो। प्रत्येक के तीन-तीन उदाहरण दो।

(4) सिद्ध करो कि सरक्षी बल क्षेत्र के लिये

K·E+P E.=स्थिरांक

(5) किसी बन्द तन्त्र के लिये संवेग के सरक्षण के सिद्धान्त की व्याख्या करो।

(6) सवेग के संरक्षण से दो पिण्डों की महति की तुलना कैसे करोगे, व्याख्या करो।

(7) गोला दागने वाली तोप को भारी क्यों बनाया जाता है।

(8) दिक की समागता तथा सवेग के सरक्षण के नियम आपस में बहुत अधिक सम्बन्धित हैं, व्याख्या करो।

(9) कोणीय सवेग के संरक्षण का नियम क्या है, इसकी वास्तविक उत्पत्ति प्रकृति के किस मौलिक गुण के कारण है।

(10) टक्कर किसे कहते हैं, क्या यह आवश्यक है कि टक्कर के लिये दो वस्तुऐं आपस में एक दूसरे को स्पर्श करें। पूर्ण प्रत्यास्थ तथा अप्रत्यास्थ टक्कर किसे कहते हैं।

(11) दो प्रोटोन जिनकी ऊर्जा (500 MeV) है, एक दूसरे के ओर आते हैं। प्रोटोन-प्रोटोन के मध्य अन्योन्य क्रिया केवल स्थिर वैद्युत बल के कारण ही है तथा इसका मान $\frac{e^2}{r}$ होता है। बताइये कि दोनो प्रोटोन कितने निकटतम आ सकते हैं।

दिया है तथा ध्यान रक्खें $1 \text{ MeV} = 1 \cdot 6 \times 10^{-6}$ ergs,

$e = 4 \cdot 8 \times 10^{-10}$ stat coulomb

Hint : ऊर्जा के सरक्षण के नियम से $1000 \times 1 \cdot 6 \times 10^{-6}$

$$= \frac{e^2}{r} = \frac{(4\ 8)^2 \times 10^{-20}}{r}$$

$\therefore \qquad r = 1\ 4 \times 10^{-16}$ cms] उत्तर

(12) (a) 1 Kg की संहति की पृथ्वी की सतह से 1 Km ऊँचाई पर स्थितिज ऊर्जा का मान बताओ? [पृथ्वी की सतह पर स्थितिज ऊर्जा को शून्य मानो।]

(b) पृथ्वी पर पहुँचने पर इस संहति की गतिज ऊर्जा क्या होगी (घर्षण नगण्य है)।

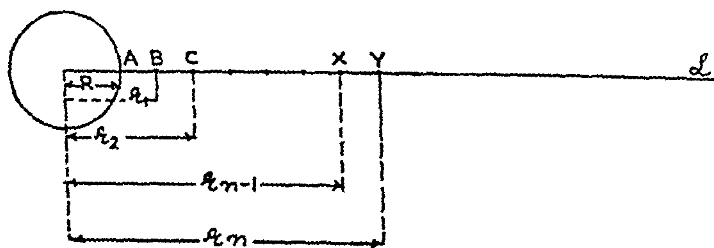
(c) ऊँचाई के ठीक मध्य मे K.E तथा P.E का मान कितना होगा। अतः ऊर्जा के सरक्षण नियम की व्याख्या करो?

उत्तर : (a) $9 \cdot 8 \times 10^{10}$ ergs
(b) $9 \cdot 8 \times 10^{10}$ ergs
(c) $4 \cdot 9 \times 10^{10}$ ergs P·E तथा
$4 \cdot 9 \times 10^{10}$ ergs K·E.

(13) दो प्रोटोन जिनके मध्य प्रारम्भिक दूरी 1 A° है ($1\ A^\circ = 10^{-8}$ cm) यदि उनको मुक्त कर दिया जाये तो वे दोनों एक दूसरे को प्रतिकर्षित करेंगे। जब ये दोनों प्रोटोन एक दूसरे से अनन्त दूरी पर हों तो उनका वेग निकालो। प्रोटोन की संहति $= 1 \cdot 67 \times 10^{-24}$ gms [उत्तर $v = 5 \times 10^6$ cm/sec]

(14) विस्फोट द्वारा एक चट्टान तीन टुकड़ों में विच्छिन्न हुई। दो टुकड़े जिनके द्रव्यमान क्रमशः 100 kg है परस्पर 90° का कोंण बनाते हुये 12 m/sec तथा 8 m/sec के वेग से दूर जा गिरे। यदि तीसरे टुकड़े की संहति 80 kg हो तो इसके वेग की परिमाण तथा दिशा बताओ ? [उत्तर 25 m/sec, 200 kg की दिशा से $90 + \tan^{-1} \frac{4}{3}$ का कोंण पर]

(15) m ग्राम की एक वस्तु को पृथ्वी की सतह से अनन्त दूरी तक ले जाने में आवश्यक कार्य की गणना करो ? M = पृथ्वी संहति, G = गुरुत्वाकर्षण नियतांक R = पृथ्वी की त्रिज्या।



Hint : $W_{A \to B}$ = m को A से B तक ले जाने में आवश्यक कार्य = औसत बल × AB

$$= \sqrt{F_A \times F_B}\,(r_1 - R) = \sqrt{\frac{G\,Mm}{R^2} \times \frac{G\,Mm}{r_1^2}}\,(r_1 - R)$$

$$= \frac{G\,Mm}{Rr_1}\,(r_1 - R) = \frac{G\,Mm}{R} - \frac{G\,Mm}{r_1}$$

ठीक इसी प्रकार $W_{B \to C} = \frac{G\,Mm}{r_1\,r_2}\,(r_2 - r_1)$

$$= \frac{G\ Mm}{r_1} - \frac{G\ Mm}{r_2}$$

$$W_{X \to Y} = \cdots\cdots\cdots = \frac{G\ Mm}{r_{n-1}} - \frac{G\ Mm}{r_n}$$

अतः $W_{A \to Y} = W_{A \to B} + W_{B \to C} + \cdots\cdots + W_{X \to Y}$

$$= \frac{G\ Mm}{R} - \frac{G\ Mm}{r_n}$$

$$W_{A \longrightarrow \infty} = \frac{G\ Mm}{R} - \frac{G\ Mm}{\infty} = \frac{G\ Mm}{R}$$ उत्तर

अतः कण की पृथ्वी की सतह A पर ऊर्जा+कण पर किया गया कार्य =कण की अनन्त पर ऊर्जा=0 (परिभाषा से)

$$\therefore \quad U(R) + \frac{G\ Mm}{R} = 0$$

$$\therefore \quad U(R) = -\frac{G\ Mm}{R}$$

अतः यहां पर इसकी पुष्टि होती है कि आकर्षण बल क्षेत्र में स्थितिज ऊर्जा ऋणात्मक होती है।

(16) कण की पृथ्वी के क्षेत्र से पलायन का वेग (*Escape velocity*) क्या होगी ?

उत्तर $V_{esc} = \sqrt{\frac{2\ GM}{R}}$

Hint : $\frac{1}{2} mv^2_{esc} + U = 0$

या $\frac{1}{2} mv^2_{esc} - \frac{G\ Mm}{R} = 0$

$$\therefore \quad v_{esc} = \sqrt{\frac{2\ GM}{R}}$$

3

सरल आवर्त्त दोलित्र
(Simple Harmonic Oscillotor)

3·1. स्थितिज उर्जा-वक्र तथा विभव क्षेत्र में कण की एक-विमीय गति (Potential Energy Diagram, one Dimensional Motion of Particle in A Potential field)

जब कोई कण किसी निश्चित बल क्षेत्र में गति करता है तो कण अपनी भिन्न भिन्न स्थिति में अपने समूह के अन्य कणों से भिन्न भिन्न प्रकार से पारस्परिक क्रिया (Interact) करेगा अर्थात् किसी दिये हुये बल क्षेत्र में कण की स्थिति बदलने से उसकी स्थितिज ऊर्जा बदलती है। इस सम्बन्ध को प्रदर्शित करने वाले ग्राफ को उस कण का स्थितिज ऊर्जा वक्र (Potential energy diagram) कहते है। माना कण की किसी स्थिति r के लिये स्थितिज ऊर्जा U (r) है तो U (r) तथा r का सम्बन्ध प्रदर्शित करने वाले ग्राफ को ही स्थितिज ऊर्जा वक्र कहेंगे। माना कि कण एक निश्चित वक्र के अनुदिश गति कर रहा है, इस प्रकार से गति करते हुये कण की स्थिति बताने के लिये केवल एक निर्देशांक (Coordinate) ही चाहिये,, माना कि यह निर्देशांक x है। स्पष्ट है, कण की स्थितिज ऊर्जा केवल कण की x स्थिति में परिवर्तन से ही बदलती है,

अतः $$U=U\ (x) \qquad (\ldots 3 \cdot 1)$$

ऊर्जा के संरक्षण के सिद्धान्त से कण की सम्पूर्ण ऊर्जा

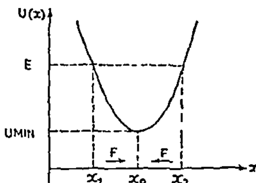
$$E=\frac{1}{2}\ mv^2+U\ (x)=\text{स्थिराङ्क}$$

तथा $\frac{1}{2}mv^2$ का मान सदैव धनात्मक है, अतः U का मान सदैव E से कम होगा। दूसरे शब्दों में $U \leqslant E$ ...(3·2)

समीकरण (3·2) से यह स्पष्ट है कि गति करता हुआ कोई कण जिसकी सम्पूर्ण ऊर्जा E है, केवल उन्ही बिन्दुओं पर पाया जा सकता है जहां कि U का मान E से कम है। वो स्थान जिनमें U का मान E से अधिक है, उन स्थानो मे E ऊर्जा वाले कण का पाया जाना असम्भव है। जिन बिन्दुओ पर U का मान E से अधिक होता है, कण के लिये वर्जित क्षेत्र (Forbidden region) कहलाते है। जिन बिन्दुओं पर $U(x) = E$ ...(3·3)

अर्थात् जहां पर सम्पूर्ण ऊर्जा E स्थितिज ऊर्जा के बराबर है, अथवा कण की गतिज ऊर्जा (अतः कण का वेग) शून्य है, अर्थात् जहां पर गति करता हुआ कण रुक जाये, ये बिन्दु कण के गति करने के मार्ग के वर्तन बिन्दु (Turning points) कहलाते हैं। कण इन बिन्दुओ से आगे नही जा सकता।

उदाहरणार्थ यदि हम E ऊर्जा वाले कण की गति एक ऐसे बल क्षेत्र मे, जिसका स्थितिज ऊर्जा वक्र चित्र 3·1 में दिखाया गया है, कल्पना करें, इस कण की



चित्र—3·1

गति की सीमाएँ (Boundaries of motion) बताने के लिये एक रेखा U = E x-अक्ष के समानान्तर खींचे, तो x_1 तथा x_2 ऐसे दो बिन्दु है जहां पर यह रेखा U-वक्र को काटती है, स्पष्ट है x_1 तथा x_2 कण की गति की सीमाएँ कहलायेगी। अतः कोई कण जिसकी कुल ऊर्जा E है वह x_1 के बायी ओर तथा x_2 के दायी ओर गति नही कर सकता। इसकी गति केवल x_1 तथा x_2 के मध्य ही सम्भव है। जब कोई कण केवल निश्चित स्थान मे ही गति कर सकता है तो कण की इस गति को परिमित गति (Finite motion) कहते है, यदि कोई कण किसी भी दूरी तक गति कर सकता है तो कण की इस गति को अपरिमित गति (Infinite motion) कहते हैं।

स्पष्ट है कि कण की गति परिमित है अथवा अपरिमित, यह इस पर निर्भर करता है कि कण की ऊर्जा E का मान कितना है। चित्र 3·1 में यदि कण की ऊर्जा का मान E से कम हो जाय तो कण की गति करने का क्षेत्र भी कम हो जायेगा। यदि कण की ऊर्जा

$$E = U_{min} \tag{3·4}$$

तो कण का गति करने का क्षेत्र केवल एक विन्दु x_0 मात्र रह रहेगा। अतः x_0 कण की स्थिर अवस्था कहलायेगी।

चित्र 3·1 में x_1 तथा x_2 विन्दु पर कण की गतिज ऊर्जा शून्य है, अर्थात् इन विन्दुओं पर कण का वेग शून्य है, जैसे-जैसे कण x_1 से दायीं ओर गति करता है कण की गतिज ऊर्जा अतः वेग बढ़ता है। विन्दु x_0 पर जहाँ पर कि कण की स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम है, वहाँ पर कण की गतिज ऊर्जा अधिकतम है, अतः कण x_0 विन्दु पर अधिकतम वेग से चलता है। जैसे ही कण x_0 से x_2 की तरफ गति करता है, कण का वेग घटेगा चूंकि स्थितिज ऊर्जा का मान बढ़ता है। x_2 विन्दु पर कण की गति शून्य हो जाती है तथा कण पर लगने वाले बल के कारण उसकी गति विपरीत (Reverse) हो जाती है।

चूंकि
$$F = -\frac{dU}{dx} \tag{3·5}$$

अतः कण की x_0 तथा x_2 के मध्य की गति के लिये जहाँ पर कि dU तथा dx एक ही चिन्ह के हैं अर्थात् $\frac{dU}{dx}$ धनात्मक है, अतः

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = \text{ऋणात्मक}$$

अर्थात् कण पर बल x के घटने की दिशा में लगेगा। अतः कण जब x_0 स्थिति मे x_2 की तरफ गति करता है तो उस पर एक बल F कार्य करेगा जो कि कण को x_0 की ओर लाने का प्रयत्न करेगा। इसके विपरीत यदि कण x_0 से x_1 की की तरफ गति करता है तो x के घटने से U बढ़ता है अर्थात् dU धनात्मक है, dx ऋणात्मक है, अतः $\frac{dU}{dx}$ ऋणात्मक है, इसलिये x_0 से x_1 की तरफ गति करते हुये कण पर बल

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = \text{धनात्मक}$$

अतः x के बढ़ने की दिशा में ही बल लगेगा। यदि कोई कण जिसकी सम्पूर्ण ऊर्जा E है x_1 से गति करना प्रारम्भ करे, तो उसकी गति x_1 से x_0 की तरफ बल

F के अन्तर्गत होती है। यह बल कण में वेग वृद्धि उत्पन्न करता है, अत. कण का वेग निरन्तर बढ़ता जाता है जिसका अधिकतम मान x_0 पर होता है. जैसे ही कण x_0 से आगे x_2 की तरफ बढ़ता है तो उस पर बल F अब x के घटने की दिशा मे लगता है, अतः कण का वेग ह्रास होता है। बिन्दु x_2 पर कण का वेग शून्य होता है तथा यह बिन्दु कण के गति के मार्ग का वर्तन बिन्दु (Turning point) होता है, कण बल F के अन्तर्गत विपरीत गति पुनः x_1 तक करता है। स्पष्ट है कण की गति एक निश्चित समय के बाद बारबार होती है, इस प्रकार की गति को आवर्ती गति Periodic motion) कहते हैं।

बिन्दु x_0 पर U न्यूनतम है, अतः

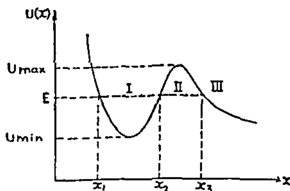
$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_0}=0 \qquad ...(3\cdot6)$$

अतः $x=x_0$ पर कण पर लगने वाला बल शून्य है। $x=x_0$ पर कण सन्तुलन अवस्था मे है (∵ $F(x_0)=0$) । यह सन्तुलन स्थायी (Stable) है क्योंकि कण के x_0 से x_2 की तरफ के अति सूक्ष्म विस्थापन से कण पर बल x_0 की तरफ कार्य करेगा, तथा कण का x_0 से x_1 की तरफ का विस्थापन कण पर बल F उत्पन्न करेगा जो कि कण को पुनः x_1 की तरफ लाने का प्रयत्न करेगा। ऐसे बल जो कण को पुनः उसकी प्रारम्भिक स्थिति की तरफ लाने का प्रयत्न करते हैं, प्रत्यानयन बल (Restoring forces) कहते हैं।

3·1 विभवकूप एवम् विभव-प्राचीर (Potential Well Potential Barrier)

माना कि कोई कण ऐसे विभव क्षेत्र मे गति कर रहा है जिसका स्थितिज उर्जा वक्र (चित्र 3·2) में दिखाया गया है।

चित्र से स्पष्ट है कि कण जिसकी सम्पूर्ण उर्जा E है केवल x_1 तथा x_2 के



चित्र 3.2

मध्य (Region I) तथा x_3 के दायीं ओर ही (Region III) में गति कर सकता है, क्योंकि इन दोनों क्षेत्रों में ही U का मान E से कम है। क्षेत्र I में कण की गति आवर्ती है तथा बिन्दु x_1 व x_2 इसकी गति की सीमाएँ हैं। यदि कण की ऊर्जा E का मान U_{max} से कम है तो कण कभी भी क्षेत्र I से बाहर नहीं आ सकता क्षेत्र I को कण के लिये जिसकी ऊर्जा E का मान U_{max} से कम है विभव कूप (Potential Well) कहते हैं। स्पष्ट है यदि कण की ऊर्जा E का मान यदि U_{max} से अधिक है, ऐसा कण विभव कूप से बाहर आ जायेगा तथा इसकी गति परिमित न होकर अपरिमित होगी। यह पहले कह चुके हैं कि विभव कूप में कण की गति आवर्ती (Periodic) होती है।

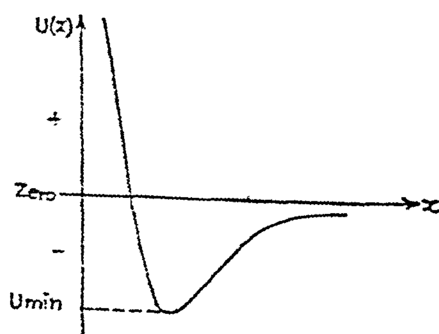
क्षेत्र III में E ऊर्जा का कण x_3 से आगे अपरिमित गति करता है। इसका कारण यह है कि कण की स्थितिज ऊर्जा x_3 से आगे निरन्तर घटती जा रही है तथा गतिज ऊर्जा बढ़ती जा रही है। अनन्त दूरी पर कण की स्थितिज ऊर्जा यदि शून्य मानी जाये तो ऊर्जा के संरक्षण के सिद्धान्त से

$$\frac{1}{2}mv^2_{\infty}+O=E; \quad \therefore v_{\infty}=\sqrt{\frac{2E}{m}}$$

जहाँ पर v_{∞} कण का अनन्त पर वेग है। यदि कण क्षेत्र III में यदि अनन्त से आता है तो उसका वेग घटता चलता है तथा स्थितिज ऊर्जा बढ़ती जाती है। $x=x_3$ पर कण की सम्पूर्ण ऊर्जा E=U है अतः x_3 पर कण का वेग शून्य है तथा कण उस बिन्दु से वापिस गति करता है। यह कण क्षेत्र III से क्षेत्र I में प्रवेश नहीं कर सकता, क्योंकि कण को ऐसे क्षेत्र II को पार करना है जहाँ पर U का मान E से अधिक है। यह क्षेत्र II (जो कि x_2 तथा x_3 के मध्य है) कण को न तो क्षेत्र I से III तक आने देता है और न ही कण को क्षेत्र III से क्षेत्र I में आने देता है, विभव प्राचीर (Potential Barrier) कहलाता है।

स्पष्ट है, यदि कण की ऊर्जा E का मान बढ़ जाये तो विभव प्राचीर की चौड़ाई (Width) कम हो जायेगी। E का मान Umax से अधिक होने पर कण के लिये न तो कोई विभव प्राचीर है और न ही कोई विभव कूप।

(चित्र 3·3) में कण की गति परिमित है यदि कण की ऊर्जा E का मान शून्य से कम है अर्थात् ऋणात्मक है। क्योंकि कण की गति परिमित



चित्र 3·3

आवर्ती होगी यदि $U_{min}<E<O$

कण की गति अपरिमित (Infinite motion) होगी यदि कण की उर्जा E शून्य से अधिक है अर्थात् धनात्मक है।

3·3. सरल आवर्त गति

हम देख चुके हैं कि विभव कूप में कण की गति आवर्ती होती है। आवर्ती गति (Periodic motion) से हमारा अभिप्राय यह है कि कण अपनी गति को निश्चित अन्तराल (Interval) बाद दुहराता है। माना कि T वह न्यूनतम अन्तराल है जिसके पश्चात वह अपनी गति को दुहराता है, इस अन्तराल को कण का आवर्तकाल (Periodic time) कहते हैं। यदि किसी क्षण t पर कण का जो वेग, स्थिति, वेग वृद्धि है ठीक वही t+T समय पर भी होगी। आवर्तकाल का व्युत्क्रम (reciprocal) आवृति ν कहलाता है। अर्थात्

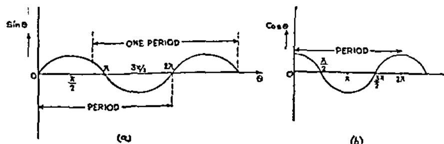
$$\nu=\frac{1}{T} \qquad ....(3·7)$$

आवृति का तात्पर्य यह है कि कण 1 sec में कितने बार अपनी गति दुहराता है। आवृति की इकाई हर्ट्ज (Hertz) है, इसे Hz से प्रदर्शित करते हैं :

$$1 \text{ Hz}=1 \text{ sec}^{-1}$$

आवर्त गतियाँ अनेकों प्रकार की हो सकती हैं जैसा कि भाग 2 में प्रत्यावर्त्ती धारा के अध्याय में चित्र में दिखाया गया है। सबसे सरल आवर्तीफलन (Periodic-function) किसी कोण की ज्या तथा कोज्या हैं। कोण की ज्या तथा कोज्या का आवर्तनांक (Period) 2π है, अर्थात्

$$\sin\theta=\sin(\theta+2\pi)$$
$$\cos\theta=\cos(\theta+2\pi)$$



चित्र—3·4

यह चित्र (3·4) से स्पष्ट है।

यदि किसी कण की स्थिति x में समय के सापेक्ष परिवर्तन

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad \ldots(3\cdot8)$$

के अनुसार व्यक्त किया जा सके तो कण की इस प्रकार की गति सरल आवर्त गति (Simple harmonic motion) कहते है।

यदि कण का आवर्तकाल T है तो कण की स्थिति t+T पर वही होगी जो कि t पर थी, अर्थात्

$$\cos(\omega t + \alpha) \equiv \cos[\omega(t+T) + \alpha]$$
$$\equiv \cos[\omega t + \alpha + \omega T]$$

चूंकि cos θ का आवर्तनाङ्क (Period) 2π है, अतः

$$\omega T = 2\pi$$

$$\text{or } T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \ldots(3\cdot9)$$

समीकरण 3·9 में A कण का आयाम तथा ω कण की कोंणीय आवृति (Circular frequency) कहलाती है। समीकरण 3·9 से स्पष्ट है।

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{अतः} \quad \omega = 2\pi\nu \qquad \ldots(3\cdot10)$$

समीकरण 3·8 में Cosine का कोणंक (Argument) $\omega t + \alpha$ को कण के दोलन की कला (Phase) कहते हैं। α को प्रारम्भिक कला कहते हैं।

समीकरण 3·8 से कण के वेग के लिये

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \alpha)$$

$$= A\omega \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \ldots(3\cdot11)$$

अतः समीकरण 3·11 से स्पष्ट है कि सरल आवर्त गति में कण के विस्थापन x तथा कण के वेग v में $\frac{\pi}{2}$ का कलान्तर (Phase difference) है।

यह जानने के लिये कि किस प्रकार के बल के अन्तर्गत कोई कण सरल आवर्त गति करेगा, हम कण की वेग वृद्धि a निकालेंगे :

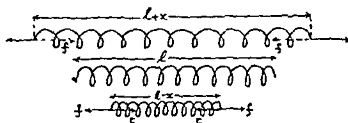
$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x$$

अत: कण पर लगने वाला बल

$$F = ma = -m\omega^2 x \qquad ...(3\cdot12)$$

अर्थात् यदि किसी कण पर लगने वाला बल कण के विस्थापन के समानुपाती हो तथा विपरीत दिशा में कार्य करे तो इस प्रकार के बल के अन्तर्गत कण की गति सरल आवर्त गति होगी।

उदाहरण : चित्र 3 5 में स्प्रिंग को खींचा या दबाया गया है। बाह्य बल F कमानी की लम्बाई को l से l+x या l−x कर देते है, फलस्वरूप कमानी में आन्तरिक बल f विपरीत दिशा में उत्पन्न हो जाते है, जो कि कमानी को उसकी



चित्र—3·5

पूर्वावस्था में लाने की कोशिश करते हैं। आन्तरिक बल f कमानी का खिचाव x के समानुपाती होते हैं :

$$f \propto -x$$

$$f = -k\,x \qquad ....(3\cdot13)$$

जहां पर k एक नियतांक है जिसे कमानी का स्प्रिंग नियतांक (*Spring Constant*) या बल नियतांक (Force Constant) कहते हैं। चूँकि f विस्थापन x के समानुपाती है, अत: कमानी के दोलन सरल आवर्ती होंगे। समीकरण (3·12) से तुलना करने पर :

$$k = m\omega^2$$

अथवा
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad ....(3\cdot14)$$

अत:
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

अल्प आयाम के दोलन (Small Oscillations) सदैव सरल आवर्ती होते हैं :—

जब किसी कण को जो कि $x=0$ पर स्थायी सतुलन में है, यदि सतुलनावस्था से थोड़ा सा विस्थापित किया जाये, तो कण पर पर लगने वाला प्रत्यानयन

बल F (x) कण के विस्थापन x पर निर्भर करता है। सामान्यतया F (x) तथा x का सम्बन्ध एक वक्र से प्रदर्शित किया जा सकेगा, जो कि $x=0$ से गुजरेगा। यदि कण को इतनी थोड़ी दूरी से विस्थापित किया जाये कि इस दूरी के लिये वक्र को एक सीधी रेखा के तुल्य समझा जा सके अतः $F(x) \propto (-x)$ ....(3·15)

कण के इस प्रकार के अल्प आयाम के दोलन सदैव सरल आवर्ती होते हैं।

विशेषतायें : (Characterstics of S.H.M)

सरल आवर्त गति की निम्न दो विशेषताएँ हैं :

(a) सूत्र $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ से स्पष्ट है कि कण की आवृति केवल दोलन करने वाले तन्त्र (Oscillating system) के गुणों पर ही निर्भर करती है, आयाम पर नहीं। कण के भिन्न-भिन्न आयाम होने पर भी गति की आवृति वही होती है।

(b) गति का आयाम तन्त्र के गुणों पर निर्भर नहीं करता, यह केवल प्रारम्भिक विक्षोभ (Initial disturbance) पर ही निर्भर करती है जो कि तन्त्र को संतुलनावस्था से विस्थापित करता है।

3·4 सरल आवर्त दोलित्र का स्थितिज ऊर्जा वक्र (Potetial Energy Diagram of Simple Harmonic Oscillator)

सरल आवर्त गति के लिये

$F=-kx$ जहां $k=$बल नियतांक

हम जानते हैं

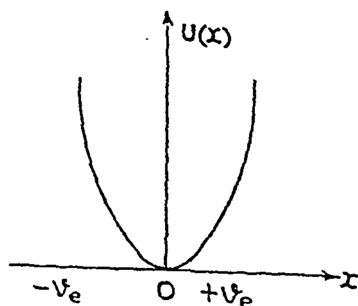
$$\frac{dU}{dx}=-F=kx$$

अतः $dU=kxdx$

$$\therefore \int dU=\int kxdx$$

$$\therefore U=\frac{kx^2}{2}+\text{Constant}$$

$$=\frac{kx^2}{2}+U_0$$



चित्र—3·6

यदि U_0 का मान $x=0$ पर शून्य लिया जाये तो

$$U=\tfrac{1}{2}kx^2 \qquad ...(3·16)$$

U तथा x का सम्बन्ध प्रदर्शित करने वाला ग्राफ चित्र 3·6 में दिखाया गया है।

कण जिसकी सम्पूर्ण ऊर्जा E है वह $-a$ तथा $+a$ के मध्य सरल आवर्त गति करेगा। a तथा $-a$ गति के वर्तन विन्दु कहलाते हैं। स्पष्ट है a गति का आयाम है।

3·5 सरल आवर्त गति करते हुए कण की सम्पूर्ण ऊर्जा

$$E = K.E + P.E$$
$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

v तथा x का मान समीकरण 3·11 तथा 3·8 से क्रमशः रखने पर तथा $k = m\omega^2$ रखने पर

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\alpha) + \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t+\alpha)$$

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \qquad ...(3\cdot17)$$

अर्थात् $$E \propto A^2 \qquad ...(3\cdot18)$$

अतः ऊर्जा आयाम के वर्ग के समानुपाती होती हैं।

चूंकि K.E का बदलना $\sin^2(\omega t+\alpha)$ के अनुसार है तथा P.E. का $\cos^2(\omega t+\alpha)$ के, अर्थात् जब K.E. बढ़ती है तो P.E. घटती है। अतः सरल आवर्त गति में कण की ऊर्जा का आवर्ती रूपान्तरण होता है—गतिज ऊर्जा से स्थितिज ऊर्जा तथा इसके विपरीत। एक दोलन काल के अन्दर गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा का औसतमान बराबर है तथा यह $\frac{E}{2}$ के बराबर है :

$$\langle K. \rangle = \langle P.E \rangle = \frac{E}{2} \qquad ....(3\cdot19)$$

जहाँ $\langle \rangle$ चिन्ह औसत मान प्रदर्शित करता है।

अतः $$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

अथवा $$v^2 + \frac{k}{m}x^2 = A^2\omega^2$$

$$v^2 = A^2\omega^2 - \frac{k}{m}x^2$$

$$v^2 = \omega^2(A^2 - x^2) \qquad \because \quad \frac{k}{m} = \omega^2$$

$\therefore$ $$v = \pm\sqrt{A^2 - x^2}$$

v का मान अधिकतम है यदि $x = 0$

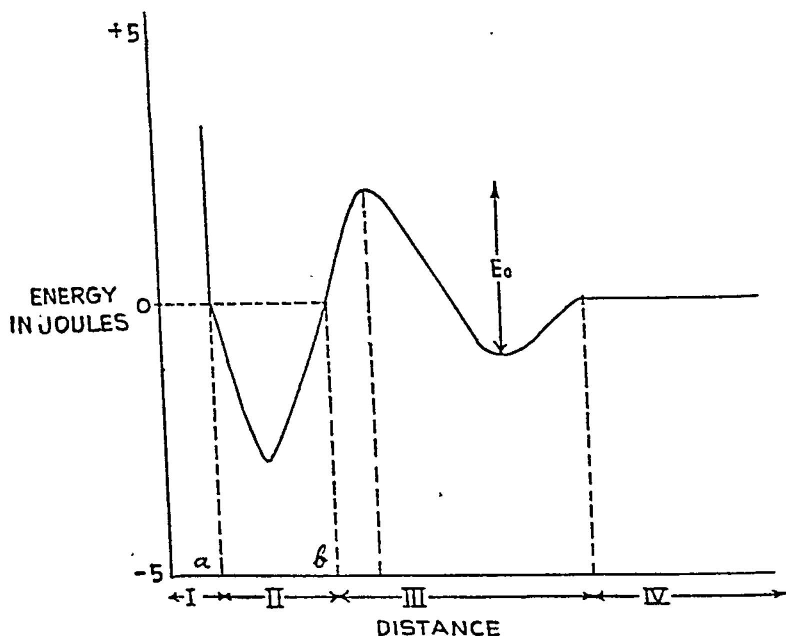
$\therefore$ $$v = \pm\omega A_{max}$$

उदाहरण 3·1 चित्र में दिया हुआ ग्राफ किसी कण की किसी निश्चित बिन्दु 0 से दूरी तथा कण की स्थितिज ऊर्जा प्रदर्शित करता है।

(a) —2 जूल कुल ऊर्जा का कण कौन से क्षेत्र में सम्भवतया पाया जा सकता है।

(b) एक कण जो कि क्षेत्र II में गति कर सकता है, परन्तु वह II क्षेत्र में कुछ समय से विरामावस्था में है। इस कण को क्षेत्र II से III तक ले जाने के लिये इस कण को दी जाने वाली आवश्यक ऊर्जा का क्या मान होगा। इसी कण को क्षेत्र IV तक ले जाने में इस कण को दी जाने वाली आवश्यक न्यूनतम ऊर्जा का मान भी बताओ।

(c) एक कण जिसकी कुल ऊर्जा शून्य है तथा वह क्षेत्र II में है। इस कण की क्षेत्र II में अधिकतम गतिज ऊर्जा का क्या मान होगा।



चित्र—3·7

उत्तर : (a) चूंकि कण की कुल ऊर्जा

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U$$

तथा गतिज ऊर्जा का मान सदैव धनात्मक, स्पष्ट ही, होना चाहिये। अतः कण केवल उसी क्षेत्र में गति कर सकता है जिसके लिये

$$U \leqslant E$$

प्रश्नानुसार चूंकि कण की ऊर्जा —2 Joules है, अतः कण केवल उसी क्षेत्र में गति कर सकता है जहां पर कि

या $U \leqslant -2$ Joules.

स्पष्ट ही यह क्षेत्र II है। अतः कण केवल II क्षेत्र में ही गति कर सकता है।

(b) कण को क्षेत्र II से क्षेत्र III तक ले जाना है। चूंकि कण क्षेत्र II में विरामावस्था में है अतः कण की स्थितिज ऊर्जा क्षेत्र II में न्यूनतम होनी चाहिये, अर्थात् कण की क्षेत्र II में ऊर्जा (ग्राफ से स्पष्ट है) -3 Joules है। कण को क्षेत्र III में ले जाने के लिये कण को एक ऐसे स्थान से गुजरना पड़ता है जहाँ पर कि स्थितिज ऊर्जा $+2$ Joules है। अत. कण की ऊर्जा -3 Joules से कमसे कम $+2$ Joules बढ़ानी चाहिये अर्थात् $2-(-3)=5$ Joules इसलिये कण को क्षेत्र II (विरामावस्था में) से III तक ले जाने के लिये आवश्यक ऊर्जा 5 Joules दी जानी चाहिये।

क्षेत्र IV में भी जाने के लिये कण को एक ऐसे स्थान से जाना पड़ता है जहाँ $U=+2$ Joules. अतः कण को दी जाने वाली आवश्यक ऊर्जा $-2(-3)=+5$ Joules.

(c) चूंकि कण की कुल ऊर्जा शून्य है तथा यह क्षेत्र II में गति कर रहा है। कण की गतिज ऊर्जा अधिकतम वहाँ होगी जहाँ कण की स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम है। क्षेत्र II में न्यूनतम स्थितिज ऊर्जा -3 Joules है, अतः ऊर्जा के संरक्षण नियम से अधिकतम गतिज ऊर्जा

$$=E-U_{min}$$
$$=0-(-3)=+3 \text{ Joules.}$$

इस क्षेत्र में कण आवर्ती गति करेगा। तथा इसके वर्तन बिन्दु (turning points) जहाँ पर

$$E=U$$

ग्राफ में ये बिन्दु क्रमशः a तथा b से दिखाये गये है।

उदाहरण : 3·2 सरल आवर्त गति करते हुये कण के विस्थापन, वेग, त्वरण के लिये व्यंजक के मान निकालो ?

सरल आवर्त गति करते हुये कण का विस्थापन

$x=A\cos(\omega t+\alpha)$ से दिया जाता है।

अतः कण का वेग

$$v=\frac{dx}{dt}=-A\omega\sin(\omega t+\alpha)$$
$$=\pm A\omega\sqrt{1-\cos^2(\omega t+\alpha)}$$

$$= \pm A\omega\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}} \qquad \left[\because \frac{x}{A}=\cos(\omega t+\alpha)\right]$$

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$$

$$\therefore \quad v_{max} = \pm\omega A \qquad [\because \quad x=0]$$

कण का त्वरण

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-A\omega \sin(\omega t+\alpha)\right]$$

$$= -A\omega^2 \cos(\omega t+\alpha)$$

$$= -\omega^2 x$$

— चिन्ह यह प्रदर्शित करता है कि त्वरण विपरीत दिशा में (विस्थापन) क्रियान्वित होता है।

$$a_{max} = -\omega^2 x_{max} = -\omega^2 A$$

अतः

$$x = x_0 \cos(\omega t+\alpha)$$

$$v = -x_0\omega \sin(\omega t+\alpha)$$

$$= x_0\omega \cos\left(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$$

$$a = -\omega^2 x$$

उदाहरण : 3·3 एक स्प्रिंग ·75 पाउन्ड बल से सन्तुलनावस्था से 3·0 इन्च खिंच जाती है। इसी स्प्रिंग को एक चिकनी क्षैतिज तल पर रखकर, इसके एक सिरे से 1·5 lb की संहति का कोई पिण्ड बांधकर, इसे सन्तुलनावस्था से 4·0 इन्च खींचा जाता है। पिण्ड को अब छोड़ दिया जाता है, तथा यह सरल आवर्त गति करता है।

(a) स्प्रिंग का बल नियतांक क्या है ?

(b) स्प्रिंग को छोड़ने से पूर्व स्प्रिंग पर लगने वाला बल

(c) सरल आवर्त गति का दोलन काल

(d) गति का आयाम

(e) दोलन करने वाली वस्तु का अधिकतम वेग

(f) दोलन करने वाली वस्तु का अधिकतम त्वरण

(g) $x=A/2$ पर कण का वेग, त्वरण, गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा

(h) दोलित्र की कुल ऊर्जा

उत्तर : (a) बल नियतांक $k=\left|\frac{F}{x}\right|$

$$=\frac{\cdot 75\times 32}{\cdot 25}\ \frac{\text{पाउन्डल}}{\text{फुट}}$$

$$=96 \text{ पाउन्डल प्रति फुट}$$

(b) स्प्रिंग पर लगने वाला बल $F=-k\ x$

$$=-96\times\frac{1}{3}=-32 \text{ पाउन्डल}$$

चूँकि $x=4$ इन्च $=\frac{1}{3}$ फुट

$\because\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ अतः $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$=2\pi\sqrt{\frac{1\cdot 5}{96}}=\frac{\pi}{4} \text{ sec}$$

अतः आवृत्ति $\nu=\frac{1}{T}=\frac{4}{\pi}$ Hz

कोणीय आवृत्ति $\omega=2\pi\ \nu=8\cdot 0$ rad/sec

(d) गति का आयाम अधिकतम विस्थापन के बराबर होता है। यह गति की प्रारम्भिक अवस्था से निर्धारित होता है। चूँकि प्रश्न में प्रारम्भिक अवस्था निम्न है :

$x=4$ inch, $v=0$

अतः गति का आयाम $=4$ inch $=\frac{1}{3}$ ft

अतः यह ध्यान रहे कि सरल आवर्त गति में गति का आयाम तन्त्र के गुणो पर निर्भर नही करता, यह केवल गति की प्रारम्भिक अवस्थाओं पर ही निर्भर करता है।

(e) $\because\quad v_{max}=\omega A=\frac{2\pi}{T}\ A=\frac{2\pi}{\pi/4}\times\frac{4}{12}=2\cdot 7$ ft/sec

(f) $a_{max}=\omega^2 A=\frac{k}{m}\ A=\frac{96}{1\cdot 5}\times\frac{1}{3}=21\cdot 3$ ft/sec^2

(g) पिण्ड को खींचकर छोड़ने के पश्चात् पिण्ड का वेग, त्वरण आदि जबकि पिण्ड ठीक $x=\frac{A}{2}$ स्थिति पर है :

$\therefore \quad v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$

$=-\omega\sqrt{A^2-x^2}$ (इस अवस्था में क्योंकि पिन्ड की x के बढ़ने की विपरीत स्थिति में हैं) ।

$=-8\sqrt{\frac{1}{9}-\frac{1}{36}} \quad \left[\because \; x=\frac{A}{2}=2 \text{ inch}=\frac{1}{6} \text{ ft.}\right]$

$=-\frac{8}{6}\sqrt{3}=\frac{-4}{\sqrt{3}}$ ft/sec

$a=-\omega^2 \; x=-\omega^2 \; \frac{A}{2}=-64\times\frac{1}{6}=-\frac{64}{6}$ ft/sec^2

दोलित्र की गतिज ऊर्जा $K{\cdot}E=\frac{1}{2} \; mv^2=\frac{1}{2}\times1{\cdot}5\times\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$

ft poundal=4 ft poundal.

दोलित्र की स्थितिज ऊर्जा $U=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}\times96\times\frac{1}{36}$

$=\frac{4}{3}$ ft poundal

(h) दोलित्र की कुल ऊर्जा :

$E=K.E.+P.E.=K+U$

$=4+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$ ft poundal

अथवा $\quad E=U_{max}=\frac{1}{2} \; kx^2_{max}=\frac{1}{2}\times96\times\frac{1}{9}$

$=\frac{16}{3}$ ft poundal

अथवा $\quad E=(K.E.)_{max}=\frac{1}{2} \; mv^2_{max}$

$\left[\because \quad x_{max}=A=\frac{1}{3} \text{ ft}\right]$

$=\frac{1}{2}\times1{\cdot}5\times \; \frac{64}{9}=\frac{16}{3}$ ft poundal

(*i*) विस्थापन की समीकरण

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$A = \frac{1}{3}\text{ ft}, \qquad \omega = 8\text{ rad/sec}$$

तथा ϕ के लिये निम्न प्रारम्भिक अवस्था दी है

$$x = \frac{1}{3}\text{ ft}, \qquad t = 0$$

अतः $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cos(0+\phi) \quad \therefore \cos\phi = 1$

$$\therefore \phi = 0$$

अतः $x = \frac{1}{3}\cos(8t+0)$ विस्थापन की समीकरण है

उदाहरण : 3·4 1 ग्राम का एक कण निम्न विभव क्षेत्र में गति कर रहा है $U(x) = 8\times10^5 x^2$ erg

यदि कण की कुल ऊर्जा 8×10^5 ergs है तो कण के विस्थापन की समीकरण लिखो।

$\because$ विभव क्षेत्र $U = \frac{1}{2}k\,x^2$ के रूप मे का है; अत. इस क्षेत्र मे कण की गति सरल आवर्ती होगी [चित्र 3·8]

दिया है $U = 8\times10^5\,x^2$

[. कण की संहति 1 gm]

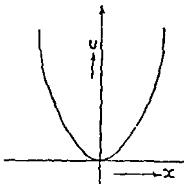
अतः तुलना करने पर $\frac{1}{2}k = 8\times10^5$

$[\therefore \; k = 16\times10^5$ dyres/cm$]$

$$\therefore \omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{16\times10^5}{10}$$

$$= 16\times10^4$$

$\therefore \omega = 4\times10^2$ rad/sec



चित्र—3·8

चूंकि $E = U_{max} = \frac{1}{2}k\,X^2_{max} = \frac{1}{2}k\,A^2$ (A = आयाम)

$$\therefore A^2 = 2\,\frac{E}{k} = \frac{2\times8\times10^5}{16\times10^5} = 1$$

$$A = 1\text{cm}$$

अतः विस्थापन की समीकरण $x = A\cos(\omega t + \phi)$

$= 1 \cos(400t + \phi)$ होगा

उदाहरण : 3·5 एक कण 4 cm लम्बी रेखा के अनुदिश सरल आवर्तगति कर रहा है। कण का वेग जबकि वह मध्यविन्दु से गुजरता है 12 cm/sec है/कण का आवर्तकाल बताओ ?

$$A = 2 \text{ cm}$$

मध्य विन्दु पर वेग महत्तम होता है अतः

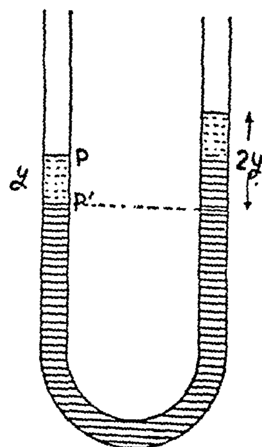
$$v_{max} = A\omega$$

$$12 = 2\omega \qquad \therefore \omega = 6 \text{rad/sec}$$

अतः आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6} = 1{\cdot}047$ sec उत्तर

उदाहरण : 3·6 एक समान अनुप्रस्थ काट की U-नली में 30cm ऊँचाई तक पानी भरा है। यदि U-नली की एक भुजा में पानी को थोड़ा नीचे धकेल कर छोड़ दिया जाये तो नली में पानी ऊपर-नीचे आता जाता है। यदि पानी की गति को सरल आवर्ती माना जाये तो दोलन काल की गणना करो ? ($g = 980$ cm/sec^2)

चित्र से स्पष्ट है कि यदि पानी को संतुलनावस्था P से y दूरी नीचे विस्थापित किया जाये, तो पानी U-नली की दूसरी शाखा में अर्थात् P^1 के सापेक्ष $2y$ दूरी ऊपर होगी।



चित्र—3.9

अतः प्रत्यानयन बल

$= 2y$ cm ऊँचाई के पानी का भार

$= 2y$ cm नली की ऊँचाई में उपस्थित पानी का आयतन × घनत्व × गुरुत्व जनित त्वरण

$= 2y \times a \times 1 \times g$

अतः बल नियतांक $k = \frac{F}{\text{विस्थापन}}$

$$= \frac{2y \times a \times 1 \times g}{y}$$

[$\because$ a = नली का अनुप्रस्थ काट
$\therefore$ $2y \times a$ = पानी का आयतन]

अतः सूत्र $\frac{k}{m}=\omega^2$ से

$$\omega^2=\frac{2\times a\times 1\times g}{\text{दोलन करने वाले पानी की संहति}}$$

स्पष्ट है कि U-नली में भरा सम्पूर्ण पानी दोलन मे भाग लेगा अत·

$$\therefore \quad m=2\times 30\times a\times 1$$

$$\therefore \quad \omega^2=\frac{2\times a\times 1\times g}{2\times 30\times a\times 1}=\frac{g}{30}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{30}} \quad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{30}{g}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{30}{280}}$$

$=1\cdot098$ sec उत्तर

प्रश्न

(1) स्थितिज ऊर्जा वक्र से आप क्या समझते हैं। "एक कण केवल उस क्षेत्र मे ही गति कर सकता है जहाँ पर $U\leqslant E$", इस कथन की व्याख्या कीजिये ?

(2) निम्न की परिभाषा दो

(a) विभवकूप (b) विभवप्राचीर (c) आवर्तीगति (d) वर्तन बिन्दु (e) अपरिमित गति (f) सीमित गति (Finite motion) (g) वर्जित क्षेत्र

(3) जब कण की ऊर्जा E विभव क्षेत्र में स्थितिज ऊर्जा के न्यूनतम मान के बराबर हो तो वह स्थायी सन्तुलन मे होता है, क्यों ? किसी विभव कूप मे अल्प आयाम के दोलन सरल आवर्ती होते हैं क्यो ?

(4) यदि कण की अनन्त पर स्थितिज ऊर्जा को शून्य माना जाये तो कण की स्थितिज ऊर्जा वक्र की प्रकृति (i) आकर्षण बल क्षेत्र मे (ii) प्रतिकर्षण बल क्षेत्र मे कैसी होगी। चित्र द्वारा स्पष्ट करो ?

(5) सरल आवर्त गति के लक्षण क्या हैं। आयाम, कला, कोणीय आवृति, प्रारम्भिक कला की परिभाषा दो।

(6) सरल आवर्तगति करते हुये कण की विस्थापन, वेग तथा वेग वृद्धि तथा समय के सम्बन्ध को ग्राफ द्वारा प्रदर्शित करो। इनकी आपस की कलाओं मे अन्तर भी बताओ ?

(7) एक कण विभव कूप $U=\frac{1}{2}kx^2$ में अल्प आयाम के दोलन करता है, सिद्ध करो कि दोलन सरल आवर्ती हैं। $\left[\text{Hint } F-\frac{du}{dx}=-kx\right]$

(8) एक स्प्रिंग से 100 gm का पिण्ड लटक रहा है तथा यह 154 sec में 100 दोलन करता है। यदि एक और पिण्ड लटका दिया जाये तो यह 161 sec में 100 दोलन करता है। दूसरे पिण्ड की संहति ज्ञात करो।

[उत्तर m=9 gms.]

(9) जब क्षैतिज अवस्था में रखे हुये एक स्प्रिंग पर 4×10^5 dynes का बल लगाया जाता है तो वह अपनी संतुलनावस्था से 10 cm खिच जाती है। अब इसके एक सिर से 1600 gm की वस्तु जोड़कर इसकी सन्तुलनावस्था से 12 cm खींचकर छोड़ दिया जाता है जिससे वस्तु चिकनी मेज पर सरल आवर्त गति करने लगती है :

(a) स्प्रिंग का बल नियतांक ? [उत्तर 4×10^4 dynes/cm]

(b) वस्तु को छोड़ने से ठीक पहले बल ? [उत्तर $-4{\cdot}8\times10^5$ dynes]

(c) छोड़ने के बाद डोलन काल ? [उत्तर 1·256 sec]

(d) गति का आयाम [उत्तर 12 cm]

(e) अधिकतमत्वरण [उत्तर 300 cm/sec^2]

(f) जब वस्तु मूल बिन्दु से आधी दूरी तै करले उस समय कण का वेग, गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा [उत्तर वेग=51·95 cm/sec, गतिज ऊर्जा=$2{\cdot}19\times10^6$ ergs, स्थितिजऊर्जा=$7{\cdot}2=10^5$ ergs]

(g) सम्पूर्ण ऊर्जा !! [उत्तर $2{\cdot}879\times10^6$ ergs]

(10) निम्न दिये गये चित्र में द्विपरमाणुक अणु (Diatomic molecule) जैसे तन्त्र के लिये स्थितिज ऊर्जा वक्र (Potential energy Curve) दिखाया गया है, जिसमें अन्तर नाभिकीय दूरी r के साथ स्थितिज ऊर्जा U का सम्बन्ध व्यक्त किया गया है; निम्न लिखित के मान प्राप्त करो।

(i) संतुलनावस्था की अन्तर नाभिकीय दूरी r_0

(ii) बन्धन ऊर्जा E_B

(iii) विभव कूप के निकट बल स्थिरांक

(b) प्रत्येक संभव स्थिति में दोलन करने की कण की अधिकतम ऊर्जा (c) यदि कण r के न्यूनतम मान से $r \rightarrow \infty$ पर ला जाये, तो कण की $r \rightarrow \infty$ पर गतिज ऊर्जा का मान क्या होगा ?

Hint : (a) कण केवल विभव कूप में ही आवर्तगति कर सकता है। अतः r=2 units तथा r=4·5 units की स्थितियों पर आवर्तगति संभव है।

(b) दोलन करने की अधिकतम ऊर्जा जबकि कण r=2 units के परितः दोलन करता हो, स्पष्ट ही 1−(−2·5)=1+2·5=3·5 इकाई

r=4·5 units के परितः दोलन करने की अधिकतम ऊर्जा

=·5−(−1)=1·5 units

(c) न्यूनतम r=1 पर कुल ऊर्जा=1

अतः K.E=1 unit उत्तर

(12) 4 gm की एक वस्तु सरल आवर्त गति कर रही है। वस्तु के 8 cm विस्थापन के लिये 24 gm भार का बल लगाना पड़ता है। आवर्त काल ज्ञात करो। यदि अधिकतम वेग 500 cm/sec है तो दोलन आयाम और अधिकतम त्वरण ज्ञात करो। $g=280\ cm/sec^2$

[उत्तर आवर्त काल=0·23 sec, आयाम= $\frac{500}{27}$ cm, अधिकतम त्वरण $=1 \cdot 35 \times 10^4 cm/sec^2$

(13) एक सरल आवर्ती दोलक की सम्पूर्ण ऊर्जा 10240 ergs है और उसका आवर्त काल 2π sec है $\frac{\pi}{4}$ sec पर कण का विस्थापन $8\sqrt{2}$ cm है। गति का आयाम और कण की संहति बताओ।

Hint : $E=U_{max}=\frac{1}{2}kx^2_{max}=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$

तथा $x=A \cos \omega t=A \cos \frac{2\pi}{2\pi} \times \frac{\pi}{4}=A \cos \frac{\pi}{4}$

अतः A=16 cm इत्यादि [उत्तर A=16cm; संहति=80gms.]

(14) सरल आवर्त गति करते हुये कण की आवृत्ति 100 कम्पन प्रति मिनट है तथा मध्यमान स्थिति पर वेग 15 ft/sec है। इसके गति करने के मार्ग की पूरी लम्बाई क्या होगी। इसका वेग उस समय क्या होगा जबकि वह अपनी मध्यमान स्थिति तथा अपने मार्ग की चरम स्थिति के मध्य में होगी।

उत्तर मार्ग की लम्बाई= $\frac{63}{22}$ cm; वेग=12·97 cm/sec

अन्दर निहित कणों की दूरी यद्यपि परिवर्तित तो होती है परन्तु अधिकांश वस्तुओं में यह परिवर्तन उसके आकार के सापेक्ष नगण्य होता है अतः ऐसी वस्तुओं को दृढ़ माना जा सकता है।

दृढ़ पिण्ड की गति—दृढ़ पिण्ड निम्न दो प्रकार की गति कर सकता है :

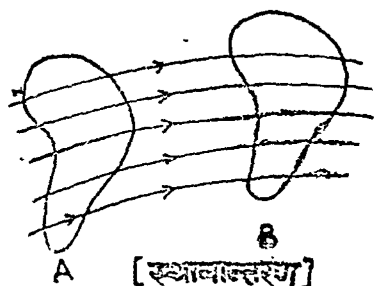
(a) स्थानांतरीय गति (Translational Motion)

(b) घूर्णी गति (Rotational Motion)

स्थानांतरीय गति—जब कोई दृढ़ पिण्ड अपने आपके समांतर (Parellel) एक चिकने वक्र के अनुदिश गति करे तो इस प्रकार की गति को स्थानांतरीय गति कहते हैं। स्पष्ट है कि इस प्रकार की गति में वस्तु का

(i) प्रत्येक कण एक समान वेग से चलता है

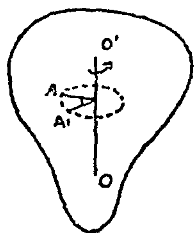
(ii) प्रत्येक कण की गति करने का मार्ग एक दूसरे के समान्तर होता हैं। [चित्र4·1]



चित्र—4·1

उदाहरणार्थ दिक्सूची की एक क्षैतिज धरातल में गति ताकि उसकी सुई की दिशा सदैव उत्तर-दक्षिण ही रहे।

घूर्णी गति—वस्तु के दूसरी प्रकार की गति को घूर्णन कहते हैं। इस प्रकार की गति में वस्तु किसी अक्ष के परितः घूमती है तथा वस्तु में निहित भिन्न-भिन्न कण अक्ष के लम्बवत धरातलों में वृताकार मार्ग में घूमते हैं। प्रत्येक कण के वृताकार मार्ग की त्रिज्या उस कण की अक्ष से दूरी के बरावर है। [चित्र 4·2]



चित्र—4·2

यदि वस्तु dt समय में $d\phi$ कोंण घूमती है तो स्पष्ट है कि कण P, जिसकी अक्ष से दूरी r है, के द्वारा चली हुई दूरी

$$ds = r\,d\phi$$

अथवा

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\phi}{dt}$$

या

$$v = r\frac{d\phi}{dt} \qquad \cdots(4\cdot1)$$

v कण P का वेग है। $\frac{d\phi}{dt}$ का मान वस्तु के प्रत्येक बिन्दु पर समान है तथा इसे कोणीय वेग कहते हैं। कोणीय वेग वस्तु के इकाई समय में हुए कोणीय स्थानान्तरण बराबर है। $\frac{d\phi}{dt}$ को ω (ओमेगा) से प्रदर्शित करते हैं।

$$\therefore \quad \boxed{v = r\omega} \qquad \cdots(4{\cdot}2)$$

अतः जो कण अक्ष से दूर हैं उनका वेग अक्ष के निकट के कणो की अपेक्षा अधिक होता है।

सामान्यतया ω समय के साथ परिवर्तित होता है अर्थात ω स्थिर नही होता। यदि ω स्थिर है अर्थात वस्तु समान कोणीय वेग से घूम रही हो तथा T उसका घूर्णन काल T (Period of rotation) है तो

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \cdots(4{\cdot}3)$$

4·2. कोणीय वेग का वेक्टर से प्रदर्शन

किसी वस्तु का घूर्णन निम्न दो मुख्य बातो से जाना जाता है :

(i) वस्तु की घूर्णन अक्ष क्या है।

(ii) वस्तु के कोणीय वेग का परिमाण क्या है।

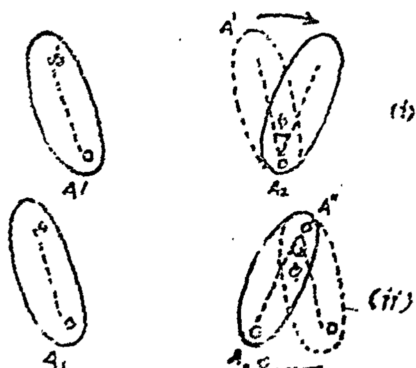
अतः हम किसी वस्तु का घूर्णन एक वेक्टर द्वारा प्रदर्शित कर सकते है जिसका परिमाण कोणीय वेग के बराबर है तथा जिसकी दिशा घूर्णन अक्ष है। घूर्णन अक्ष की दो दिशाओ मे से कौनसी दिशा घूर्णन को प्रदर्शित करेगी यह दक्षिण हस्त पेच नियम से जाना जाता है। अत. कोणीय वेग को $\vec{\omega}$ से प्रदर्शित किया जाता है। यहाँ पर यह बताना उपयुक्त है कि कोणीय वेग तो वेक्टर है परन्तु कोणीय विस्थापन को वेक्टर द्वारा प्रदर्शित करना तभी सम्भव है जबकि यह अति सूक्ष्म (Infinitesimal) हो। इसका कारण यह है कि कोई भी भौतिक राशि वेक्टर द्वारा प्रदर्शित की जा सकती है यदि इसमे परिमाण तथा दिशा होने के साथ-साथ वह समान्तर चतुर्भुज के नियम का भी पालन करे निश्चित कोण से वस्तु का घूमना (Finite rotation) इसमें से दूसरी शर्त को पूरा नहीं करता।

4·3. दृढ़ वस्तु की व्यापक गति (Motion of a rigid body in general)

चित्र 4·3 (i तथा ii) मे A तथा A_2 गति करती हुई दृढ़ वस्तु की दो स्थितियाँ हैं। A_1 से वस्तु की A_2 स्थिति तक निम्न दो गतियों के (Combination) मे पहुँचा जा सकता है :

(a) A_1 से A' तक वस्तु का स्थानान्तरण इस प्रकार से हो ताकि वस्तु में निहित कोई विन्दु O अपनी उसी स्थिति को प्राप्त हो जो कि उसकी वस्तु की अन्तिम अवस्था A_2 में है तत्पश्चात (b) वस्तु की इसी विन्दु O के परितः घूर्णन जिससे वस्तु अपनी अन्तिम स्थिति A_2 को प्राप्त होती है [चित्र 4·2 (i)]

यह आवश्यक नहीं कि वस्तु को A_1 स्थिति से A_2 स्थिति में प्राप्त होने के लिये वस्तु का घूर्णन किसी विशेष विन्दु O के परितः हो। Σ हम वस्तु को A_1 से A'' तक भी स्थानान्तरित इस प्रकार से कर सकते थे ताकि वस्तु का कोई अन्य विन्दु O′ अपनी अन्तिम स्थिति में आ जाये तत्पश्चात वस्तु का O′ के परितः घूर्णन, जिससे वस्तु पुनः अपनी अन्तिम अवस्था A_2 में प्राप्त हो [चित्र 4·2 (ii)]।



चित्र—4·3

यहाँ पर ध्यान देने योग्य बात यह है कि वस्तु को चाहे O के परितः घूर्णन कराया जाये या O′ के परितः, वस्तु का घूर्णन दोनों ही विन्दुओं के परितः समान है अर्थात् वस्तु का "घूर्णन" इस बात पर निर्भर नहीं करता कि हम इसे कौनसे विन्दु के परितः घूर्णन करा रहे हैं; परन्तु वस्तु के स्थानान्तरण का मान, जबकि वस्तु का घूर्णन O के परितः है अथवा O′ के, भिन्न भिन्न होगा। अतः वस्तु की स्थानान्तरीय गति $\vec{v}$ का मान विन्दु O अथवा O′ के चयन पर निर्भर करता है परन्तु कोणीय वेग $\vec{\omega}$ दोनों ही विन्दुओं के लिये समान है। इस संदर्भ में वस्तु की घूर्णगति "निरपेक्ष" (Absolute) है परन्तु स्थानान्तरीय गति नहीं। साधारणतया विन्दु O वस्तु का द्रव्यमान केन्द्र (Centre of mass) होता है। अतः दृढ़ वस्तु की गति को निम्न दो गतियों में विघटित कर सकते हैं : (i) वस्तु के द्रव्यमान केन्द्र की स्थानान्तरीय गति, (ii) वस्तु का द्रव्यमान केन्द्र के परितः घूर्णन।

क्योंकि किसी भी निर्देश तन्त्र $\vec{v}$ को प्रदर्शित करने के लिये तीन निर्देशांक (Co-ordinates) तथा $\vec{\omega}$ को प्रदर्शित करने के लिये तीन स्वतन्त्र कोण अर्थात् छः स्वतन्त्र राशियाँ किसी पिण्ड की व्यापक गति को प्रदर्शित करने के लिये चाहिये।

अतः दृढ़ पिण्ड एक ऐसा यांत्रिकी तन्त्र है जिसकी स्वतन्त्रता की कोटि (Degrees of freedom) छः हैं।

4·4. दृढ़ पिण्ड की गतिज ऊर्जा

(a) स्थानान्तरण गति के कारण गतिज ऊर्जा—चूंकि स्थानान्तरण गति में वस्तु का प्रत्येक कण समान वेग $\vec{V}$ से चलता है अतः वस्तु की इस प्रकार की गति के कारण ऊर्जा

$$E_T = \frac{1}{2}MV^2 \qquad ...(4·3)$$

जहां पर कि M=वस्तु की संहति। सूत्र से स्पष्ट है कि स्थानान्तरण गति मे वस्तु को एक कण की तरह व्यवहार करते हुये माना जा सकता है।

(b) घूर्णन गतिज ऊर्जा—माना कि कोई दृढ वस्तु Ω कोणीय वेग से घूम रही है। दृढ़ वस्तु को बहुत छोटे छोटे कणो से मिलकर बना माना जा सकता है। यदि किसी कण m_i की घूर्णन अक्ष से दूरी r_i है तो कण का वेग

$$v_i = r_i\,\omega$$

अतः कण की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}m_i v_i^2$

अतः वस्तु की सम्पूर्ण ऊर्जा (घूर्णन के कारण)

$$E_R = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2\,(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots\ldots)$$

$$= \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad ..(4·5)$$

जहां पर कि $I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 \ldots\ldots$ एक ऐसी भौतिक राशि है जो वस्तु की आवृति, आकार तथा वस्तु मे निहित कणो के वितरण तथा घूर्णन अक्ष पर निर्भर करती है। I वस्तु तथा घूर्णन अक्ष का अभिलक्षण है तथा इसको वस्तु का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) कहते है।

(c) वस्तु की स्वेच्छ गति (Arbitrary motion) में ऊर्जा—चूंकि हम पहले देख चुके है कि किसी दृढ वस्तु की स्वेच्छ गति को हम दो प्रकार की गति (i) स्थानान्तरण तथा (ii) किसी बिन्दु O के परितः घूर्णन के संयोजन से बनी मान सकते हैं। यदि O बिन्दु वस्तु का द्रव्यमान केन्द्र हो तो वस्तु की ऊर्जा :

$$E_K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 \qquad ...(4·5)$$

जहाँ पर $\frac{1}{2}MV^2$=द्रव्यमान केन्द्र की स्थानान्तरण गतिज ऊर्जा,

तथा $\frac{1}{2}I_0\omega^2$ वस्तु की द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष घूर्णन ऊर्जा । I_0 वस्तु का द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः जड़त्व आघुर्ण है ।

माना कि कोई दृढ़ वस्तु किसी अक्ष Z के परितः घूम रही है । यह अक्ष के परितः वस्तु की घूर्णन ऊर्जा,

$$E_K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

जहाँ पर कि I वस्तु का Z—अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण है । चूँकि हम वस्तु की इस गति को द्रव्यमान केन्द्र की स्थानान्तरण गति तथा द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली तथा Z—अक्ष के समान्तर

$$\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}I_0\omega^2$$

यदि द्रव्यमान केन्द्र की Z—अक्ष से दूरी a हो तो स्पष्ट है

$$V=a\omega^2$$

अतः

$$\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}Ma^2\omega^2+\frac{1}{2}I_0\omega^2$$

$$=\frac{1}{2}(I_0+Ma^2)\omega^2$$

अथवा

$$\boxed{I=I_0+Ma^2}$$

समीकरण (4·7) से स्पष्ट है कि I का मान सदैव I_0 से बड़ा होता है । सूत्र (4·7) से स्पष्ट है कि वस्तु का किसी अक्ष Z के परितः जड़त्व आघूर्ण समतुल्य है । वस्तु का Z—अक्ष के समान्तर परन्तु द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण तथा वस्तु की संहति M तथा दोनों अक्षों के बीच की दूरी के वर्ग के गुणनफल के योग के समीकरण (4·7) को समान्तर अक्षों की प्रमेय (Theorem of Parallelaxes) कहते हैं । यदि अक्ष की दिशा न बदले तो वस्तु का जड़त्व आघूर्ण द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः न्यूनतम होता है ।

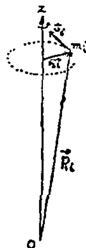
4·5. कोणीय संवेग

माना कि कोई वस्तु Z अक्ष के परितः घूम रही है । यदि वस्तु छोटे छोटे कणों से बना माना जाय तो स्पष्ट है कि प्रत्येक कण अक्ष के लम्बवत धरातलों में वृत्ताकार मार्ग में घूमेगा (चित्र 4·4) । माना कि m_i कोई कण है जिसकी स्थिति $\vec{R_i}$ में प्रदर्शित की गई है । O घूर्णन अक्ष पर स्थित कोई बिन्दु है । हम

वस्तु के कोणीय संवेग का मान जो कि Z– अक्ष के अनुदिश है, निकालेंगे। कण m_i का विन्दू O के परितः कोणीय संवेग, परिमापानुसार :

$$\vec{l_i} = \vec{R_i} + m_i \vec{v}$$

$$= m_i \vec{R_i} \times \vec{v_i} \qquad ...(4\ 8)$$



चित्र—4·4

जहाँ पर $\vec{v_i}$ कण का वृत की स्पर्शरेखा के अनुदिशवेग है। स्पष्ट है कि यह वेग Z—अक्ष के लम्बवत धरातल में है।

$\vec{R_i}$ दो वेक्टरों का योग है : एक तो Z—अक्ष के अनुदिश तथा दूसरा वेक्टर $\vec{r_i}$ जो कि Z—अक्ष के लम्बवत है (क्योंकि $\vec{r_i}$ वृत के धरातल मे है)

अतः कण m_i का कोणीय सवेग का मान जो कि Z—अक्ष के अनुदिश है :

$$\vec{l_{zi}} = m_i \vec{r_i} \times \vec{v_i} \qquad .(4{\cdot}9)$$

[वेक्टर के वज्रगुणन के नियम से यह स्पष्ट है कि $\vec{r_i} \times \vec{v_i}$ = एक वेक्टर जिसका परिमाण तो $r_i\, v_i \sin 90 = r_i\, v_i$ तथा दिशा $\vec{r_i}$ व $\vec{v_i}$ के धरातल के लम्बवत है, अर्थात् z—अक्ष के अनुदिश है]

∴ $\vec{l_{zi}}$ का परिमाण $= l_{zi} = m_i r_i v_i$

परन्तु $v_i = r_i \omega$

∴ $l_{zi} = m_i r^2_i \omega$

अतः सम्पूर्ण वस्तु का Z—अक्ष के अनुदिश कोणीय सवेग का परिणाम

$$L_Z = l_{1z} + l_{2z} + \ldots\ldots$$

$$= m_1 r^2_1 \omega + m_2 r^2_2 \omega + \ldots\ldots$$

$$= (m_1 r^2_2 + m_2 r^2_2 + \ldots\ldots)\omega$$

$$\therefore \quad \boxed{L_Z = I\omega} \qquad ...(4\ 10)$$

यदि वस्तु पर कोई वलआघूर्ण कार्य न कर रहा हो तो वस्तु के कोंणीय संवेग का मान स्थिर रहता है अर्थात् वस्तु जड़त्व के कारण समान कोंणीय वेग से घूमती है। कोंणीय वेग का मान स्थिर इसलिये रहता है कि घूमने वाली वस्तु दृढ़ है अर्थात् घूमते हुये उसके भिन्न भिन्न भागों की आपस की दूरी अपरिवर्तित रहती है। यदि वस्तु के भिन्न भिन्न भागों की आपस की दूरी वदले तो I का मान वदलेगा अत: ω का मान भी इस प्रकार वदलेगा ताकि :

$$I\omega = \text{स्थिर राशि} \qquad ...(4\cdot11)$$

उदाहरणार्थ यदि कोई व्यक्ति अल्प घर्षण वाली कुर्सी पर यदि हाथ फैलाकर घूमे, तत्पश्चात वह अपने हाथों को खींचले तो वह अधिक कोंणीय वेग से घूमेगा ताकि कोंणीय संवेग का मान स्थिर रहे।

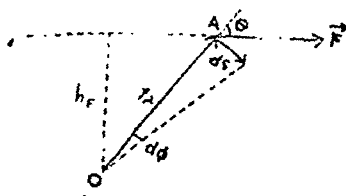
4·6. वल आघूर्ण (Torpue)

वस्तुओं की स्थानान्तरीय गति में वस्तु पर लगने वाला $\vec{F}$ तथा उसके संवेग $\vec{P}$ में एक वहुत महत्वपूर्ण सम्वन्ध है :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{V}) = M\frac{d\vec{V}}{dt}$$

अर्थात् किसी वस्तु पर वल लगने से उसका संवेग वदलता है; संवेग के परिवर्तन की दर ही वल का माप है।

ठीक इसी प्रकार का सम्वन्ध वस्तुओं के कोंणीय संवेग की परिवर्तन दर तथा वस्तु पर लगने वाले वल आघूर्ण में है। माना कि कोइ वस्तु विन्दु O से गुजरने वाली Z—अक्ष के परित: घूम रही है। माना कि अक्ष चित्र के धरातल के लम्बवत है यह तो स्पष्ट है ही कि जो वल Z—अक्ष के समानानन्तर हैं वह वस्तु घुमा नहीं सकते, केवल वस्तु का स्थानान्तरण ही कर सकते हैं। अत: हम वस्तु पर लगने वाले केवल उन्हीं वलों को ध्यान में लेंगे जो कि घूर्णन अक्ष के लम्बवत धरातल में हैं। चित्र 4·5 में चिन्दु A पर वल $\vec{F}$ लग रहा है तथा A से O की दूरी $\vec{r}$ है। परिमापानुसार Z– अक्ष के अनुदिश वलआघूर्ण



चित्र—4·5

$$K_z = \text{वेक्टर } \vec{r} \times \vec{F} \text{ का परिमाण}$$

[स्पष्ट है कि वेक्टर $\vec{r}$ तथा $\vec{F}$ के धरातल के लम्बवत अर्थात् Z—अक्ष के अनुदिश है]

$$\therefore \quad K_z = (r\sin\theta)F = h_F\ F$$

जहाँ पर कि $h_F = r\sin\theta$

$=$बल $\vec{F}$ की क्रिया रेखा की विन्दु O से लम्बवत दूरी)

परन्तु $$K_z = \frac{dL_z}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(I\omega) = I\ \frac{d\omega}{dt}$$ चूँकि वस्तु पर दृढ है।

अतः $$\frac{dL}{dt} = I\ \frac{d\omega}{dt} \qquad \ldots(4\cdot19)$$

उपर्युक्त समीकरण घूमती हुई वस्तुओ का समीकरण है। अर्थात् किसी वस्तु के कोंणीय संवेग की परिवर्तन की दर बल आघूर्ण कहलाती है। $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ को कोणीय वेग वृद्धि कहते हैं।

4.7. कोंणीय वेगवृद्धि

यदि कोई वस्तु $\vec{\omega}$ कोणीय वेग से घूम रही है तो इस पर बल आघूर्ण जब कार्य करता है तो इसका कोंणीय वेग बदल जाता है। $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ को कोणीय वेगवृद्धि कहते है। इसका मान वस्तु पर लगने वाले आघूर्ण के मान पर निर्भर करता है।

4·8. बल आघूर्णों का नियम (Low of Torques)

यदि कोई वस्तु किसी अक्ष के परितः घूम सकती है तो सम्यावस्था मे उस वस्तु पर लगने वाले सब बल आघूर्णों का योग शून्य होगा : अर्थात् सम्यावस्था मे

$$K_{1z} + K_{2z} + \ldots\ldots = 0 \qquad \ldots(4\cdot13)$$

बल आघूर्ण द्वारा घूर्णन में किया गया कार्य—बल F द्वारा किया गया कार्य जबकि वस्तु अक्ष के परितः अति सूक्ष्म कोण $d\phi$ से घूमती हैं, प

कार्य = विस्थापन × विस्थापन की दिशा में बल का घटक

$dW = F_s \, d_s$

परन्तु $dS = r d\phi$ तथा $F_s = F \sin \theta$

$\therefore$ कार्य $= F \sin \theta . r d\phi = (F . h_F) \, d\phi$

अतः
$$K_z = \frac{dW}{d\phi} \qquad ...(4\cdot14)$$

यदि $d\phi = 1$

$K_z = dW$

अतः किसी अक्ष के परितः बल आघूर्ण उस कार्य के बराबर है जो कि वस्तु के इकाई कोंणीय विस्थापन में करना पड़ता है।

हम पहले देख चुके हैं कि बल के द्वारा किया गया कार्य वस्तु की स्थितिज ऊर्जा में ह्रास के बराबर होता है अर्थात

$$F_s d_s = -dU$$

इसलिये $K_z d\phi = -dU$

$$K_z = -\frac{dU}{d\phi} \qquad ...(4\text{'}15)$$

यह सम्बन्ध भी अत्यन्त महत्वपुर्ण है।

4·9. पिण्ड लोलक (Compound Pendulum)

परिभाषा :—कोई भी दृढ़ वस्तु जो किसी क्षैतिज अक्ष के परितः गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र में घूम सके, पिण्ड लोलक कहलाती है।

आवर्तकाल के लिये व्यंजक:—चित्र 4·6 में दोलन करती हुई किसी दृढ़ वस्तु की स्थिति C है। माना कि वस्तु O से गुजरने वाली क्षैतिज अक्ष के परितः दोलन कर रही है।

वस्तु पर गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र में लगने वाला बल आघूर्ण

K = — बल × बल की क्रिया रेखा पर O से लम्ब की दूरी

$= -mg \times a \sin \phi$

$= -mg \, a \sin \phi$

चिन्ह यह प्रदर्शित करता है कि बल आघूर्ण कोंणीय विस्थापन की विपरीत दिशा में कार्य करता है।

परन्तु घूर्णन करती हुई वस्तुओं की गति के समीकरण के अनुसार

$$K_r = I\frac{d\omega}{dt}$$

जहाँ पर I इण वस्तु का O से गुजरने वाली क्षैतिज अक्ष के परितः जडत्व आघूर्ण

अत. $$\frac{d\omega}{dt} = -mg\ a \sin\phi$$

यदि कोणीय विस्थापन ϕ अति अल्प है तो $\sin\phi = \phi$

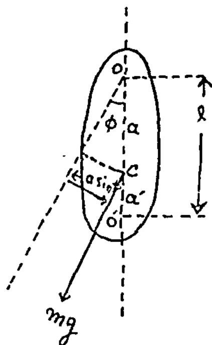
$$\therefore \quad I\frac{d\omega}{dt} = -mg\ a\phi$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{mga}{I}\phi$$

अथवा कोणीय वेग वृद्धि

$$\alpha - \phi \qquad \cdots(4\ 16)$$

अत. दृढ वस्तु की गति सरल आवर्ती है। यदि वस्तु की कोणीय आवृति ω है तो स्पष्ट है



चित्र—4 6

$$\omega^2 = \frac{mga}{I}$$

अथवा $$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}} \qquad \cdots(4{\cdot}17)$$

$$\therefore \quad \text{आवर्तकाल } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}} \qquad \cdots(4{\cdot}18)$$

समीकरण (4 18) को पुनः निम्न प्रकार से लिखने पर

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{I}{ma}}{g}}$$

यदि हम इस सूत्र को सरल लोलक के आवर्तकाल के सूत्र

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ से तुलना करें तो स्पष्ट है कि सरल

लोलक जिसकी लम्बाई $l=\frac{I}{ma}$ है ···(4·19)

इसका आवर्तकाल वही होगा जो कि इस पिण्ड लोलक का है। अर्थात् सरल लोलक जिसकी कि लम्बाई $l=\frac{I}{ma}$ है, उसकी गति के गुण वही होंगे जो कि इस लोलक के हैं। अतः पिण्ड लोलक के समतुल्य सरल लोलक की लम्बाई (Length of Equivalent Simple Pendulum) $l=\frac{I}{ma}$ होती है।

चूँकि समानान्तर अक्षों के प्रमेय के अनुसार

$$I=I_0+ma^2$$

जबकि I_0=वस्तु का गुरुत्वकेन्द्र से गुजरने वाली परन्तु O से गुजरने वाली अक्ष के समानान्तर की अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

∴ समतुल्य सरल लोलक की लम्बाई (4·19) के अनुसार

$$l=\frac{I_0+ma^2}{ma}=a+\frac{I}{ma} \qquad \cdots(4\cdot20)$$

समीकरण 4·20 से एक महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकाल सकते हैं यदि हम OC रेखा को बढ़ाकर OO′=l करदें, तथा अब वस्तु को O′ के परितः दोलन करायें तो तुल्य सरल लोलक की लम्बाई

$$l'=a'+\frac{I_0}{ma'} \qquad \cdots(4\cdot21)$$

जहाँ पर कि a′ वह दूरी है जो कि O′ तथा C के मध्य है। चित्र से स्पष्ट है

$$a'=l-a=\frac{I_0}{ma} \text{ (समीकरण 4·20 के अनुसार)}$$

अतः (4·21) के अनुसार

$$l'=\frac{I_0}{ma}=\frac{I_0\times ma}{m\times I_0}=a+\frac{I_0}{ma}=l$$

$$\therefore \qquad \boxed{l'=l} \qquad \cdots(4\cdot22)$$

अतः किसी भी पिण्ड लोलक को उन दो क्षैतिज अक्षों के परितः दोलन

कराने पर आवर्ती काल वही रहेगा जिनके बीच की दूरी l है। अर्थात् बिन्दु O तथा O′ आपस मे बदले बदले जा सकते हैं।

यदि हम $I_0 = mk^2$ का उपयोग करें जहाँ पर k वस्तु की गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाली अक्षे के परितः घूर्णन त्रिज्या है तो पिण्ड लोलक का आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}.$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ma^2}{mga}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{mk^2 + ma^2}{mga}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{k^2}{a} + a}{g}}$$

4.10 जड़त्व आघूर्ण

वस्तुओं का यह स्वाभाविक गुण है कि वह स्वयमेव अपनी अवस्था (विरामावस्था अथवा गति की अवस्था) मे परिवर्तन नहीं कर सकती। यदि कोई किसी वेग से किसी दिशा मे चल रही है तो वह उसी वेग से उसी दिशा मे चलती जायेगी। किसी वस्तु की अवस्था मे परिवर्तन केवल वाह्य बल से ही सम्भव है। भिन्न-भिन्न वस्तुओ के ऊपर यदि समान बल लगाये जायें तो वस्तुओ की अवस्था मे परिवर्तन समान नही होगा, अर्थात् कुछ वस्तुएँ अपनी अवस्था मे परिवर्तन करने का अधिक विरोध करती हैं तथा कुछ कम। वस्तुओ के इस विरोध करने की क्षमता को ही वस्तुओ का जड़त्व (Interia) कहते हैं। यदि वस्तुओं की गति स्थानान्तरीय हो तो वस्तुओं का जड़त्व वस्तु की सहति से नापा जाता है। यदि किसी वस्तु पर F बल लगने से उसमे $\vec{a}$ वेगवृद्धि या वेगह्रास होता है (अर्थात् अवस्था मे परिवर्तन होता है) तो $\frac{\vec{F}}{\vec{a}}$ ही वस्तु का जड़त्व का माप है। इसे वस्तु की सहति कहते हैं।

अर्थात् $$\frac{\vec{F}}{\vec{a}} = m \quad ..(4\ 24)$$

ठीक इसी प्रकार जब वस्तु किसी घूर्णन अक्ष के परितः घूमती है तो यह वस्तु भी स्वमेय अपनी घूर्णी अवस्था में परिवर्तन नहीं कर सकती। घूर्णी अवस्था में परिवर्तन केवल बाह्य बल आघूर्ण से ही सम्भव है। वस्तु अपने घूर्णी अवस्था में परिवर्तन का विरोध करती है। घूर्णी अवस्था में वस्तु के विरोध करने की क्षमता न केवल वस्तु की संहति पर निर्भर करती है साथ ही साथ यह इस पर भी निर्भर करती है कि वस्तु किस अक्ष के परितः घूम रही है। घूर्णी अवस्था में वस्तु के विरोध करने की क्षमता का माप ही जड़त्व आघूर्ण है। जैसा कि हम देख चुके हैं यदि कोई कण जिसकी संहति m है तथा जिसकी घुर्णन अक्ष से दूरी r है तो उसका जड़त्व आघूर्ण इस घूर्णन अक्ष के परितः

परिभापानुसार $I = mr^2$

यदि कोई कण वस्तु किसी अक्ष Z के परितः घूम रही है तो इस वस्तु को बहुत छोटे-छोटे कणों m_1, m_2,...... इत्यादि से बना मान सकते है, यदि इन कणों की घूर्णन अक्ष से दूरी क्रमशः r_1, r_2,......है तो वस्तु का Z अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots\ldots$$
$$= \Sigma mr^2 \qquad (\ldots 4.25)$$

I का मान वस्तु के आकार, साइज तथा वस्तु के भिन्न-भिन्न कणों का घूर्णी अक्ष को परितः बिखराव (Distribution) आदि पर निर्भर करता है। यदि वस्तु सन्तत है, अर्थात् कणों की सख्या जिनसे कि मिलकर वस्तु बनी है, असंख्य है तो वस्तु का जड़त्व आघूर्ण I के मान को निकालने में जोड़ के चिन्ह को समाकलन (Integration) के चिन्ह से प्रतिस्थापन करते हैं।

$$I = \int r^2\, dm \qquad \ldots(4.26)$$

उदाहरणार्थ एक ठोस गोले का, गोले के केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $\frac{2}{5}MR^2$ होता है, एक खोखले गोले के केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $\frac{2}{3}MR^2$ होता है, एक छड़ का उसके मध्यबिन्दु से गुजरने वाली लम्बवत अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $\frac{Ml^2}{12}$ होता है।

4·11. हाल (Hoop) या रिंग का जड़त्व आघूर्ण

माना कोई वृताकार रिंग जिसकी त्रिज्या R है, उसके केन्द्र से तथा रिंग के धरातल के लम्बवत अक्ष के परितः घूम रही है। यदि रिंग को बहुत छोटे छोटे टुकड़ों में बांटा जाये, स्पष्ट है कि प्रत्येक टुकड़े की घूर्णन अक्ष से दूरी त्रिज्या R के बराबर है, अतः रिंग का जडत्व आघूर्ण परिमापानुसार :

$$I = m_1R^2 + m_2R^2 + \ldots\ldots$$
$$= R^2 (m_1 + m_2 + \ldots\ldots$$
$= MR^2$, जहां पर M रिंग की संहति है।

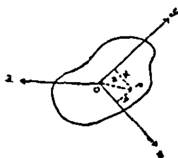
$$\therefore \quad \boxed{I = MR^2} \quad \ldots(4\ 27)$$

4·12. जड़त्व आघूर्ण पर प्रमेय

(i) समकोणिक अक्षों का प्रमेय (Theorem of perpendicular axes) माना कि x, y, z तीन अभिलम्बवत अक्ष हैं जो किसी बिन्दु O पर मिलती हैं, तथा किसी समतल पटल (Plane lamina) का x, y, z अक्षो के परितः जडत्व आघूर्ण क्रमशः I_x, I_y, I_z हैं, तो इस प्रमेय के अनुसार

$$I_z = I_x + I_y$$

अर्थात् समतल पटल के धरातल मे स्थित दो लम्बवत अक्षो के परित समतल पटल का जडत्वआघूर्णों का योग, पटल के उस जडत्व आघूर्ण के बराबर है जो कि तल के लम्बवत अक्ष परन्तु तल मे स्थिति लम्बवत अक्षों के कटान बिन्दू से गुजरने वाली अक्ष के परितः निकाला गया है। अर्थात् तल के लम्बवत अक्ष के परित जडत्व आघूर्ण अधिक होता है। चित्र 4·7 से स्पष्ट हैं :



चित्र—4 7

$$Ix = \Sigma my^2;\ Iy = \Sigma mx^2,$$

$$I_z = \Sigma mr^2$$

$$\therefore \quad I_x + I_y = \Sigma my^2 + \Sigma mx^2$$
$$= \Sigma m(x^2 + y^2)$$
$$= \Sigma mr^2$$

या $I_x + I_y = I_z$ $\because x^2 + y^2 = r^2$

अर्थात् $$\boxed{I_x + I_y = I_z} \qquad ...(4{\cdot}28)$$

यही सिद्ध करना था

(ii) समानान्तर अक्षों का प्रमेय (Theorem of Parallal axes)

यदि I=वस्तु का जड़त्व आघूर्ण किसी अक्ष Z—के परित:

I_0=वस्तु का जड़त्व आघूर्ण [वस्तु के द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली तथा Z—अक्ष के समान्तर वाली अक्ष के परित:]

a=दोनों समान्तर अक्षों के बीच की दूरी

M=वस्तु की संहति

तो इस प्रमेय के अनुसार

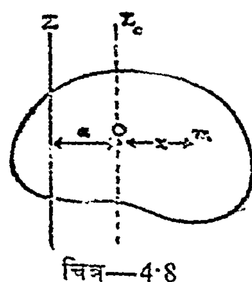
$$I = I_0 + Ma^2 \qquad ...(4{\cdot}29)$$

अर्थात् यदि अक्ष की दिशा न बदले तो वस्तु का जड़त्व आघूर्ण उसके द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परित: न्यूनतम होता है।

अर्थात् $I > I_0$

इस प्रमेय की उत्पत्ति हम पहले भी दे चुके हैं। सुविधा के निम्न उत्पत्ति भी दी जा सकती है :

चित्र (4·8) में माना कि Z—कोई भी अक्ष है तथा Z_0 अक्ष Z के सामान्तर तथा द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष है।



चित्र—4·8

चित्र से स्पष्ट है कि कण m का जड़त्व आघूर्ण (Z—अक्ष के परित:)

$$= m(x+a)^2$$

अत: सम्पूर्ण वस्तु का Z—अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण

$$I = \Sigma m(x+a)^2$$

$$= \Sigma m(x^2 + a^2 + 2ax)$$

$$= \Sigma mx^2 + \Sigma ma^2 + \Sigma m.2ax$$ चूंकि a स्थिर राशि है

अत: $$I = \Sigma mx^2 + a^2\Sigma m + 2a\Sigma mx$$

$$= I_0 + Ma^2 + 2a\Sigma mx$$

जहां पर कि $I_0 = \Sigma mx^2$; $\Sigma m = M$ (सम्पूर्ण वस्तु की संहति)

चूंकि Σmx = द्रव्यमान केन्द्र के परितः सभी कणो के घूर्णों का बीजगणित योग है, और चूंकि वस्तु अपने द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष सदैव सन्तुलन में रहती है अर्थात् द्रव्यमान केन्द्र के परितः कणों के भार का घूर्णों का बीजगणितीय योग शून्य के बराबर होगा

अतः $\Sigma mx = 0$

इसलिये $\boxed{I = I_0 + Ma^2}$

उदाहरण 4·1 एक वृत्ताकार धातु का वलय (Ring) जिसकी संहति 10^3 gms है तथा त्रिज्या 20 cm है अपने केन्द्र से गुजरने वाली तथा वलय के तल के लम्बवत अक्ष के परितः 10 चक्कर प्रति सैकेंड की गति से घूम रहा है :

(i) घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण निकालो ।

(ii) अक्ष के परितः कोणीय संवेग क्या होगा ।

(iii) यदि इसी अक्ष के परितः कोणीय संवेग का मान 1×10^7 erg × sec से 10 sec में बढाया जाये तो आवश्यक बल आघूर्ण का मान बताओ ।

(iv) यदि यह बल आघूर्ण वलय के (ring) पर स्पर्श रेखा की दिशा में लगाये बल से उत्पन्न होता है, तो इस बल का मान भी ज्ञात करो ।

उत्तर : (i) जड़त्व आघूर्ण $I = MR^2$

$$= 10^3 \times 20 \times 20 = 4 \times 10^5 \text{ gm} \times \text{cm}^2$$

(ii) $L = I\omega$ परन्तु कोणीय वेग

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \times 10$$
$$= 20\pi \text{ rad/sec}$$

$$\therefore \quad L = 4 \times 10^5 \times 20 \times 3{\cdot}14 \text{ erg-sec}$$
$$= 2{\cdot}5 \times 10^7 \text{ erg-sec.}$$

(iii) बल आघूर्ण (Torque) K = कोणीय संवेग के परिवर्तन की दर

$$= \frac{\text{कोणीय संवेग में परिवर्तन}}{\text{समय}}$$

$$= \frac{1 \times 10^7}{10} = 1 \times 10^6 \text{ dyne} \times \text{cm}$$

(iv) चूंकि $|K| = |R \times F| = RF \sin 90 = RF$

$$\therefore \qquad F=\frac{K}{R}=\frac{1\times10^6}{20}=5\times10^4 \text{ dynes}$$

उदाहरण 4·2 एक इलेक्ट्रॉन जिसकी संहति $m=1\times10^{-27}$gms किसी परमाणु में न्यूक्लिअस के चारों ओर एक वृत्ताकार मार्ग में जिसकी त्रिज्या $R=4\times10^{-11}$ cm है, घूमता है। इलेक्ट्रॉन का कोणीय संवेग प्रयोगों के अनुसार

$\frac{1}{2}h$ $\left(\text{(जहाँ पर } h=\frac{\text{प्लांक स्थिरांक}}{2\pi}\right)=\frac{1}{2}\times10^{-27}$ erg-sec है।

इलेक्ट्रॉन के कोणीय संवेग के इस मान के लिये, इलेक्ट्रॉन का वृत्ताकार मार्ग में घूमने का वेग क्या होगा।

चूंकि कोणीय संवेग $=|R\times mv|=Rmv\sin 90=mvR$

[चूंकि इलेक्ट्रॉन का वेग वृत की स्पर्श रेखा की दिशा में है अतः $\vec{R}$ तथा $\vec{v}$ में $10°$ का कोंण है]

$$\therefore \qquad mvR=\frac{1}{2}h$$

$$\therefore \qquad v=\frac{h}{2mR}=\frac{10^{-27}}{2\times10^{-27}\times4\times10^{-11}}$$

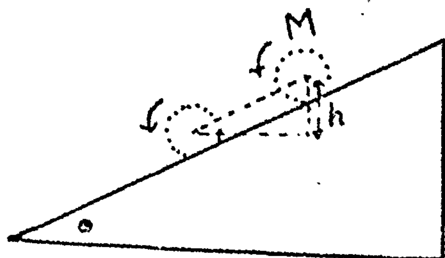
$$=1\cdot25\times10^{10} \text{ cm/sec}$$

उदाहरण 4·3 एक गोला किसी नत तल पर फिसले बगैर लुढ़क रहा है (rolling without slipping)। तल पर लुढ़कते हुये यदि गोला h ऊर्ध्वाधर दूरी नीचे उतर जाये, तो उस समय गोले के केन्द्र का वेग क्या होगा ?

उत्तर : माना कि गोले की संहति M त्रिज्या R है। माना कि गोले का केन्द्र नत तल पर किसी समय z ऊँचाई पर है तो ऊर्जा के संरक्षण के सिद्धान्त से

$$E=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I_0\,\omega^2+Mgz=\text{स्थिरांक}$$

चूंकि गोला फिसले बगैर लुढ़क रहा है, अतः गोले के, तल से, स्पर्श विन्दु का वेग



चित्र—4·9

v का मान शून्य होना चाहिये। परन्तु गोले के स्पर्श विन्दु का वेग v दो वेगों से

मिलकर बना है (i) गोले की स्थानान्तरीय गति V जो कि तल के झुकाव की ओर है (ii) गोले के घूर्णन के कारण स्पर्श बिन्दु का वेग तल के झुकाव के विपरीत दिशा मे, इस वेग का मान स्पष्टतया $R\omega$ है।

अतः $v = V - R\omega = 0$ (चूँकि गोला केवल लुढक रहा है)

अतः $\omega = \frac{V}{R}$

यदि प्रारम्भ मे गोले का वेग शून्य था तो

$E = mgz$ ...(B) $\left(\text{चूँकि } \frac{1}{2} MV^2 = 0, \frac{1}{2} I_0\omega^2 = 0\right)$

गोला जब नीचे उतरता है, तो माना इसका वेग V है
ऊर्जा के सरक्षण सिद्धान्त से

$$E = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_0\omega^2 + MgZ_1 \quad ...(c)$$

(B) में से (C) को घटाने पर

$$0 = Mg\ (Z - Z_1) - \frac{1}{2} MV^2 - \frac{1}{2} I_0\,\omega^2$$

अथवा $\frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_0\omega^2 = Mgh$ $(\because\ Z - Z_1 = h)$

परन्तु $\omega = \frac{V}{R}$

$$\therefore\ \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_0\frac{V^2}{R^2} = Mgh$$

$$\frac{1}{2} MV^2\left[1 + \frac{I_0}{MR^2}\right] = Mgh$$

$\therefore\ V^2 = \dfrac{2\ Mgh}{M\left(1 + \frac{I_0}{MR^2}\right)}$ तथा $V = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 + \frac{I_0}{MR^2}}}$

स्पष्ट है V का मान $\sqrt{2gh}$ से कम है।

उदाहरण 4·4 छड का गुरुत्व केन्द्र से गुजरने

लम्बाई के लम्बवत अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $\frac{Ml^2}{12}$ होता है। छड़ का उसके सिरे से गुजरने वाली समान्तर अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण क्या होगा।

समान्तर अक्षों के प्रमेय से

$I = I_0 + Ma^2$ यहाँ पर $a = \frac{l}{2}$

$$I_0 = \frac{Ml^2}{12}$$

अतः

$$I = \frac{Ml^2}{12} + M.\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$= \frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{3}$$

उदाहरण 4.5 एक ठोस वेलन किसी नत तल पर फिसले वगैर लुढ़क रहा है। वेलन की घूर्णन गतिज ऊर्जा तथा स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा की निष्पत्ति निकालिये।

$$(K.E.)_{Rot.} = \frac{1}{2} I\omega^2$$

(i) चूंकि वेलन का उसकी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $= \frac{1}{2} MR^2$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} MR^2\right)\frac{V^2}{R^2}$$

(ii) चूंकि वेलन फिसले वगैर लुढ़क रहा है अतः $V = R\omega$

$$= \frac{1}{4} MV^2$$

$$(K.E)_{Trans.} = \frac{1}{2} MV^2 \quad \therefore \quad \frac{(K{\cdot}E)_{Rot}}{(K{\cdot}E)_{Trans}} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 4·6 एक पतली लम्बी छड़ के दोनों सिरों पर 500 gms के भार रखे हुये हैं। यदि छड़ की लम्बाई 200 cms हो तो छड़ का उसके गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाली तथा छड़ के लम्बवत अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण निकालो।

$$I_0 = M\left(\frac{l}{2}\right)^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{2} = \frac{500 \times 200 \times 200}{2}$$

$$= 10^7 \text{ gm} \times \text{cm}^2$$

उदाहरण 4·7 चकती की घूर्णन त्रिज्या चकती के केन्द्र से गुजरने वाली तथा इसके धरातल के लम्बवत अक्ष के परित: निकालो। चकती की सहति 100 gm है तथा त्रिज्या 5 cm है।

चकती का जडत्व आघूर्ण (दी हुई अक्ष के परित:)

$$= \frac{MR^2}{2}$$

यदि दी हुई अक्ष के परित: घूर्णन त्रिज्या K है।

तो घूर्णन त्रिज्या की परिभाषानुसार

$$MK^2 = \frac{MR^2}{2}$$

$$\therefore \quad K = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 3{\cdot}5 \text{ cm}$$

उदाहरण 4·8 200 gm सहति की एक दृण वस्तु अपने गुरुत्व केन्द्र से 20 cm की दूरी पर एक क्षैतिज अक्ष के परित: दोलन कर रही है। यदि तुल्य सरल लोलक की लम्बाई 35 cm है तो वस्तु का दोलन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण निकालो। वस्तु का गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाली समान्तर अक्ष के परित. जड़त्व आघूर्ण भी निकालो।

उत्तर : यदि l=तुल्य सरल लोलक की लम्बाई

(a) तो $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}$

दिया है : $l = 35$ cm, $a = 20$ cm, $m = 200$ gm

$$\therefore \quad 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}$$

या $$\frac{l}{g} = \frac{I}{mga}$$

या $I = mal = 200 \times 20 \times 35 = 1{\cdot}4 \times 10^5 \text{ gm} \times \text{cm}^2$

(b) समान्तर अक्षों के प्रमेय से

$$I = I_0 + ma^2$$

$$\therefore \quad I_0 = 1{\cdot}4 \times 10^5 - 200 \times 400$$

$$= 10^4\,[14 - 8] = 6 \times 10^4 \text{ gm} \times \text{cm}^2$$

उदाहरण 4·9 20 cm त्रिज्या की एक चकती अपनी परिधि से गुजरने वाली क्षैतिज अक्ष के परितः दोलन कर रही है। दोलन काल का मान ज्ञात करो।

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{I_0}{ma} + a}{g}}$$

$$I_0 = \frac{mR^2}{2}\ ;\ a = R$$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{mR^2}{2mR} + R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{3 \times 20}{2 \times 980}} = 1{\cdot}098 \text{ sec}$$

उदाहरण 4·10 120 cm की लम्बी पतली समरूप छड़ अपने एक सिरे से लटकी हुई क्षैतिज अक्ष के परितः दोलन कर रही है। उन सभी विन्दुओं की स्थिति वताओ जिन के परितः छड़ का दोलन काल समान है।

हम जानते हैं कि उन दो विन्दुओं की बीच की दूरी तुल्य सरल लोलक की लम्बाई के वरावर होती है, जिनके परितः छड़ का दोलन काल समान होता है।

परन्तु तुल्य सरल लोलक की लम्बाई $l = a + I_0/ma$

जहाँ पर a = क्षैतिज अक्ष तथा गुरुत्व केन्द्र के बीच की दूरी

स्पष्ट है, यदि छड़ को गुरुत्व केन्द्र के दूसरी तरफ $\frac{I_0}{ma}$ दूरी पर (गुरुत्व केन्द्र से) लटकाया जाय तो दोलन काल वही रहेगा।

$$\frac{I_0}{ma} = \frac{mL^2}{12 \times m \times L/2}$$

परन्तु $$= \frac{L}{6} = \frac{120}{6} = 20\text{cm}$$

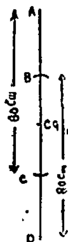
[चूँकि $I_0 = \frac{mL^2}{12}$

$a = \frac{l}{2}$

L = छड़ की लम्बाई

अत: दोनो बिन्दुओं के बीच की दूरी जिसके परित: दोलन काल समान है :

$$=a+\frac{I_0}{ma}\quad 60+20=80\ \text{cms}$$



चित्र—4·10

स्पष्ट है कि यदि छड़ दूसरी तरफ के सिरे से लटकाई जाये तो भी दोलन वही रहेगा ! यह चित्र से अधिक स्पष्ट है ।

स्पष्ट है कि A, B, C, D वो चार बिन्दु हैं जिनके परित: दोलन काल समान रहेगा ।

प्रश्न

(1) किसी पिण्ड की स्थानान्तरीय तथा घूर्णी गति से आप क्या समझते हो ? सिद्ध करो कि $v=r\omega$ । क्या ω को एक वेक्टर से प्रदर्शित किया जा सकता है ? उत्तर स्पष्ट करो ।

(2) सिद्ध करो कि दृढ़ वस्तु की गति निम्न दो गतियों की सयुक्त गति है (i) वस्तु के किसी बिन्दु O की स्थानान्तरण गति (ii) बिन्दु O के परित: घूर्णन । यह भी स्पष्ट करो कि यह घूर्णन सभी बिन्दुओं के लिये समान है ।

(3) दृढ पिण्ड की गतिज ऊर्जा, सिद्ध करोकि, निम्न सूत्र से दी जाती है ·

$$E_{k_{in}}=\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

अत: इस सूत्र से समान्तर अक्षों की प्रमेय

$I=I_0+Ma^2$ भी स्थापित करो ?

(4) किसी दृढ पिण्ड का किसी अक्ष Z—के परित: कोणीय संवेग का मान निकालो ? कोणीय संवेग के संरक्षण का नियम उदाहरण सहित स्पष्ट करो ।

(5) (a) बल आघूर्ण की परिभाषा दो ! सिद्ध करो कि

$$\vec{K}=I\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

(b) यदि कोई वस्तु जो कि किसी अक्ष Z— के परित: घूम सकती है, परन्तु वह सम्यावस्था में है, स्थापित करो कि यह तभी सभव है जबकि

$$K_{1Z}+K_{2Z}+\ldots\ldots=0$$

(6) (a) जड़त्व आघूर्ण की परिभाषा दो । इसका भौतिक महत्व क्या है । यह किन भौतिक राशियों पर निर्भर करता है ।

(13) 4400 न्यूटन मीटर का बल आघूर्ण लगाने पर एक गति पालक चक्र का कोणीय वेग 1 मिनट में 20 चक्कर प्रति से॰ से बढ़कर 30 चक्कर प्रति से॰ हो जाता है (अ) कोणीय-त्वरण (ब) गतिपालक चक्र का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।

(अ) $\frac{\pi}{3}$ rad/sec^2 (ब) 4200 कि॰ग्रा॰ × मी॰^{2}

(14) दो कण जिनके द्रव्यमान m_1 व m_2 हैं, एक भारहीन छड़ के सिरों पर स्थित हैं। यदि छड़ की लम्बाई r हो तो इस तन्त्र का इसके द्रव्यमान केन्द्र से होकर गुजरने वाली व छड़ के लम्बवत घूर्णन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण का परिकलन करो।

उत्तर : $I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2$

(15) एक धातु की छड़ अपने गुरुत्वकेन्द्र के एक ही तरफ क्रमशः दो क्षैतिज अक्षों के परितः दोलनकाल समान है तथा इसका मान प्रत्येक अक्ष के परितः 1·42 sec है। यदि गुरुत्वकेन्द्र से इन अक्षों की दूरी क्रमशः 10·8 cm व 39·2 cm हो तो (i) g का मान निकालो (ii) गुरुत्वकेन्द्र से गुजरने वाली समान्तर अक्ष के परितः घूर्णन त्रिज्या K का मान निकालो।

Hint : स्पष्ट है कि $a = 39 \cdot 2$ cm, $\frac{k^2}{a} = 10 \cdot 8$;

$\therefore$ तुल्य सरल लोलक की लम्बाई $l = 39 \cdot 2 + 10 \cdot 8 = 50$ cm

$\therefore$ $1 \cdot 42 = 2\pi\sqrt{\frac{50}{g}}$ इत्यादि।

उत्तर : (i) $g = 979 \cdot 2$ cm/sec^2 (ii) $k = 20 \cdot 58$ cm

(16) एक पतली समरूप छड़ जिसकी संहति 1000 gm है, केन्द्र से 40 cm दूरी पर अक्ष के परितः दोलन करता है तथा दोलनकाल 7·48 sec है, यदि यही छड़ केन्द्र से 10 cm दूरी पर अक्ष के परितः दोलन करती है तो दोलन काल 1·67 sec है। (i) g का मान निकालो (ii) केन्द्र से गुजरने वाली समान्तर अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण (iii) छड़ की लम्बाई भी निकालो।

उत्तर (i) 990 cm/sec^2 (ii) $6 \cdot 02 \times 10^5$ gm × cm^2 (iii) 85 cm

---

5 ऊष्मागतिकी का शून्यवाँ नियम
(Zeroth Law of Thermodynamics)

5·1. विषय प्रवेश: ऊष्मागतिकी का अभिप्राय

कोई भी तन्त्र (ठोस, द्रव, गैस) अणुओं से मिलकर बना है। ये अणु निरन्तर गतिमान हैं तथा प्रमुख बात यह है कि अणुओं की यह गति अनियमित (random) है। किसी भी तन्त्र के ऊष्मा सम्बन्धी गुण अणुओं की इसी गति का ही परिणाम है। उदाहरणार्थ बर्तन मे बन्द किसी गैस का दाब अणुओं की बर्तन की दीवाल से हुई टक्कर के फलस्वरूप दीवाल को दिये गये संवेग के ही कारण है। तन्त्र के ऐसे गुण जिन्हे हम तन्त्र की आणविक रचना की जानकारी के बगैर भी प्रयोगशाला में नाप सकते हैं। तन्त्र के स्थूल गुण (Macroscopic properties) कहलाते है। गैस का दाब, आयतन, ताप ऐसी ही भौतिक राशियां हैं। ऊष्मागतिकी में हम तन्त्र के उन स्थूल गुणों का अध्ययन करते है जो कि ताप के परिवर्तन पर निर्भर करते हैं। महत्वपूर्ण बात यह है कि ऊष्मागतिकी के अध्ययन में इस बात का कोई ध्यान नहीं रखा जाता कि तन्त्र की संरचना आणविक है। जसाकि ऊपर लिखा जा चुका है कि यद्यपि गैस का दाब, आयतन, ताप की व्युत्पत्ति अणुओं की अनियमित गति के ही कारण है, परन्तु आपस में दाब, आयतन, ताप इत्यादि राशियां किस प्रकार सम्बन्धित है, इनके इस सम्बन्ध को प्रदर्शित करने के लिये इसकी कोई आवश्यकता नहीं कि पदार्थ की अणु संरचना की विस्तृत जानकारी हो ही। दाब, आयतन, ताप में से, यदि किसी तन्त्र के लिये इसमें से किन्ही दो का मान ज्ञात हो तो तीसरी भौतिक राशि का मान ज्ञात किया जा सकता है। किसी भी वस्तु के दाब, ताप, आयतन के सम्बन्ध को प्रदर्शित करने वाले समीकरण को वस्तु का

अवस्था समीकरण (Equation of State) कहते हैं। यद्यपि अणुओं की गति अनियमित है, परन्तु पदार्थ के स्थूल गुण कुछ निश्चित नियमानुसार होते हैं। इन नियमों को ऊष्मागतिकी के नियम कहते हैं। पदार्थ के स्थूल गुणों की आणविक व्याख्या (atomistic explanation) ऊष्मागतिकी की ही दूसरी शाखा सांख्यिकी भौतिकी (Statistical Physics) में की जाती है। निःसन्देह ऊष्मागतिकी के नियमों का मूल आधार सांख्यिकी भौतिकी ही है।

5·2. तापीय साम्य—तापीय साम्य सम्बन्धी ऊष्मागतिकी का नियम (Thermal Equilibrium—Zeroth Law of Thermodynamics)

यदि हम दो वस्तुओं को आपस में एक दूसरे से स्पर्श करते हुये रखें तो दोनों में स्थित अणुओं की टक्कर के फलस्वरूप दोनों आपस में ऊर्जा का आदान-प्रदान करेंगी। ऊर्जा का यह आदान प्रदान जब तक जारी रहता है जब तक कि दोनों वस्तु एक निश्चित अवस्था में न पहुँच जायें। वह यह अवस्था है जिसमें कि दोनों वस्तुओं के स्थूल गुण अपरिवर्तित रहते है, अर्थात् दोनों वस्तुओं में किसी भी प्रकार का कोई परिवर्तन आभास नही होता। इसी अवस्था को तापीय साम्य (Thermal equilibrium) कहते है। यहाँ पर यह स्पष्ट कर देना आवश्यक है कि तन्त्र के अणु साम्यावस्था में गतिमान रहते है तथा उसकी प्रतिक्षण स्थिति तथा वेग बदलता रहता है परन्तु महत्वपूर्ण बात यह है कि तापीय सम्यावस्था में तन्त्र के स्थूल गुण (P, V, T) समय के साथ परिवर्तन नही होते अर्थात् चाहे कितनी ही देर तक क्यो न प्रतीक्षा की जाये परन्तु तन्त्र के स्थूल गुणों मे कोई भी परिवर्तन आभास नही होता जिन्हें अणुओं की आन्तरिक गति का लब्ध परिणाम कह सकते इसके विपरीत सम्यावस्था में भी यदि हम तन्त्र का अतिसूक्ष्म विश्लेषण करें तो प्रत्येक अणु की स्थिति प्रतिक्षण बदलती मालूम पड़ती है। तापीय साम्यवस्था में तन्त्र का प्रत्येक भाग अपने ही अन्य भागों के सापेक्ष विरामावस्था मे होता है, अर्थात् किसी भी प्रकार की कोई तापीय क्रिया नही होती।

साम्यावस्था में दोनों वस्तुओं के ताप समान होते हैं, परन्तु ताप क्या है अर्थात् ताप की धारणा से हम क्या समझते हैं, इसका उत्तर देने के लिये हम एक प्रायोगिक सत्य जिसे तापीय साम्य सम्बन्धी ऊष्मागतिकी के नियम (*Zeroth law* of thermodynamics) की मदद लेते हैं। इस नियमानुसार :

यदि तीन वस्तु A, B, C में से यदि A और B किसी तीसरी वस्तु C के साथ यदि अलग-अलग तापीय साम्य में हैं तो A और B भी आपस में तापीय साम्य में होंगे।

अर्थात् प्रत्येक ऊष्मागतिज तन्त्र (जो कि तापीय साम्य में है) के [illegible]

एक स्केलर राशि होती है जिसे उस तन्त्र का ताप कहते हैं तथा इसका मौलिक गुण यह है कि तापीय साम्य में तन्त्र के प्रत्येक हिस्से का ताप समान होता है।

दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि तापीय साम्य का नियम हमको ताप की धारणा से अवगत कराता है। यदि दो वस्तु A तथा B यदि तापीय साम्य में हैं तो यह आवश्यक है कि A का ताप तथा B का ताप समान हो।

5·3. ताप का मापन (Measurement of Temperature)

हमने तापीय साम्य सम्बन्धी ऊष्मा गतिकी के नियम से यह पाया कि प्रत्येक ऊष्मागतिक तन्त्र से सम्बद्ध एक स्केलर राशि होती है जिसे हम उस तन्त्र का ताप कहते हैं तथा साम्यावस्था में तन्त्र के प्रत्येक हिस्से का ताप समान होता है। इस ताप को हम ऐसे भौतिक गुण से नाप सकते है जो कि ताप के बदलने से बदलता हो। उदाहरणार्थ कोई वस्तु A है तथा हमें इसके ताप को नापना है। यदि हम पारे का तापमापी लें जिसमें कि एक केशनली में कम दाब पर पारा भरा हुआ है तथा यह वस्तु A से स्पर्श करे तो पारे के तापमापी मे पारे की लम्बाई बढ़ती है, तापीय साम्य में पारे की यह लम्बाई स्थिर हो जाती है अतः पारे की लम्बाई वस्तु A के ताप का माप है। यदि वस्तु A का ताप बदल जाये तो पारे की लम्बाई भी बदल जायेगी तथा वस्तु के ताप के एक निश्चित परिवर्तन के लिये पारे की लम्बाई में परिवर्तन भी निश्चित है, अर्थात् वस्तु के ताप तथा पारे की लम्बाई में एक रेखीय सम्बन्ध है।

हम इसी वस्तु का ताप स्थिर दाब पर गैस के आयतन से भी नाप सकते हैं या हम स्थिर आयतन पर गैस के दाब से भी नाप सकते हैं या किसी तार के विद्युत प्रतिरोध से या किसी छड़ की लम्बाई में वृद्धि इत्यादि से। कहने का तात्पर्य यह है कि वस्तु का ताप T (X) हम किसी भौतिक राशि X से नाप सकते हैं जिसका ताप के साथ रेखीय परिवर्तन (Linear Variation) होता है, तथा साम्यावस्था में X का एक निश्चित मान होता हैं, उदाहरणार्थ X-पारे की लम्बाई हो सकती है या गैस का आयतन या गैस का दाब या तार का प्रतिरोध आदि। प्रमुख बात यह है कि इस तरह से नापा गया ताप का माप स्वेच्छ (Arbitrary) है क्योंकि यह इस बात पर निर्भर करता है कि हम ताप को नापने के लिये कौन सा तापमापी पदार्थ (Thermometric Substance) प्रयोग कर रहे हैं, तथा उसके कौन से गुण से हम ताप का माप ले रहे हैं। इस प्रकार से परिभाषित ताप का पैमाना (Scale of Temperature) पूर्णतः स्वेच्छ ही है तथा किसी पदार्थ के विशिष्ट गुण पर निर्भर करता है अतः इसको हम एक व्यापक तथा मौलिक ताप के पैमाने के रूप में नहीं ले सकते। आगे चलकर हम ताप को इस प्रकार परिभाषित करेंगे जो किसी भी रूप

मे इस पर निर्भर नहीं करेगा कि हम कौनसा तापमापी पदार्थ प्रयोग कर रहे हैं। इस तरह से परिमापित ताप जो कि वस्तुओं के उस व्यापक गुण से नापा जायेगा जो कि तापीय साम्य मे सभी वस्तुओं के लिये समान है अर्थात् किसी वस्तु विशेष के विशेष गुण पर निर्भर नही करता. इस तरह के परिमापित ताप के पैमाने को परम ताप मापक्रम (Absolute Scale of Temperature) कहते हैं। इस पैमाने पर ही नापे गये ताप की भौतिक सार्थकता (Physical Significance) है। पारे की लम्बाई के रूप मे नापा गया ताप या इसी प्रकार के किसी अन्य तापमापी से नापा गया ताप पूर्ण रूपेण आनुभाविक (Empirical) होगा।

5·4. ताप का परम मापक्रम (Absolute Scale of Temperature)

जैसा कि ऊपर से स्पष्ट है कि ताप की भौतिक परिभाषा वस्तुओं के उस भौतिक गुण से परिमापित हो जो कि वस्तु की भौतिक अवस्था को प्रदर्शित करने के साथ इसका मान तापीय साम्य मे स्थित सभी वस्तुओ के लिये समान भी हो। इस प्रकार के ताप की धारणा को परम ताप कहते हैं, तथा इसका सही निरूपण ऊष्मागतिकी के द्वितीय नियम से किया जाता है। यहाँ पर हम इसी ताप की धारणा को इसके ही एक दूसरे गुण से प्रतिपादित करेंगे। वस्तु मे निहित अणुओं की माध्य स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा (Mean Kinetic energy of translation) की प्रमुख *विशेषता यह है कि तापीय साम्य में स्थित वस्तुओं के अणुओं की माध्य स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा का मान समान होता है।* उनके अणुओ मे सम्पर्क और आपसी टक्कर के फलस्वरूप ऊर्जा का आदान प्रदान हो सकता है, परन्तु सामान्य प्रायोगिक समय-अन्तराल मे कुल मिलाकर ऊर्जा का आदान प्रदान (Net Exchange of Energy) शून्य ही होगा। अतः ताप को अणुओ की इस माध्य गतिज-ऊर्जा के द्वारा ही नापा जाना चाहिये। हम ताप को इस प्रकार से परिमापित कर सकते हैं कि यह माध्य गतिज ऊर्जा ताप के समानुपाती हो, वस्तुतः हम इस माध्य गतिज ऊर्जा को भी 'ताप' मान सकते है। *साधारणतया, अणुओ की माध्य स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा* का दो तिहाई किसी वस्तु का परम ताप कहलाता है :

$$T = \frac{2}{3}\,\overline{\tfrac{1}{2}mv^2} \qquad (5{\cdot}1)$$

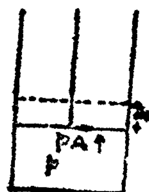
जहाँ पर $\overline{\frac{1}{2}mv^2}$ अणुओ की गतिज ऊर्जा का माध्य है, m कण की संहति तथा v वेग है, ऊपर खींची हुई रेखा *माध्य को प्रदर्शित करती है। माध्य से हमारा* यहाँ पर यह तात्पर्य है कि वस्तु में निहित सभी अणुओ की किसी एक क्षण पर गतिज ऊर्जाओ का माध्य या एक ही अणु को अलग-अलग समय पर गतिज ऊर्जा का माध्य, दोनो परिभाषा समतुल्य हैं।

समीकरण 5·1 से स्पष्ट है कि ताप की विमा ऊर्जा के f

6 ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम
(First Law of Thermodynamics)

6·1. तन्त्र के आयतन प्रसार में तन्त्र के द्वारा किया गया कार्य (Work done by a system when it expands)

जब कोई वस्तु आयतन में फैलती है तो यह अपने आयतन प्रसारण के फलस्वरूप स्वयं के सम्पर्क में स्थित वातावरण की अन्य वस्तुओं पर बल लगाती है तथा इन्हें विस्थापित करती है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि इस वस्तु के द्वारा अपने सम्पर्क में स्थित अन्य वस्तुओं पर कार्य किया गया। उदाहरणार्थ चित्र (6·1) में एक बेलनाकार बर्तन में गैस भरी हुई है, यदि इस गैस का किसी कारणवश आयतन में प्रसार हो (उदाहरणार्थ गैस के ताप में वृद्धि के कारण) तो यह गैस अपने सम्पर्क में स्थित पिस्टन को ऊपर धकेलने में कुछ कार्य करेगी। मानाकि गैस के इस प्रसार के कारण यदि पिस्टन अतिसूक्ष्म दूरी dh से विस्थापित हो तो गैस के प्रसार के कारण गैस के द्वारा पिस्टन को dh दूरी विस्थापित करने में किया गया अतिसूक्ष्म कार्य



चित्र—6·1

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dh}$$

$\therefore \quad dW = \vec{F}\, d\vec{h}$ (चूंकि $\vec{F}$ तथा $\vec{dh}$ एक ही दिशा में हैं)

यदि गैस का दाब p से प्रदर्शित किया जाय, तथा पिस्टन का क्षेत्रफल A हो तो

$$F = pA$$

$$\therefore \quad dW = pAdh$$

स्पष्ट ही Adh = गैस के आयतन में वृद्धि = dV

$$\therefore \quad \boxed{dW = pdV} \qquad \cdots(6{\cdot}1)$$

उपर्युक्त सूत्र अत्यन्त महत्वपूर्ण है तथा किसी भी वस्तु (तन्त्र) के द्वारा आयतन में प्रसार के कारण किया गया कार्य को परिमापित करता है। इस सूत्र से यह स्पष्ट है कि किसी भी वस्तु के द्वारा किया गया कार्य केवल वस्तु के कुल आयतन में वृद्धि पर ही निर्भर करता है न कि वस्तु के आकार (Shape) इत्यादि पर। ठोस वस्तुओं के सन्दर्भ मे कार्य वस्तु के आकार पर भी निर्भर करता है।

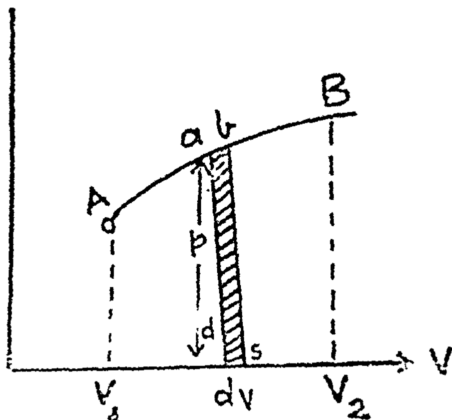
यदि $dV > 0$ अर्थात यदि वस्तु के आयतन मे वृद्धि होती है तो dW भी धनात्मक है अर्थात् वस्तु के द्वारा सम्पर्क में स्थित अन्य वस्तुओं पर कार्य किया गया।

यदि dV ऋणात्मक है अर्थात् $dV < 0$ अर्थात् वस्तु को दबाया जाता है जिसके कारण वस्तु के आयतन मे सकुचन होता है तो इस स्थिति मे वस्तु के द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक है अत: इस स्थिति में वस्तु के ऊपर सम्पर्क मे स्थित वातावरण की अन्य वस्तुओं द्वारा कार्य किया गया।

6.2. कार्य का V-p ग्राफ पर प्रदर्शन

जैसा कि हम पिछले अध्याय मे देख चुके हैं कि किसी भी ऊष्मागतिक तन्त्र की अवस्था तन्त्र के दाब p, आयतन, V, ताप T से प्रदर्शित की जा सकती है। p,V,T में से कोई दो राशियाँ ही तन्त्र की अवस्था करने के लिये पर्याप्त हैं, तीसरी राशि का मान इन दो राशियों पर ही निर्भर करता है। यदि तन्त्र की किसी अवस्था A मे आयतन V है तथा दाब p है, यदि इसे ऐसे ग्राफ पर प्रदर्शित किया जाये जिसमे कि x-अक्ष के अनुदिश तन्त्र का आयतन प्रदर्शित किया जाये, तथा y-अक्ष के अनुदिश गैस का दाब तो तन्त्र की किसी निश्चित अवस्था A को (V-p) ग्राफ पर किसी निश्चित बिन्दु A द्वारा प्रदर्शित किया जायेगा (चित्र 6·2, । माना कि तंत्र की अवस्था निरन्तर बदल रही है अर्थात् किसी अमुक क्षण पर तन्त्र की अवस्था V-P ग्राफ पर A मे प्रदर्शित की जाये, किसी दूसरे क्षण

तंत्र की अवस्था A′ से प्रदर्शित की जाये, ठीक इसी प्रकार A″, A‴......इत्यादि तंत्र की तात्क्षणिक (instantaneous) अवस्थाएँ हों तो तंत्र की अवस्था में इस



चित्र—6·2

परिवर्तन को V-P ग्राफ पर वक्र AB द्वारा प्रदर्शित किया जायेगा (चित्र 6·2)। तंत्र की प्रारम्भिक अवस्था A है तथा अन्तिम अवस्था B है। चित्र से स्पष्ट है कि तंत्र के आयतन में अतिसूक्ष्म वृद्धि dv के कारण तंत्र के द्वारा किया गया कार्य

$$dW = Pdv$$

= V-P चित्र में आयत a b c d का क्षेत्रफल

अतः तंत्र के द्वारा V_1 से V_2 तक फैलने में किया गया कुल कार्य

W = a b c d जैसे आयतों के क्षेत्रफलों का योग

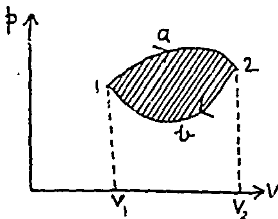
= V-P ग्राफ पर क्षेत्र ABV_2V_1 ....(6·2)

$$\therefore \quad \boxed{W = \int_{V_1}^{V_2} pdv = \text{क्षेत्र } ABV_2V_1}$$

स्पष्ट है कि W का मान A से B तक के पहुँचने के मार्ग पर निर्भर करता है। अर्थात् तंत्र की किसी प्रारम्भिक अवस्था A से इसकी किसी अन्तिम अवस्था B तक के परिवर्तन में तंत्र के द्वारा किया गया कार्य न केवल इस बात पर निर्भर करता है कि तंत्र की प्रारम्भिक एवं अन्तिम अवस्थाऐं क्या हैं बल्कि यह इस पर भी निर्भर करता है कि हम तंत्र की प्रारम्भिक अवस्था A से अन्तिम अवस्था B तक किस प्रकार से परिवर्तन करते हैं। अतः तंत्र के द्वारा किया गया कार्य W A से B तक **पहुँचने के मार्ग के ऊपर निर्भर करने** वाली राशि है। भिन्न भिन्न प्रक्रमों (Processes) में तंत्र के द्वारा किये गये कार्य का परिमाण भी भिन्न भिन्न होता है।

उदाहरणार्थ :

Case I. चक्रीयप्रक्रम (Cyclic Process)—यदि तंत्र किसी प्रारम्भिक अवस्था 1 से चलकर पुनः उसी अवस्था में आ जाये तो इस प्रकार के परिवर्तन को चक्रीय रूपान्तरण (Cyclic Transformation) कहते हैं। उदाहरणार्थ चित्र (6·3) में V-P ग्राफ पर किसी गैस की अवस्था का रूपान्तरण का प्रक्रम माना कि एक बन्द



चित्र—6·3

वक्र 1 a 2 b 1 से प्रदर्शित किया जा सकता है। चित्र में स्पष्ट है कि

गैस 1a 2 वक्र के अनुदिश आयतन में फैलती है अतः गैस को अवस्था 1 से मार्ग के अनुदिश अवस्था 2 तक आने में गैस के द्वारा धनात्मक कार्य

$$W_{1\,a\,2} = \text{क्षेत्र } 1\ a\ 2\ V_2 V_1$$

गैस 2 b 1 वक्र के अनुदिश आयतन में संकुचित होती है अतः 2 b 1 वक्र के अनुदिश गैस के द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक है

$$W_{2\,b\,1} = -\text{क्षेत्र } 2\ b\ 1\ [illegible]$$

इसलिये चक्रीय प्रक्रम 1 a 2 b 1 में [illegible]

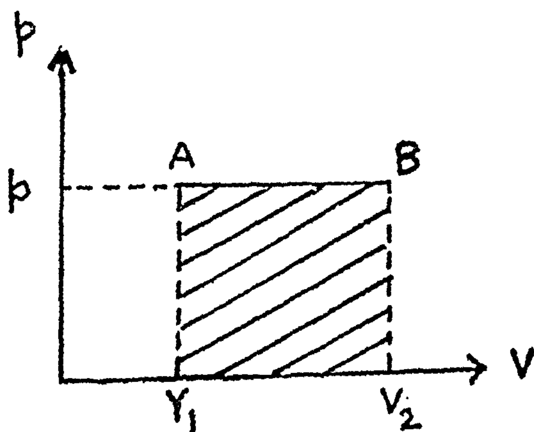
W = [illegible]

अथवा [illegible]

यह चित्र में [illegible]
किया गया कार्य V-P [illegible]

Case 2. [illegible]

से परिवर्तन कि तंत्र का दाब सदैव स्थिर रहे, समदाबीय प्रक्रम कहलाते हैं। (चित्र (6·4) में V-P ग्राफ पर किसी तंत्र का समदाबीय प्रक्रम प्रदर्शित किया गया है। तंत्र का दाब P सदैव स्थिर रहता है, तंत्र के द्वारा आयतन V_1 से आयतन V_2



चित्र—6·4

तक फैलने में किया गया कार्य :

$$W_{A \to B} = \text{क्षेत्र } ABV_2V_1$$

$$= P\,(V_2 - V_1) \qquad \text{....(6·4)}$$

[∴ आयत का क्षेत्र = ल० × चौ०, लम्बाई = P, चौ० = $V_2 - V_1$]

= दाब × आयतन में वृद्धि

Case iii. समतापीय प्रक्रम (Isothermal Process)—तंत्र के दाब तथा आयतन में इस प्रकार से परिवर्तन ताकि तंत्र का ताप सदैव स्थिर रहे, समतापीय प्रक्रम कहलाते हैं। समतापीय प्रक्रम में किसी आदर्श गैस (कम दाब पर कोई भी गैस, आदर्श गैस के समान व्यवहार करती है) के लिये दाब तथा आयतन का गुणा सदैव निश्चित होता है तथा इसका मान गैस की संहति पर निर्भर करता है। समतापीय प्रक्रम में हम किसी आदर्श गैस के द्वारा आयतन में वृद्धि होने पर किये गये कार्य की गणना करेंगे।

1 ग्राम अणु के लिये गैस समीकरण द्वारा

$$p = \frac{RT}{V}$$

अतः $dW = Pdv = \frac{RT}{V}dv = RT\frac{dv}{V}$

$$= RTd\ (\log_e V)$$

$$\left[\because \quad d\ (\log_e V) = \frac{dV}{V} \right]$$

चूँकि T स्थिर है ।

$$dW = d\ (RT \log_e V) \quad ....(6 \cdot 5)$$

अतः V_1 से V_2 तक फैलने में गैस के द्वारा किया गया कार्य प्रारम्भिक एवं अन्तिम अवस्था मे RT $\log_e$ V के मान के अन्तर के बराबर होता है ·

$$W = RT \log_e V_2 - RT \log_e V_1$$

$$= RT \log_e \frac{V_2}{V_1} \quad ...(6 \cdot 6)$$

नोट : समीकरण 6.5 में $dw = d\ (RT \log_e V)$ मे लिखा गया है । d चिन्ह सूक्ष्म परिवर्तन को प्रदर्शित करता है । d (RT $\log_e$ V) के मान में अति सूक्ष्म परिवर्तन । अतः समतापीय प्रक्रम मे गैस के द्वारा किया गया अनि सूक्ष्म कार्य $dW = d(RT\log_e V)$ अर्थात् RT $\log_e$V के मान मे अति सूक्ष्म परिवर्तन के बराबर होता है । इसलिये गैस के द्वारा किया गया कुल कार्य RT $\log_e$ V के अन्तिम एव प्रारम्भिक मान के अन्तर पर निर्भर करता है । दूसरे शब्दों में $W = RT \log_e V_2 - RT \log_e V_1$

Case IV समआयतनिक प्रक्रम (Isochore or Isometric Transformation)— किसी भी तन्त्र का इस प्रकार से रूपान्तरण ताकि तन्त्र के द्वारा किये गये बाह्य कार्य का मान शून्य हो । तो रूपान्तरण के इस प्रकार के प्रक्रम को समआयतनिक प्रक्रम कहते हैं मानाकि dW उस अति सूक्ष्म कार्य को प्रदर्शित करता है जो कि तन्त्र के द्वारा उसके अति सूक्ष्म रूपान्तरण मे किया गया हो, अत. समआयतनिक प्रक्रम की परिभाषानुसार

$$dW = pdV = 0$$

अत. $\quad dV = 0$

समाकलन द्वारा $\quad V =$ स्थिर

अतः समआयतनिक प्रक्रम मे तन्त्र का आयतन अपरिवर्तित रहता है । यही कारण है कि ऐसे प्रक्रम को समआयतनिक प्रक्रम के नाम से जाना जाता है । परन्तु समआयतनिक प्रक्रम की व्यापक परिभाषानुसार तन्त्र के द्वारा किया गया बाह्य कार्य

dW=0, और यह परिभाषा तब भी लागू होती है जबकि dW को pdV से प्रदर्शित नहीं किया जा सकता।

6·3. कार्य और ऊष्मा; (ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम)

ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम वास्तव में ऊर्जा के संरक्षण का ही नियम है, परन्तु इस नियम की महत्वपूर्ण विशेषता इस तथ्य में है कि यह ऊष्मा की महत्वपूर्ण भूमिका को परिभाषित करता है। इस महत्वपूर्ण तथ्य को समझने के लिये हम एक ऐसे तन्त्र की कल्पना करते हैं जो पूर्ण रूपेण अपने वाह्य वातावरण से विलगित (Isolated) हो अर्थात् तन्त्र तथा वातावरण के मध्य किसी भी प्रकार का ऊर्जा का आदान प्रदान नहीं हो रहा यदि इस तन्त्र के आयतन में प्रसार होता है तो स्पष्ट है कि तन्त्र के द्वारा फैलने में किया गया कार्य तन्त्र की आन्तरिक ऊर्जा में ह्रास (Decrease) के बराबर होगा। तन्त्र की आन्तरिक ऊर्जा उसके अणुओं की तापीयगतिज ऊर्जा तथा अणुओं की अन्योन्य क्रिया के फलस्वरूप स्थितिज ऊर्जा के योग के बराबर होती है। यदि आन्तरिक ऊर्जा को U से प्रदर्शित किया जाये तो

तन्त्र की आन्तरिक ऊर्जा में ह्रास=तन्त्र के द्वारा फैलने में किया गया कार्य

यदि U_A =तन्त्र की प्रारम्भिक अवस्था A में आन्तरिक ऊर्जा

U_B =तन्त्र की किसी अन्य अवस्था B में आन्तरिक ऊर्जा

W=तन्त्र के द्वारा किया गया कार्य

तो ऊर्जा के सरक्षण के नियमानुसार

$$U_A - U_B = W$$

अथवा $$U_B - U_A = -W$$

परन्तु यदि यह तन्त्र वातावरण से विलगित नहीं है तो प्रयोगों द्वारा पाया गया कि यह आवश्यक नहीं है कि तन्त्र की आन्तरिक ऊर्जा से परिवर्तन तन्त्र के द्वारा किये गये कार्य के बराबर हो ही। अतः यदि ऊर्जा के संरक्षण का नियम सत्य है तो यह आवश्यक है कि हम इस विचार को भी ध्यान में लें कि तन्त्र तथा वातावरण के मध्य ऊर्जा का आदान प्रदान कुछ ऐसे प्रक्रमों (Processes) द्वारा भी हो सकता है जिनमें कि तन्त्र की आन्तरिक ऊर्जा तो परिवर्तित हो जाती है परन्तु तन्त्र के द्वारा फिर भी कोई कार्य नहीं किया गया। ऊर्जा का यह रूप ही ऊष्मा कहलाता है। हम इस महत्वपूर्ण तथ्य को एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे। हम एक बर्तन, जिसमें कि पानी भरा हुआ है, की कल्पना करें। हम इस पानी की

वायुमण्डलीय दाव पर अवस्था A से किसी दूसरी अवस्था B तक पहुँचना चाहते हैं। A अवस्था मे पानी का ताप t_A तथा B अवस्था में t_B ।

माना कि $t_A < t_B$

पानी को t_A से t_B तक वायुमण्डलीय दाव पर निम्न दो प्रकार से गर्म कर सकते हैं :

पहली विधि :

हम पानी को बर्नर पर रख कर गर्म करें ताकि इसका ताप t_A से t_B हो जाये । ध्यान रहे कि इस प्रकार से A अवस्था से B तक पहुँचने में पानी के द्वारा कोई कार्य नही किया गया क्योकि पानी के गर्म होने पर पानी के आयतन मे परिवर्तन नगण्य है (अत. यदि कोई कार्य किया भी गया तो यह लगभग नगण्य है)

दूसरी विधि :

इस पानी की अवस्था A से अवस्था B मे परिवर्तन एक अन्य प्रकार से भी किया जा सकता है। उदाहरणार्थ यदि हम पानी को एक मथनी द्वारा अच्छी तरह झकझोरें ताकि पानी के ताप में ठीक यही वृद्धि हो । स्पष्ट है कि पानी को हिलाने मे हमको पानी के प्रतिरोध के विरुद्ध कार्य करना पडेगा।

दूसरे शब्दों मे पानी के द्वारा ऋणात्मक कार्य करना पडा । इस उदाहरण से यह स्पष्ट है कि पानी की अवस्था A से B परिवर्तन के प्रक्रम के मध्य पानी के द्वारा किया गया कार्य शून्य है या नही यह इस पर निर्भर करता है कि पानी तथा वातावरण के मध्य ऊर्जा विनिमय प्रथम प्रकार से है या द्वितीय प्रकार से । चूंकि तन्त्र तथा वातावरण के मध्य ऊर्जा विनिमय दो भिन्न तरीको से हो सकता है।

(a) पहली विधि के प्रयोग के अनुसार—जिसमें तन्त्र तथा वातावरण के मध्य ऊर्जा विनिमय तो हो परन्तु तन्त्र के द्वारा किया गया यान्त्रिक कार्य शून्य हो ।

(b) दूसरा—जिसमें कि तन्त्र तथा वातावरण के मध्य ऊर्जा विनिमय तन्त्र ऊपर या तन्त्र के द्वारा किये गये कार्य के बराबर हो ।

पहले प्रकार से दी गई ऊर्जा को ही ऊष्मा कहते हैं। ऊष्मा तथा यान्त्रिक कार्य एक ही ऊर्जा के दो स्वरूप हैं। अत यदि तन्त्र दोनों प्रकार से ऊर्जा के आदान प्रदान के लिये स्वतन्त्र है तो ऊर्जा के संरक्षण के नियमानुसार तन्त्र की आतरिक ऊर्जा मे अति सूक्ष्म परिवर्तन dU ऊर्जा के ही दो भिन्न स्वरूपों का कुल योग है :

(i) ऊष्मा के रूप में प्राप्त ऊर्जा, इसे हम dQ से प्रदर्शित करेंगे।

(ii) यान्त्रिक कार्य के रूपमें तन्त्र की आन्तरिक ऊर्जा में परिवर्तन यदि तन्त्र के द्वारा किया गया कार्य—dW है तो ऊर्जा के सरक्षण के नियमानुसार

$$dU = dQ - dW$$

$$\because \quad dW = pdV$$

अतः
$$\boxed{dU = dQ - pdV} \qquad ...(6{\cdot}8)$$

यह महत्वपूर्ण सम्बन्ध ही ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम कहलाता है। यह ऊष्मा से सम्बन्धित क्रियाओं के लिये ऊर्जा के संरक्षण का ही नियम है। यहाँ पर ध्यान देने योग्य बात यह है कि 'ऊर्जा की मात्रा" तथा "कार्य" दोनों ही न केवल तन्त्र की प्रारम्भिक एवम् अन्तिम अवस्थाओं पर निर्भर करती हैं बल्कि अवस्था के रूपांतरण के मार्ग पर भी निर्भर करने वाली राशियां हैं Q तथा W मार्ग पर निर्भर करने वाली राशियाँ है अर्थात् "तन्त्र की ऊष्मा" नाम की कोई भौतिक राशि नहीं होती। आंतरिक ऊर्जा U अवश्य ही अवस्था फलन (Stac function) है या दूसरे शब्दों में तन्त्र की निश्चित अवस्था में U का मान भी निश्चित है। आन्तरिक ऊर्जा में परिवर्तन एक ऐसी राशि है जो केवल तन्त्र की प्रारम्भिक एवम् अन्तिम अवस्था पर निर्भर करता है—उदाहरणार्थ इसे U_2-U_1 से प्रदर्शित किया जा सकता है। U_2-U_1 का ऊष्मा Q तथा यान्त्रिक कार्य W में विघटन अनेकों प्रकार से किया जा सकता है अर्थात् Q तथा W का मान इस पर निर्भर करता है कि हम अवस्था 1 से अवस्था 2 तक किस प्रकार पहुँचते है।

उदाहरण के लिये चक्रीय प्रक्रम में यद्यपि तन्त्र की कुल ऊर्जा में परिवर्तन शून्य है अर्थात्

$$U_2 - U_1 = 0$$

परन्तु ऊष्मागतिकी के प्रथम नियमानुसार तन्त्र के द्वारा अवशोपित ऊष्मा Q तथा तन्त्र के द्वारा किया गया कार्य शून्य नहीं है बल्कि

$$Q = W$$

क्योंकि
$$U_2 - U_1 = Q - W = 0 \qquad \text{(चक्रीय प्रक्रम)}$$

अतः
$$Q = W$$

ऊष्मा के नापने की इकाई कैलोरी है तथा

$$1\ \text{cal} = 4{\cdot}18 \times 10^7\ \text{ergs} \qquad ...(6{\cdot}9)$$

6·4 Cp तथा Cv

यदि किसी वस्तु के 1 ग्राम अणु को dQ ऊष्मा देने से उसके ताप में वृद्धि dT हो तो $\frac{dQ}{dT}$ को उस वस्तु की विशिष्ट ऊष्मा कहते हैं। विशिष्ट ऊष्मा की यह

परिभाषा अपने आप में पूर्ण नही हैं क्योंकि dQ का मान न केवल वस्तु के ताप में वृद्धि के ऊपर निर्भर करता है बल्कि उन परिस्थितियों पर भी निर्भर करता है जिनके अन्तर्गत वस्तु को गरम किया जाता है : यह आवश्यक है कि गर्म करते समय वस्तु के ताप के अतिरिक्त उसके अन्य कौन से गुण भी प्रभावित होते हैं। भिन्न-भिन्न अवस्थाओं के अन्तर्गत वस्तु का एक नियत ताप बढ़ाने के लिये दी जाने वाली ऊष्मा भी भिन्न-भिन्न होती है अत. भिन्न-भिन्न परिस्थितियों मे वस्तु की विशिष्ट ऊष्मा भी भिन्न-भिन्न होती है। दो विशिष्ट ऊष्माएँ महत्वपूर्ण हैं :

(i) Cp—स्थिर दाव पर वस्तु की विशिष्ट ऊष्मा

(ii) Cv—स्थिर आयतन पर वस्तु की विशिष्ट ऊष्मा स्पष्ट है

$Cp=\frac{dQ}{dT}$ का मान स्थिर दाव पर इसे $\left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$ से लिखा जाता है।

तथा $Cv=\left(\frac{dQ}{dT}\right)_v$

ऊष्मागतिकी के प्रथम नियमानुसार

$$dQ=dU+pdV$$

यदि V=स्थिर तो dV=O

अतः $$dQ=dU$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dQ}{dT}\right)_v=\left(\frac{dU}{dT}\right)_v$$

या $$Cv=\left(\frac{dU}{dT}\right)_v \quad \cdots (6{\cdot}10)$$

यदि दाव स्थिर है अर्थात् p=स्थिर

$$\text{तो } dQ=dU+pdV$$
$$=d(U+pV) \quad (\text{चूंकि } p=\text{स्थिर})$$
$$=dH$$

H=U+pV को तन्त्र का ऊष्मा फलन (Heat function) या ऐन्थेल्पी (Enthalpy) कहते हैं।

$$\therefore \quad \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p=\left(\frac{dH}{dT}\right)_p$$

या $$Cp=\left(\frac{dH}{dT}\right)_p \quad \cdots (6{\cdot}11)$$

यह सिद्ध किया जा सकता है कि Cp>Cv (सदैव)

उदाहरण : एक आदर्श गैस के लिये सिद्ध करो कि $Cp - Cv = R$

चूंकि आदर्श गैस के लिये $pV = RT$

$$\text{अत:}\quad Cp = \left(\frac{dH}{dT}\right)_p = \frac{d}{dT}(U + pV)$$

$$= \frac{d}{dT}(U + RT) = \frac{dU}{dT} + R = Cv + R$$

$$\text{अत:}\quad Cp - Cv = R$$

6·5. रूद्धोष्म प्रक्रम (Adiabatic Process)

किसी गैस के रूद्धोष्म प्रसार या संपीडन का अध्ययन अत्यन्त महत्वपूर्ण है। रूद्धोष्म प्रसार या संपीडन की निम्न दो मुख्य विशेषताएँ हैं :

(1) रूद्धोष्म प्रसार में गैस निरन्तर एक वाह्य दाव के अन्तर्गत फैलती है तथा प्रसार के इस पूरे प्रक्रम में प्रत्येक क्षण गैस का दाव इस वाह्य दाव के बराबर रहता है। अर्थात् वाह्य दाव में परिवर्तन "पर्याप्त रूप" में धीरे होना चाहिये ताकि परिणमित गैस का दाव तथा वाह्य दाव प्रत्येक क्षण पर मान में बराबर रहें।

(2) रूद्धोष्म प्रसार या संपीडन की दूसरी मुख्य विशेषता यह है कि गैस अपने प्रसार या (संपीडन) के पूरे प्रक्रम में वाह्य वातावरण से न तो ऊष्मा ले सकती है और न ही दे सकती है अर्थात् गैस तथा वातावरण के मध्य ऊष्मा विनिमय शून्य है। इसीलिये इस प्रकार के प्रक्रम को रूद्धोष्म प्रक्रम कहते हैं।

उदाहरण के लिये हम एक गैस भरे हुये बर्तन की कल्पना करें, जो कि ऊष्मा के विनिमय के लिये पूर्ण रूपेण विलगित (Isolated) है, तथा जिसे एक घर्षण रहित पिस्टन द्वारा प्रसारित या संपीडन किया जा सकता है। गैस का प्रसार (या संपीडन) रूद्धोष्म हो इसके लिये यह परम आवश्यक है कि पिस्टन को "पर्याप्त रूप में धीरे" (Sufficiently slow) ऊपर खींचें ताकि पिस्टन के नीचे समीपवर्ती हिस्से में गैस का प्रसार हो तथा गैस का दाव गैस के प्रत्येक हिस्से में सर्वत्र समान रहे अर्थात् गैस पिस्टन की प्रत्येक स्थिति के सापेक्ष प्रत्येक क्षण पर तापीय संतुलन में रहे। इसके विपरीत यदि पिस्टन को बहुत तेजी से ऊपर (या नीचे) किया जायेगा तो पिस्टन के ठीक नीचे के समीपवर्ती हिस्से में इतनी शीघ्र फैलकर पिस्टन के नीचे हुये रिक्त स्थान को ग्रहण नहीं कर पायेगी अत: पिस्टन को अधिक तेज ऊपर (या नीचे) करने पर पिस्टन के ठीक नीचे गैस दाव कम (या अधिक) हो जायेगा। यह दावान्तर तापीय सन्तुलन को नष्ट कर देगा तथा प्रक्रम रूद्धोष्म नहीं होगा। साथ ही रूद्धोष्म प्रसार की दूसरी शर्त को पूरी करने के लिये गैस का प्रसार (या संपीडन "पर्याप्त तेज" (Sufficiently rapid) भी हो ताकि गैस तथा वाह्य वातावरण के मध्य ऊष्मा का विनिमय न हो पाये। पहली शर्त को पूरा करने के लिये पिस्टन के ऊपर उठने का वेग ध्वनि के वेग से कम होना चाहिये जो कि लगभग सभी प्रयोगों

में सामान्यतया संतुष्ट होती है । अब केवल यह ध्यान रखना है कि गैस का प्रसार फिर भी "कम से कम इतना तेज" तो हो ताकि गैस तथा वातावरण के मध्य ऊष्मा विनिमय न होने पाये । । इस शर्त को पूरा करने में पिस्टन को यद्यपि तेजी से ऊपर उठाना तो पड़ता है परन्तु फिर भी पिस्टन का यह वेग ध्वनि के वेग से बहुत कम होता है अतः "पर्याप्त धीरे" की शर्त फिर भी पूरी रहती है ।

रुद्धोष्म परिवर्तन मे आदर्श गैस का दाब तथा आयतन में निम्न सम्बन्ध होता है ।

$$PV^{\gamma} = \text{स्थिर} \qquad \cdots(6{\cdot}12)$$

जहाँ पर $\gamma = Cp/Cv$

चूंकि $PV = RT$, अतः समीकरण (6·12) में p का मान रखने पर

$$\frac{RT}{V} V^{\gamma} = \text{स्थिर}$$

$$\text{या } TV^{\gamma-1} = \text{स्थिर} \qquad (\because R \text{ भी स्थिरांक है})$$

इसी समीकरण को केवल P और T के रूप मे भी लिख सकते है ।

$\therefore$ PV^{γ} = स्थिर तथा आदर्श गैस के लिये $PV = RT$

अतः $V = \frac{RT}{P}$ का मान समीकरण (6 12) मे रखने पर

$$p\left(\frac{RT}{p}\right)^{\gamma} = \text{स्थिर}, \qquad pR^{\gamma}\frac{T^{\gamma}}{p^{\gamma}} = \text{स्थिर}$$

$$\text{या} \qquad \frac{T^{\gamma}}{p^{\gamma-1}} = \text{स्थिर} \qquad [\because R \text{ स्थिरांक है}]$$

इस समीकरण का $\frac{1}{\gamma}$ घात लेने पर,

$$\frac{T}{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \text{स्थिर}$$

अतः रुद्धोष्म परिवर्तन मे किसी आदर्श गैस के लिये निम्न सम्बन्ध सत्य है :

(i)	$pV^{\gamma} = \text{स्थिर}$
या (ii)	$TV^{\gamma-1} = \text{स्थिर}$
या (iii)	$\frac{T}{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \text{स्थिर}$

...

सूत्र (ii) से स्पष्ट है कि, चूँकि सभी गैसों के लिये $\gamma > 1$, प्रत्येक गैस का रुद्धोष्म प्रसार में ताप कम होना चाहिये अर्थात् रुद्धोष्म प्रसार में गैस ठण्डी हो जाती है तथा रुद्धोष्म संपीडन में गैस गर्म हो जाती है।

6 6 सूत्र PV^{γ} = स्थिरांक की उत्पत्ति

परिमापानुसार रुद्धोष्म प्रसार के लिये

$$dQ = 0$$

अतः ऊष्मा गतिकी के प्रथम नियमानुसार

$$dU + Pdv = 0$$

आदर्श गैस के लिये $P = \frac{RT}{V}$

अतः $dU + RT\frac{dV}{V} = 0, \qquad \because \quad dU = Cv\ dt$

अतः $Cv\ dt + RT\frac{dV}{V} = 0$

T से भाग देने पर

$$Cv\frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V} = 0$$

समाकलन द्वारा

$$Cv \log_e T + R \log_e V = \text{स्थिर}$$

अथवा $\qquad \log_e T^{Cv} + \log_e V^R = \text{स्थिर}$

$$\log_e T^{Cv} V^R = \text{स्थिर}$$

या $\qquad T^{Cv} V^R = \text{स्थिर}$

इस समीकरण का $\frac{1}{Cv}$ घात लेने पर

$$TV^{\frac{R}{Cv}} = \text{स्थिर}$$

$\therefore \qquad Cp - Cv = R$

अतः
$$T V^{\frac{C_p - C_v}{C_v}} = \text{स्थिर}$$

या
$$T V^{\frac{C_p}{C_v}} = \text{स्थिर}$$

$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma \text{ को रखने पर}$$

$$T V^{\gamma - 1} = \text{स्थिर} \qquad \ldots(6 \cdot 14)$$

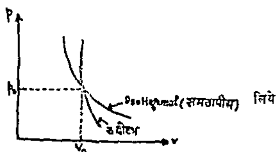
$$T = \frac{PV}{R} \text{ रखने पर}$$

$$P V^{\gamma} = \text{स्थिर}$$

पुनः V का मान $\frac{RT}{P}$ रखने पर

$$\frac{T}{p^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}} = \text{स्थिर} \qquad \ldots(6 \cdot 15)$$

6·7. V-P ग्राफ पर रुद्धोष्म तथा समतापीय प्रसार का प्रदर्शन



चित्र — 6·5

समतापीय परिवर्तन के लिये

$$P \propto \frac{1}{V}$$

तथा रुद्धोष्म परिवर्तन के लिये

$$P \propto \frac{1}{V^{\gamma}}$$

अतः गैस के रुद्धोष्म प्रसार में दाब का कम होना समतापीय प्रसार के सापेक्ष अधिक तेजी में होता है (क्योंकि $r > 1$)। यही कारण है कि यदि समतापीय तथा रुद्धोष्म प्रक्रम यदि V-P ग्राफ पर पर प्रदर्शित की जायें तो रुद्धोष्म प्रक्रम का वक्र समतापीय वक्र के सापेक्ष अधिक ढाल की होगी (चित्र 6·5)। चित्र में दोनों वक्र (P_0, V_0) बिन्दु पर काटती हैं, यह गैस की प्रारम्भिक अवस्था प्रदर्शित करता है।

उदाहरण 6·1. उस तन्त्र की ऊर्जा में कुल परिवर्तन क्या होगा जो कि $3 \cdot 4 \times 10^{8}$ ergs कार्य करता है तथा 32 cal ऊष्मा अवशोषित करता है।

ऊष्मागतिकी के प्रथम नियमानुसार :

$$U_2 - U_1 = Q - W$$

$$Q = 32\text{cal} = 32 \times 4{\cdot}2 \times 10^7 \text{ erg}$$

$$W = 3{\cdot}4 \times 10^8 \text{ ergs}$$

अतः $$U_2 - U_1 = 32 \times 4{\cdot}2 \times 10^7 - 3{\cdot}4 \times 10^8$$

$$= 13{\cdot}44 \times 10^8 - 3{\cdot}4 \times 10^8$$

$$= 10^8[10] = 10^9 \text{ ergs}$$ उत्तर

उदाहरण: 6·2. एक आदर्श गैस के 3 ग्राम अणु प्रारम्भिकदाब 5 वायुमण्डल से अन्तिम दाब 3 वायुमण्डल के दाब तक 0°C पर समतापीय प्रसारित होती है। गैस के द्वारा वातावरण से अवशोषित ऊष्मा की मात्रा बताओ ?

चूंकि गैस समतापीय प्रक्रम के अनुसार 0°C पर फैलती है अतः स्पष्ट है कि गैस को फैलने में कार्य करना पड़ेगा जिसके कारण गैस का ताप कम हो जायेगा, अतः गैस का ताप 0°C बनाये रखने के लिये गैस को वातावरण से कुछ ऊष्मा अवशोषित करनी पड़ेगी। अध्याय में हम सिद्ध कर चुके हैं कि एक ग्राम अणु के समतापीय प्रसार में गैस के द्वारा किया गया कार्य

$$W = RT\log_e \frac{V_2}{V_1} \qquad \text{(1 ग्राम अणु के लिये)}$$

अतः 3 ग्राम अणु के द्वारा किया गया कार्य

$$W = 3RT\log_e \frac{V_2}{V_1}$$

$$= 3 \times 8{\cdot}214 \times 10^7 \times 273.\ \log_e \frac{V_2}{V_1}$$

परन्तु बायल के नियमानुसार

$$5 \times V_1 = 3 \times V_2 \text{ अतः } \frac{V_2}{V_1} = 5/3$$

अतः $$W = 3 \times 8{\cdot}214 \times 10^7 \times 273 \log_e 5/3$$

चूंकि $\log_e 5/3 = 2{\cdot}3026 \log_{10} 5/3$

अतः $$W = 3 \times 8{\cdot}2 \times 10^7 \times 273 \times 2{\cdot}3026 \log \frac{5}{3}$$

अतः ऊष्मा (अवशोषित)

$$= \frac{W}{4{\cdot}1 \times 10^7}\text{cal} = 3 \times 2 \times 273 \times 2{\cdot}302 \log_{10}\frac{5}{3}$$

$$= 3 \times 2 \times 273 \times 2{\cdot}3 \times 0{\cdot}2201$$

$$\left[\because \quad \log_{10} \frac{5}{3} = 0.2201 \right]$$

$\because$ अवशोषित ऊष्मा $= 828.82$ cal उत्तर

6·3. एक प्रयोग में शुष्क हवा की नियत मात्रा को 15°C पर रुद्धोष्म संपीडित किया जाता है। यदि हवा का अन्तिम अवस्था में आयतन प्रारम्भिक आयतन का $\frac{1}{2}$ हिस्सा रहजाये तो हवा का परिणामित ताप क्या होगा ?

$[\gamma = 1.4;\ 4^{0.4} = 1.74]$

रुद्धोष्म परिवर्तन के लिये

$$TV^{\gamma-1} = \text{स्थिर}$$

अर्थात् $\quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$

$T_1 = 15 + 273 = 288°K \quad T_2 = ?$

$V_1 = V$ (माना) $\quad V_2 = \frac{V}{4}$

अत: $\quad 288 \times V^{1.4-1} = T_2 \times \left(\frac{V}{4}\right)^{1.4-1}$

या $\quad 288 \times V^{0.4} = T_2 \times \frac{V^{0.4}}{4^{0.4}}$

$\therefore \quad T_2 = 288 \times 4^{0.4} = 288 \times 1.74$

$= 501°K = 228°C$ उत्तर

6·4. एक गैस को वायुमण्डलीय दाब से संपीडित कर 8 वायुमण्डलीय दाब तक रुद्धोष्म प्रक्रम के अनुसार लाया जाता है। गैस के ताप में परिणमित वृद्धि बताओ यदि गैस का प्रारम्भिक ताप 27°C था। $(\gamma = 1.5)$

$P_1 = P \qquad P_2 = 8P$

$T_1 = 273 + 27 = 300°K \qquad T_2 = ?$

रुद्धोष्म परिवर्तन के लिये दाब तथा ताप में निम्न सम्बन्ध है :

$$\frac{T}{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \text{स्थिर}$$

$$\frac{\frac{T_1}{\gamma-1}}{P_1^{\gamma}} = \frac{\frac{T_2}{\gamma-1}}{P_2^{\gamma}}$$

या $$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$ प्रश्नानुसार $\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{8}$

$$\frac{300}{T_2} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1\cdot5-1}{1\cdot5}}$$

$$= \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{0\cdot5}{1\cdot5}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \left[\frac{1}{2^3}\right]^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

अतः $T_2 = 600°K = 327°C$

अतः ताप में वृद्धि $= 327°C - 27°C = 300°C$ उत्तर

उदाहरण 6·5. 1 ग्राम पानी को यदि वायुमण्डलीय दाब पर भाप में परिणित किया जाये तो भाप का आयतन 1671 c.c. होती है। यदि पानी के वाष्पीकरण की गुप्त ऊष्मा 539 Cal/gm (एक वायुमण्डल दाब पर) हो तो (i) पानी को भाप बनकर फैलने में किये जाने वाला आवश्यक वाह्य कार्य की गणना करो (ii) तन्त्र की आंतरिक ऊर्जा में वृद्धि। दिया है :

[वायुमण्डल दाब $= 1\cdot013 \times 10^6$ dyne/Cm^2
$4\cdot18 \times 10^7$ ergs $= 1$ Cal]

उत्तर : तन्त्र को दी गई कुल ऊष्मा $= mL = 1 \times 539$ Cal

तन्त्र के द्वारा किया गया वाह्य कार्य $= p(V_2 - V_1)$ क्योंकि भाप का बनना एक निश्चित दाब (वायुमण्डलीय दाब) पर होता है।

अतः $$W = 1\cdot013 \times 10^6 \times (1671 - 1) \text{ ergs}$$

$$= \frac{1\cdot013 \times 10^6 \times 1670}{4\cdot18 \times 10^7} \text{ Cal}$$

$$= 41 \text{ Cal}$$

अतः ऊष्मा गतिकी के प्रथम नियमानुसार

$$U_2 - U_1 = Q - W$$
$$= 539 - 41$$

$\therefore \quad = 498$ Cal

अतः तन्त्र की आतरिक ऊर्जा मे वृद्धि $= 498$ Cal

अर्थात् 498 Cal पानी के अणुओ को आकर्षण के विरुद्ध दूर-दूर करने के लिये आवश्यक है।

प्रश्न

(1) तंत्र के आयतन प्रसार तथा तंत्र के द्वारा किये हुये कार्य मे सम्बन्ध व्यक्त करो। धनात्मक तथा ऋणात्मक कार्य किन परिस्थितियों मे तंत्र के द्वारा किया जाता है।

(2) चक्रीय, समतापीय, रुद्धोष्म, समदाबीय, समआयतनिक प्रक्रम किसे कहते हैं। इन्हें V-P चित्र पर प्रदर्शित करो।

(3) "ऊष्मा तथा कार्य दोनों ही पथ पर निर्भर करने वाली राशियाँ हैं, परन्तु आन्तरिक ऊर्जा नही" इस कथन की विवेचना करो।

(4) ऊष्मा गतिकी के प्रथम नियम की व्याख्या करो। "ऊष्मा" तथा कार्य की परिभाषा दो।

(5) "रुद्धोष्म परिवर्तन" किसे कहते हैं। रुद्धोष्म परिवर्तन के लिये (i) दाब तथा आयतन (ii) दाब तथा ताप (iii) ताप तथा आयतन मे सम्बन्ध लिखो।

(6) सिद्ध करो कि तंत्र के द्वारा किया गया कार्य $=$ V-P ग्राफ पर वक्र तथा x-अक्ष के बीच का क्षेत्र

(7) एक आदर्श गैस का 1 ग्राम अणु 25°C पर समतापीय प्रक्रम के अनुसार 1 वायु मण्डलीय दाब से 5 वायु मण्डलीय दाब तक संपीडित किया जाता है। गैस पर किये जाने वाला आवश्यक कार्य की गणना करो?

Hint : $W = RT \log_e \frac{V_2}{V_1}$; पर समतापीय प्रक्रम के अनुसार $P_1V_1 = P_2V_2$

$$\therefore \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}$$

अतः $\quad W = RT \log_e \frac{P_1}{P_2} = 8{\cdot}314 \times 10^7 \times 298{\cdot}2 \quad \log_e \frac{1}{5}$

$$= 8{\cdot}314 \times 10^7 \times 298{\cdot}2 \times 2{\cdot}303 \log_{10} \frac{1}{5}$$

$$= -3{\cdot}99 \times 10^{10} \text{ ergs mole}^{-1}$$

— चिन्ह यह प्रदर्शित करता है कि गैस के द्वारा किया गया ऋणात्मक है अर्थात् गैस पर कार्य किया गया है। उत्तर

(8) एक आदर्श गैस की किसी निश्चित संहति का आयतन 1 वायुमण्डल दाब पर तथा 300°K ताप पर 4 लिटर है। इस गैस को रुद्धोष्म प्रक्रम के अनुसार 1 लिटर आयतन तक संपीडित किया गया है। (a) अन्तिम दाब क्या होगा (b) गैस का अन्तिम ताप क्या होगा।

दिया है $\gamma = 1 \cdot 5$

उत्तर (a) 8·0 atm. (b) 600°K

(9) एक आदर्श गैस का आयतन 1 वायुमण्डल दाब पर तथा 273°K ताप पर 1 litre है। इस गैस को अचानक इसके आधे आयतन तक संपीडित किया जाता है (a) अन्तिम दाब तथा ताप की गणना करो। (b) इसी गैस को स्थिर दाब पर पुनः O°C तक ठंडा किया जाता है। गैस का अन्तिम आयतन क्या होगा।

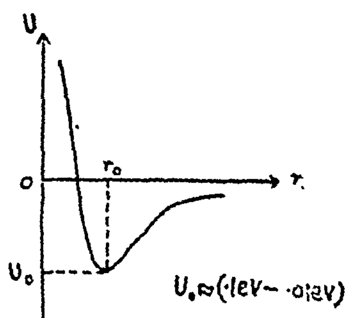
$\gamma = 1 \cdot 3$

उत्तर (a) 2·5 atm, 336°K (b) 0·41 V_l

7 गैसों का अणुगति सिद्धान्त
(Kinetic Theory of Gases)

7·1. द्रव्य का अणु-गति सिद्धान्त

ठोस, द्रव और गैस की संरचना आणविक है तथा प्रत्येक ताप पर ये अणु सदैव तापीय गति (Thermal motion) करते रहते हैं। तापीय गति की प्रमुख विशेषता है कि यह सदैव अनियमित (random) होती है। अणुओं की इसी गति को ही "द्रव्य का अणुगति सिद्धान्त" कहते हैं। ठोस तथा द्रव अवस्था में अणु एक दूसरे के बहुत निकट होते हैं अतः इन दोनों अवस्थाओं में पदार्थ के भौतिक गुण काफी हद तक अणुओं के मध्य की अन्योन्य क्रिया (Interaction) पर निर्भर करते हैं। पदार्थ की गैस अवस्था में अणु या परमाणु अपेक्षाकृत दूर-दूर होते हैं अर्थात अधिकाश समय तक गैस के अणु आपस में कोई अन्योन्य क्रिया नहीं करते; इनके मध्य अन्योन्य-क्रिया केवल उसी क्षण प्रभावकारी होती है जबकि अणुओं के मध्य टक्कर होती है टक्कर में लगा समय गैस के अणुओं के मुक्त घूमने में समय के सापेक्ष नगण्य होता है। यहाँ पर एक भ्रम दूर करना आवश्यक है : टक्कर का अर्थ यह नहीं है कि अणु एक दूसरे को आपस में स्पर्श करते हों. अणु एक दूसरे को कभी भी भौतिक स्पर्श नहीं करते। जब दो अणु बहुत निकट आ जाते है तो उनके मध्य अन्योन्य क्रिया के फलस्वरूप बल लगता है : अपेक्षाकृत अधिक दूरी पर यह बल आकर्षण का होना है तथा जब अणु और अधिक समीप आते है तो उनके मध्य



चित्र—7·1

प्रतिकर्षण का बल होता है (चित्र 7·1)। इसी अन्योन्य क्रिया को ही हम अणुओं की 'टक्कर' कह सकते हैं। गैस अवस्था में अणुओं की टक्कर में लगा समय अणुओं के मुक्त घूमने के समय के सापेक्ष नगण्य होता है। तथापि अधिक दाब पर यह सत्य नहीं है।

7·2. आदर्श गैस

यदि किसी गैस का दाब अत्यधिक कम हो ताकि गैस के अणु आपस में अपेक्षाकृत अधिक दूर-दूर रहें अतः अणुओं के मध्य अन्योन्य क्रिया का कोई महत्व न रहे। इस प्रकार की गैस को ही **आदर्श गैस** कहते हैं। आदर्श गैस में अणुओं के मध्य अन्योन्य क्रिया में लगा समय अणुओं के मुक्त (free) घूमने के सापेक्ष नगण्य होता है। कोई भी गैस आदर्श गैस कहलायेगी यदि उसको इतना विरल (rarefied) किया जाये कि उसके अणु कभी-कभी ही आपस में टकरापायें। आदर्श गैस निम्न शर्तों को संतुष्ट करती है :

(1) गैस के अणु निरन्तर हर संभव दिशा में हर संभव वेग से अनियमित गति (random motion) करते रहते हैं परन्तु फिर भी गैस का घनत्व सर्वत्र एकसा रहता है अर्थात् इकाई आयतन में अणुओं की संख्या लगभग गैस के सब हिस्से में, समान रहती है।

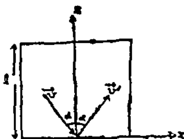
(2) गैस के अणुओं का आकार टक्कर के बीच की दूरी के सापेक्ष नगण्य होता है; दूसरे शब्दों में गैस के अणुओं का वास्तविक आयतन उस बर्तन के आयतन के सापेक्ष नगण्य होता है जिसमें गैस भरी हुई है। अर्थात् गैस के अणु बिन्दुवत हैं।

(3) आदर्श गैस में गैस के अणुओं के मध्य अन्योन्य क्रिया के फलस्वरूप लगने वाला आकर्षण या प्रतिकर्षण बल नगण्य होता है। यह कहना त्रुटिपूर्ण है कि अणुओं के मध्य किसी प्रकार का कोई बल होता ही नहीं, बल्कि सत्य तो यह है कि एक दूसरे से टक्कर (अन्योन्य क्रिया) करते हैं तथा यही अन्योन्य क्रिया गैस के अनेकों तापीय गुणों (Thermal properties) का कारण है। यह सत्य है कि गैस के अणुओं की अन्योन्य क्रिया में लगा समय उनके मुक्त घूमने में लगे समय के सापेक्ष नगण्य होता है।

(4) अणुओं की आपस की टक्कर तथा दीवाल से टक्कर पूर्ण प्रत्यास्थ है। अतः टक्कर में कोई ऊर्जा का ह्रास नहीं होता है।

7·3. आदर्श गैस के दाव के लिये व्यंजक

गैस के अणु गति सिद्धान्त पर हम आदर्श गैस के दाव के लिये व्यंजक प्राप्त करेंगे। माना कि गैस की निश्चित मात्रा एक आयत फलक (rectangular parallelopiped) में भर दी जाती है। माना कि बर्तन की दीवाल आदर्श परावर्ती (Perfectly reflecting) हैं। ये कल्पनाएँ केवल गणना की सरलता के लिये ही हैं क्योंकि यह स्पष्ट है कि गैस के गुण न तो बर्तन विशेष की शक्ल पर निर्भर करेंगे और न ही दीवाल की प्रकृति पर। चित्र 7·2 में v तथा v' किसी अणु की दीवाल से टक्कर के पूर्व तथा बाद के क्रमश. वेग हैं; इन दोनो का परिमाण बराबर है तथा दीवाल पर अभिलम्ब से बराबर कोण बनाते हैं।



चित्र— 7·2

चित्र में हम अणु की x-दीवाल से टक्कर के कारण दीवाल के संवेग में परिवर्तन की गणना करेंगे चूंकि x-दीवाल से टक्कर के फलस्वरूप दीवाल की लम्बवत दिशा के अनुदिश वेग के घटक v_x में ही केवल परिवर्तन होगा : अर्थात अणु की x दीवाल से टक्कर से पूर्व संवेग $=m(-v_x)$

अणु की ,, बाद ,, $=m(+v_x)$

अतः अणु के संवेग में दीवाल से 1 टक्कर मे परिवर्तन

$$=mv_x-(-mv_x)=2\ mv_x$$

अतः अणु के द्वारा दीवाल को 1 टक्कर मे दिया गया संवेग $=2\ mv_x$ यहाँ पर m अणु की संहति है। यही अणु पुनः इसी दिवाल से $2\,l$ दूरी तै करने के बाद टक्कर करेगा। क्योंकि अणु इस दूरी को v_x वेग (परिमाण में) तै करेगा अतः $\frac{2l}{v_x}$ sec बाद अणु पुनः इसी दीवाल से टकरायेगा अर्थात् प्रत्येक $\frac{2l}{v_x}$ sec बाद अणु इस दीवाल से टक्कर करता है।

अतः 1 sec में दीवाल से टक्करो की संख्या $=\frac{v_x}{2l}$

∴ 1 sec मे अणु के द्वारा दीवाल को दिया गया संवेग अर्थात्

दीवाल के संवेग में परिवर्तन की दर=एक sec में टक्करों की सं०

×एक टक्कर में दीवाल को दिया गया संवेग

$$= \frac{v_z}{2l} \times 2\,mv_z = \frac{mv_z^2}{l}$$

अतः गैस के सभी अणुओं के द्वारा 1 sec में दीवाल को दिया गया संवेग अर्थात् अणुगति के कारण दीवाल पर लगा वल $F_z = \frac{m_1 v_{1z}^2}{l} + \frac{m_2 v_{2z}^2}{l} + \ldots$

या $$F_z = \frac{1}{l} \Sigma m v_z^2 \qquad \ldots(7{\cdot}1)$$

जहां पर $m_1, m_2, \ldots\ldots$ गैस के प्रथम, द्वितीय......अणुओं की संहति है तथा $v_{1z}, v_{2z}, \ldots\ldots$ इत्यादि क्रमशः उनके Z दिशा के अनुदिश वेग का परिमाण। Σ जोड़ का चिन्ह है।

यदि वर्तन में गैस के अणुओं की कुल संख्या N है तो समीकरण 7·1 से

$$F_z = \frac{N}{l} \; \frac{\Sigma m v_z^2}{N} \qquad \text{(ऊपर तथा नीचे N से गुणा करने पर)}$$

$$\therefore \quad \frac{\Sigma m v_z^2}{N} = \overline{m v_z^2} = m v_z^2 \text{ का माध्यमान}$$

अतः $$F_z = \frac{N}{l} \overline{m v_z^2}$$

$$\therefore \quad P_z = \frac{F_z}{\text{दीवाल का क्षेत्रफल}} = \frac{N}{l \times A} \overline{m v_z^2} = \frac{N}{V} \overline{m v_z^2} \qquad \ldots(7{\cdot}2)$$

क्योंकि गैस के अणुओं की गति हर दिशा में सम्भव है अतः गैस के सापेक्ष प्रत्येक दिशा x—, या y— या z—सभी समान है अतः

$$\overline{m v_x^2} = \overline{m v_y^2} = \overline{m v_z^2} = \frac{\overline{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}}{3}$$

$$= \frac{\overline{mv^2}}{3} \quad (\therefore \;\; v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2)$$

अतः समीकरण (7·2) से $P_z = \frac{N}{V} \; \frac{\overline{mv^2}}{3}$

चूंकि दाव सब दिशाओं में समान है अर्थात्

$$P_x = P_y = P_z = P \text{ (माना)}$$

$$\text{अतः } p = \frac{1}{3}\frac{N}{V}\overline{mv^2} = \frac{2}{3}\frac{N}{V}\frac{1}{2}\overline{mv^2}$$

$$= \frac{2}{3}\ \frac{\text{गैस की माध्य गतिज ऊर्जा}}{V}$$

$$= \frac{2}{3}\ \frac{E_k}{V} \quad \cdots(7{\cdot}3)$$

यहाँ E_k = गैस की माध्य गतिज ऊर्जा

अतः गैस का दाब गैस के इकाई आयतन की माध्य गतिज ऊर्जा के दो तिहाई के बराबर होता है। यह एक ऐसा उदाहरण है जहाँ पर गैस के स्थूल गुण (Macroscopic property) की आणविक व्याख्या की गई है। अतः हम कह सकते हैं कि गैस के स्थूल गुणों p, v, T की मूल उत्पत्ति आणविक गति के ही कारण है। यद्यपि आणविक गति अनियमित अथवा यदृच्छ है परन्तु गैस के औसत गुण उदाहरणार्थ p, v, T का परिवर्तन एक निश्चित नियमानुसार होता है।

$$\because \quad p = \frac{2}{3}\ \frac{N}{V}\ \frac{1}{2}\ \overline{mv^2}$$

तथा पिछले अध्याय मे परमताप की परिभाषानुसार :

$$kT = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\ \overline{mv^2} \quad (T\ ^\circ k \text{ मे नापा गया ताप है})$$

$$\text{या} \qquad \frac{1}{2}\ \overline{mv^2} = \frac{3}{2} kT$$

अतः समीकरण (7·3) से

$$\boxed{PV = NkT} \qquad (7{\cdot}4)$$

समीकरण (7·4) आदर्श गैस के दाब, आयतन तथा ताप में सम्बन्ध व्यक्त करता है अर्थात आदर्श गैस का अवस्था समीकरण (Equation of State) है। यह समीकरण एक सार्वभौमिक समीकरण (Universal equation) है क्योंकि इस समीकरण मे प्रयुक्त होने वाली राशियों में से कोई भी ऐसी नही है जो कि गैस विशेष की प्रकृति पर निर्भर करे। अर्थात् आदर्श गैस के रूप में एक निश्चित दाब पर एक निश्चित आयतन के बर्तन मे चाहे हाइड्रोजन गैस लें अथवा आक्सीजन गैस लें अथवा क्लोरीन गैस लें, सभी गैसें समीकरण (7·4) को संतुष्ट करेंगी। यह आदर्श गैस के अणुओं के मध्य की अन्योन्य क्रिया (Interaction) के नगण्य होने का परिणाम है।

दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि आदर्श गैस के रूप में कोई भी गैस अपने व्यष्टित्व (Individuality) से पूर्ण मुक्त होती है।

यदि हम आदर्श गैस के रूप में समान ताप तथा दाब पर दो भिन्न गैसों के समान आयतन लें तो समीकरण (7·4) से स्पष्ट है कि दोनों गैसों के अणुओं की संख्या समान होगी यही ऐवोगेड्रो का नियम है। उदाहरणार्थ N.T.P. पर किसी भी आदर्श गैस के 1 c.c. आयतन में अणुओं की संख्या

$$L=\frac{pv}{kT}=\frac{1{\cdot}013\times10^{6}\times1}{1{\cdot}38\times10^{-16}\times273}$$

$$=2{\cdot}7\times10^{19} \text{ अणु}$$

चूंकि सामान्य दाव $=1$ वायुमण्डल $=1{\cdot}013\times10^{6}$ dyne/scc

$k=1{\cdot}38\times10^{-16}$ erg/dgree

$T=273^{\circ}k$

यह संख्या लोशमिड संख्या (Loschmidt's *number*) कहलाती है।

समीकरण 7·4 में N गैस की किसी निश्चित संहति में अणुओं की संख्या है। यदि गैस की संहति को ग्राम अणुभार (Mole) में प्रदर्शित करें, अर्थात माना कि गैस की संहति n ग्राम अणु है तो

$N=nN_0$ (जहाँ पर N_0=ऐवोगेड्रो की संख्या)

अतः, N का यह मान समीकरण (7·4) में प्रतिस्थापित (Substitute) करने पर

$$PV=nN_0kT$$

N_0k को गैस स्थिरांक R कहते हैं : ($kN_0=1{\cdot}38\times10^{-16}\times6{\cdot}023\times10^{23}=8{\cdot}3\times10^{7}$ erg/deg. mole.)

अतः $$pV=nRT \qquad \cdots(7{\cdot}5)$$

यदि किसी आदर्श गैस का 1 ग्राम अणु लिया जाय अर्थात् $n=1$

तो $$pV=RT \qquad \cdots(7{\cdot}6)$$

जोकि हमारे जाने पहचाने रूप में आदर्श गैस का अवस्था समीकरण है।

यदि गैस का ताप स्थिर है अर्थात् T=Constt

$$pV=\text{स्थिर} \qquad \cdots(7{\cdot}7)$$

यही वायल का नियम है जिसके अनुसार गैस की किसी नियत संहति के दाब तथा आयतन का गुणनफल स्थिर रहता है, यदि गैस का ताप स्थिर रहे।

यदि गैस की निश्चित मात्रा का दाव स्थिर रहे तो (7·7) से स्पष्ट है कि

$$\frac{V}{T}=\text{स्थिर} \ (\text{यदि } p=\text{स्थिर})$$

यही चार्ल्स का नियम है।

7·4 (a) अणुओं का वेग वर्ग माध्य मूल (Root mean square velocity)

समीकरण (7·3) में हमने गैस के दाब के लिये निम्न व्यंजक प्राप्त किया था :

$$p=\frac{2}{3}\frac{N}{V}\times\overline{\tfrac{1}{2}mv^2}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{mN}{V}\overline{v^2}$$

[यदि गैस के सभी अणु समान संहति के हों, अतः m को औसत के चिन्ह से बाहर निकाल सकते हैं]

चूंकि mN=सम्पूर्ण गैस की संहति=M (माना)

$$\therefore\qquad p=\frac{1}{3}\frac{M}{V}\overline{v^2}=\frac{1}{3}d\overline{v^2}$$

जहाँ पर d गैस का घनत्व है। $\left(\because\quad \frac{M}{V}=\text{गैस का घनत्व}\right)$

$$\therefore\qquad \overline{v^2}=\frac{3p}{d}$$

$$\therefore\qquad \sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3p}{d}}$$

$\sqrt{\overline{v^2}}$ को अणुओं का वेग वर्ग माध्य मूल (root mean square velocity of molecules) कहते हैं, यदि इसे C से प्रदर्शित किया जाये तो

$$\boxed{C=\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3p}{d}}}\qquad\cdots(7\,8)$$

7·4 (b) ताप की व्याख्या

p,V,T किसी भी गैस के स्थूल गुण प्रदर्शित करते है तथा ये तीनों गैस के पैरामीटर (Parameter) कहलाते है, आदर्श गैस में इनमें सम्बन्ध एक ग्राम अणु के लिये pV=RT होता है।

गैस की आणविक व्याख्या पर गैस का दाब

$$p=\frac{2}{3}\frac{N}{V}\,\overline{\tfrac{1}{2}mv^2}\ \text{होता है।}$$

यदि गैस का एक ग्राम अणु लिया जाये अतः N को N_0 (एवेगेड्रो सं०) से प्रतिस्थापित कर सकते हैं।

$$\therefore \quad pV = \tfrac{2}{3} N_0 \tfrac{1}{2} \overline{mv^2}$$

परन्तु $\quad pV = RT$

अतः
$$\tfrac{2}{3} N_0 \; \tfrac{1}{2} \overline{mv^2} = RT$$

$$\tfrac{1}{2} \overline{mv^2} = \tfrac{3}{2} \frac{R}{N_0} T$$

$$\overline{\tfrac{1}{2} mv^2} = \tfrac{3}{2} kT \qquad \left(\therefore \frac{R}{N} = k \right)$$

अतः
$$E_k \propto T \qquad \cdots(7{\cdot}9)$$

अर्थात् अणुओं की माध्यगतिज ऊर्जा परमताप के समानुपाती होती है। परम शून्य पर अणुओं की गतिज ऊर्जा शून्य होती है। परमशून्य से कम ताप अणुओं की गतिज ऊर्जा का न्यूनतम मान केवल शून्य ही हो सम्भव नहीं है क्योंकि सकता है। परम शून्य पर अणुओं की तापीय गति शून्य होती है।

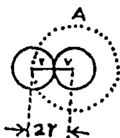
यही ताप की आणविक व्याख्या है। ताप को हमने पिछले अध्याय में अणुओं की मध्य स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा से परिभाषित किया था जिसकी व्याख्या यहाँ पर की गई है।

नोट—यहाँ पर यह संकेत करना आवश्यक है कि परम शून्य पर अणुओं की सम्पूर्ण गति शून्य नहीं होती। अत्यधिक कम ताप ($\approx 0°K$) पर अणुओं का व्यवहार चिरसम्मत भौतिकी (Classical physics) के नियमों के अनुसार नहीं होता अपितु यह क्वान्टम यान्त्रिकी के नियमानुसार होता है जिसके अनुसार 0°K पर भी अणुओं में गति रहती है, अणुओं के अन्दर निहित परमाणु कम्पन करते रहते हैं, इन कम्पनों को शून्य बिन्दु कम्पन (Zero point vibrations) कहते हैं।

7·5. वास्तविक गैस : वास्तविक गैस का अवस्था समीकरण
(Non Ideal Gas : Vanderwaal & equation of State)

गैस का दाब जैसे-जैसे बढ़ता जाता है, गैस "आदर्श गैस" की स्थिति (Status) से हटती जाती है, अन्त में गैस द्रव अवस्था में परिणित हो जाती है। गैस का द्रव अवस्था में परिणित होना अणुओं के मध्य जटिल अन्योयक्रिया के कारण है। जब किसी गैस के अणुओं के मध्य की अन्योन्य क्रिया नगण्य न हो **अनादर्श गैस** (Non Ideal Gas) कहलाती है। गैस के भिन्न-भिन्न अणु जब निकट आते हैं तो उनमें एक आकर्षण बल लगता है, परन्तु और अधिक निकट आने

पर उनमें प्रतिकर्षण बल लगता है (चित्र 7·1)। हम यहाँ पर अणुओं के मध्य होने वाली इस अन्योन्य क्रिया को ध्यान में रखकर गैस अवस्था समीकरण प्राप्त करेंगे। चूंकि अल्प दूरियों पर अणुओं के मध्य प्रतिकर्षण बल होता है तथा इस प्रतिकर्षण बल का मान दूरी के कम होने के साथ अत्यधिक बढ़ता है। इसका अर्थ यह है कि हम एक अणु को किसी दूसरे अणु तक एक निश्चित निकटतम दूरी तक ही ला सकते अर्थात् अणुओं का एक निश्चित "आकार" (Size) होता है। आदर्श गैस मे अणुओं का यही आकार नगण्य था क्योंकि गैस इतनी विरल (Rarefied) थी कि उसके अणुओं का आपस में "टक्कर" करना दुर्लभ था अर्थात् गैस के अणुओ का वास्तविक आयतन बर्तन के आयतन के सापेक्ष नगण्य था। अणुओं के इस "निश्चित आकार" के कारण आदर्श गैस समीकर मे गैस के आयतन V को V—b से प्रतिस्थापित करना चाहिए जहाँ पर b गैस के अणुओ के आकार पर निर्भर करने वाला कोई धनात्मक स्थिरांक है। चित्र 7 3 मे गैस के अणुओ को पूर्ण प्रत्यास्थ गोले के रूप में दिखाया है, स्पष्ट है कि अब अणुओ को बर्तन में मुक्त घूमने के लिये स्थान में कुछ कमी आ गई, यह कमी अणुओं के आकार पर निर्भर करेगी। अत इस गैस के लिए गैस आयतन आदर्श गैस के आयतन V से कुछ कम होगा, माना कि यह V—b है (जैसा कि ऊपर लिख चुके हैं)। यदि गैस का एक ग्राम अणु लिया जाय तो आदर्श समीकरण



चित्र 7·3

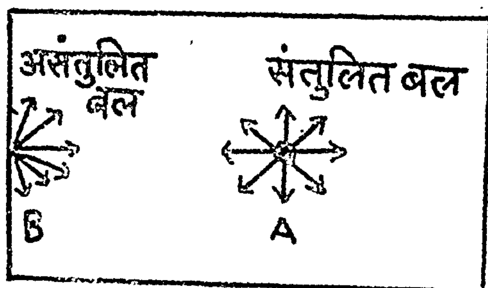
आयतन में कमी = बड़े गोले A का आयतन

$p = \frac{RT}{V}$ में V को V — b मे प्रतिस्थापित करना चाहिए

$$\text{अर्थात्}\ p = \frac{RT}{V-b} \qquad \ldots(7\cdot10)$$

आदर्श गैस समीकरण मे दूसरा संशोधन अणुओं के मध्य अन्योन्य क्रिया के फल स्वरूप लगने वाले "आकर्षण बल" के कारण है। वैण्डरवाल बलो की प्रमुख विशेषता यही आकर्षण बल है तथा गैस का द्रव मे परिणित होना इन्ही बलो के कारण है। अणुओ के मध्य आकर्षण बल के कारण गैस के दाब मे कुछ कमी आ जाती है। चित्र मे A तथा B अणु की बर्तन में दो स्थितियाँ प्रदर्शित की गई हैं (चित्र 7·4) A स्थिति पर अणु पर लगने वाले बल सन्तुलित हैं परन्तु दीवाल के निकट उदाहरणार्थ B स्थिति में, अणु पर लगने वाले बल असन्तुलित है तथा यह अणु बर्तन के अन्दर की तरफ अन्य अणुओ के द्वारा लगाये गये आकर्षण बल को अनुभव करेगा। यह आकर्षण बल दीवाल पर या दीवाल के निकट स्थित अणुओं

संख्या के भी समानुपाती होता है जो कि दीवाल पर स्थित अणुओं पर आकर्षण वल



चित्र 7·4

लगाते हैं, अर्थात् आकर्षण के कारण अणुओं पर अन्दर की तरफ लगने वाला वल और इसलिये गैस के दाव में कमी

$$x \propto n_1 \times n_2$$

[जहाँ पर n_2 = दीवाल के निकट अणुओं की सं०
n_2 = आकर्षण वल लगाने वाले अणुओं की सं०]

स्पष्ट है कि n_1 तथा n_2 प्रत्येक गैस के घनत्व d के समानुपाती होंगे। अर्थात्

$$x \propto d^2$$

अथवा $$\propto \frac{1}{v^2}$$ (∵ घनत्व और आयतन उत्क्रमानुपाती हैं)

या $$x = \frac{a}{v^2}$$

जहाँ पर a गैस के अणुओं के मध्य आकर्षण वल प्रदर्शित करने वाला स्थिरांक है। अतः समीकरण (7·10) में से p के व्यंजक में से a/v^2 को घटाने पर,

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

या $$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT \qquad (....7·11)$$

यह समीकरण ही वैन्डरवाल गैस का अवस्था समीकरण कहलाता है। यदि गैस का घनत्व वहुत कम है अर्थात् v का मान वहुत अधिक है तो a तथा b को नगण्य माना जा सकता है। अतः आदर्श गैस का समीकरण pv = RT प्राप्त होती है। वैन्डरवाल समीकरण गैस की अवस्था प्रदर्शित करने वाला अधिक व्यापक तथा

सत्य समीकरण जबकि $pv = RT$ केवल उमी समय सत्य है जबकि गैस का घनत्व अति अल्प हो।

उदाहरण : 7·1. सामान्य दाब व ताप पर नाइट्रोजन का घनत्व ·00125 ग्राम/घ० से० है तो उसके अणुओं का वेग क्या होगा।

यहाँ पर अणुओं का वेग से तात्पर्य वेग वर्ग माध्य मूल से है :

$$= \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3P}{d}} = \sqrt{\frac{3 \times 76 \times 13.6 \times 980}{.00125}}$$

$$= 4.9 \times 10^4 \text{ cm/sec} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण : 7·2. N.T.P पर 1 ग्राम अणु आदर्श गैस की गतिज ऊर्जा की गणना करो। $[R = 8.3 \times 10^7 \text{ erg/}^\circ K]$

चूंकि एक ग्राम अणु मे अणुओं की संख्या $= N_0$

तथा एक अणु की माध्य गतिज ऊर्जा $= \frac{3}{2} kT$

अतः एक ग्राम अणु की गतिज ऊर्जा $= N_0 \times \frac{3}{2} k N_0 T$

$$= \frac{3}{2} k N_0 T$$

$$= \frac{3}{2} RT \quad \left[\because k = \frac{R}{N_0}\right]$$

$$= \frac{3}{2} \times 8.3 \times 10^7 \times 273$$

$$= 3.39 \times 10^{10} \text{ergs} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण : 7·3. $20^\circ C$ पर नाइट्रोजन गैस के अणुओं के वेग वर्ग माध्य मूल की गणना करो ? $[R = 8.2 \times 10^7 \text{erg/}^\circ C\text{/mole}]$

नाइट्रोजन का ग्राम अणु भार $= 28 gm$

$$C = \sqrt{\frac{3P}{d}}$$

$$= \sqrt{\frac{3PV}{M}} \qquad \left(\because d = \frac{M}{V}\right)$$

यदि M नाइट्रोजन का ग्राम अणु भार हो तो $PV = RT$

$$\therefore \quad C = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.3 \times 10^7 \times 293}{28}}$$

$$= 5.1 \times 10^4 \text{cm/sec} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण : 7·4. नाइट्रोजन के अणुओं के मध्य की अन्योन्य क्रिया, अणुओं के बीच की दूरी जब लगभग 8A°(r ≈ 8A°) होती है, प्रभावकारी होने लगती है। दाव के किस मान पर नाइट्रोजन गैस "आदर्श गैस" के नियमों से विचलित होगी। गैस का ताप 30°C है।

नाइट्रोजन गैस, आदर्श गैस की स्थिति से विचलित होगी यदि उसके अणु अधिक दाव पर आपस में इतने निकट आजायें ताकि उनके मध्य की अन्योन्य क्रिया नगण्य न हो। दूसरे शब्दों में जब गैस के अणुओं का वास्तविक आयतन गैस के आयतन के सापेक्ष नगण्य न हो अर्थात् गैस का आयतन तथा अणुओं का आयतन लगभग बराबर ही हों।

हम 1 ग्राम अणु गैस पर विचार करेंगे। चूँकि 1 वायुमण्डल दाव पर 0°C पर 1 ग्राम अणु का आयतन = 22400 c.c.। अतः इसी दाव पर 30°C पर गैस का आयतन चार्ल्स के नियमानुसार,

$$\frac{V}{303} = \frac{22400}{273}$$

$$\therefore \qquad V = \frac{22400 \times 303}{273} \text{ c.c.} \qquad \ldots(i)$$

अब हम उस दाव की गणना करेंगे जिस पर गैस का आयतन कम होकर लगभग गैस के अणुओं के वास्तविक आयतन के लगभग बराबर होगा। मानाकि यह दाव p वायुमण्डल है। वायल के नियमानुसार,

$$pV_1 = 1 \times V$$

$$\therefore \qquad V_1 = \frac{1 \times V}{p}$$

(i) से V का मान प्रतिस्थापित रखने पर,

$$V_1 = \frac{1 \times 22400 \times 303}{273p} \text{ c.c.}$$

∴ एक अणु को मुक्त घूमने के लिये आयतन

अतः दो अणुओं के मध्य की औसत दूरी $= v^{1/3}$; अधिक दाब पर जब यह दूरी लगभग $8A^{\circ}$ हो जाती है, गैस आदर्श गैस से विचलित हो जाती है :

अर्थात् $$v^{1/3} = 8 \times 10^{-8}$$

या $$\left[\frac{22400 \times 303}{273 \times p \times 6.6 \times 10^{23}} \right]^{\frac{1}{3}} = 8 \times 10^{-8}$$

दोनों तरफ को लेने पर $p = 81$ वायुमण्डल उत्तर

प्रश्न

(1) 'आदर्श गैस' किसे कहते हैं ? आदर्श गैस के लिये आवश्यक परिकल्पनाएँ क्या हैं ।

(2) आदर्श गैस के दाब के लिए आवश्यक व्यंजक प्राप्त करो तथा आदर्श गैस समीकरण $pV = NkT$ स्थापित करो ।

(3) "आदर्श गैस के रूप में कोई भी गैस अपने व्यक्तित्व (Individuality) से पूर्ण मुक्त होती है", इस कथन का आशय क्या है ।

(4) सिद्ध करो कि आदर्श गैस के अणुओं का वेग वर्ग माध्य मूल

$$C = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3p}{d}}$$

(5) अणु गति सिद्धान्त पर ताप की व्याख्या करो । परम शून्य ताप किसे कहते हैं । सिद्ध करो कि अणुओं की माध्य गतिज ऊर्जा

$$E_k \propto T$$

(6) दाब तथा ताप की किन अवस्थाओं में एक गैस "आदर्श गैस" के नियमों से विचलित होती है । अतः किसी गैस का वैण्डरवाल अवस्था समीकरण

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \right)(V - b) = RT$$

प्राप्त करो ।

(7) निम्न पर टिप्पणी लिखो :

(a) अणुओं के मध्य अन्योन्य क्रिया, (b) लोशमिड संख्या, (c) वेग वर्ग माध्य मूल (d) गैस नियमों की आणविक गति नियमों के द्वारा व्याख्या ।

(8) किस ताप पर नियत दाब की हाइड्रोजन का वेग वर्गमाध्य मूल उसके सामान्य दाब व ताप के वेग वर्गमाध्य मूल का दुगुना होगा । (Rajasthan 1973)

(उत्तर : 819°C)

(9) 30°C पर हाइड्रोजन गैस के अणुओं के वेग वर्ग माध्य मूल की गणना करो ? ($R = 8{\cdot}3 \times 10^7$ erg/°C/mole)

उत्तर : $1{\cdot}94 \times 10^5$ cm/sec

(10) यदि किसी गैस का N. T. P. पर घनत्व ·00143 ग्राम प्रति घ० से० मी० हो तो उसके अणुओं का वेग वर्ग माध्य मूल ज्ञात करो ?

उत्तर : $4{\cdot}6 \times 10^4$ cm/sec

(11) 50°C पर हाइड्रोजन गैस के एक ग्राम अणु की गतिज ऊर्जा की गणना करो । ($R = 8{\cdot}3 \times 10^7$ erg/°k)

उत्तर : $4{\cdot}02 \times 10^{10}$ ergs

---

8 ऊष्मा विकिरण
(Energy Radiation)

8·1. ऊष्मा विकिरण; कुछ महत्वपूर्ण परिभाषाएँ
8 2. कृष्णिका एवं धूसर वस्तु (Ideal Black Body anb Grey Boby)
8·3 किर्शॉफ का नियम
8·4. कृष्णिका का स्पेक्ट्रमी ऊर्जा का वितरण
8 5 प्रीवोस्ट का ऊष्मा विनिमय सिद्धान्त
8·6. कृष्णिका विकिरण के नियम
 (i) स्टीफेन बोल्टजमेन का नियम
 (ii) वीन का विस्थापन नियम, विकिरक वस्तु का ताप
 (iii) प्लांक का नियम
8·7. न्यूटन का शीतलीकरण नियम

8·1. ऊष्मा विकिरण : कुछ महत्वपूर्ण घटनाएँ

ऊर्जा का निर्वात में गमन विद्युत चुम्बकीय तरंगों के रूप में होता है। विद्युत चुम्बकीय तरंगो का व्यापक नाम ही विकिरण है। रेडियो तरंगें, X-किरणे, γ-किरणें, प्रकाश इत्यादि सभी "विकिरण" कहलाते हैं। ये सभी प्रकाश के वेग से निर्वात मे चलती हैं। इनकी तरंगदैर्घ्य अलग-अलग होती है। इस अध्याय में हम विकिरण के केवल उस अंश का अध्ययन करेंगे जो कि अणुओं की तापीय गति से उत्तेजित किया जाता है। इस प्रकार के विकिरण को ऊष्मा विकिरण कहते हैं। यदि कोई उत्सर्जक वस्तु जिसको कि किसी भी प्रकार की बाह्य ऊर्जा नहीं मिले तो यह ऊष्मा विकिरण" के उत्सर्जन के कारण ठंडी होती जायेगी। सभी वस्तुएँ जिनका कि ताप परमशून्य से ऊपर है ऊष्मा विकिरण को उत्सर्जित करती हैं। यदि किसी तप्तवस्तु को एक कोटर (Cavity) में रख दिया जाये (कोटर की दीवाल पूर्ण परावर्तक है) तो कुछ समय बाद सन्तुलन की स्थिति उत्पन्न हो जाती है. इकाई समय में वस्तु के द्वारा उत्सर्जित ऊर्जा का मान ठीक वही होगा जो कि वस्तु इकाई समय में ग्रहण

करती है। इसी अवस्था में ही वस्तु तथा विकिरण (अर्थात वि० चु० तरंग) के मध्य ऊर्जा का वितरण समय के साथ परिवर्तित नहीं होगा। यह **साम्य ऊष्मा विकिरण** (Equilibrium Thermal Rediation) कहलाता है। केवल ऊष्मा विकिरण ही साम्यावस्था में रह सकता है अन्य प्रकार से उत्तेजित विकिरण नहीं।

जब विकिरण फ्लक्स (radiant flux) ϕ किसी वस्तु की सतह पर आपाती होता है तो उसका कुछ अंश ϕ_ρ परावर्तित हो जाता है, कुछ अंश ϕ_ψ संचरित हो (Transmit) हो जाता है, कुछ अंश ϕ_α अवशोपित हो जाता हैं। हम निम्न को परिभाषित करते हैं :

(i) वस्तु की परावर्तन क्षमता $\rho = \dfrac{\text{परावर्तित विकिरण की मात्रा}}{\text{आपाती विकिरण की मात्रा}} = \dfrac{\phi_\rho}{\phi}$

(ii) वस्तु की संचरण क्षमता $\Gamma = \dfrac{\text{संचरित विकिरण की मात्रा}}{\text{आपाती विकिरण की मात्रा}} = \dfrac{\phi_\Gamma}{\phi}$

(iii) वस्तु की अवशोपण क्षमता $\alpha = \dfrac{\text{अवशोपित विकिरण की मात्रा}}{\text{आपाती विकिरण की मात्रा}} = \dfrac{\phi_\alpha}{\phi}$

ऊर्जा के संरक्षण के नियम से स्पष्ट है :

$$\phi = \phi_\rho + \phi_\Gamma + \phi_\alpha$$

या $$1 = \frac{\phi_\rho}{\phi} + \frac{\phi_\Gamma}{\phi} + \frac{\phi_\alpha}{\phi}$$

या $$\boxed{1 = \rho + \Gamma + \alpha}$$

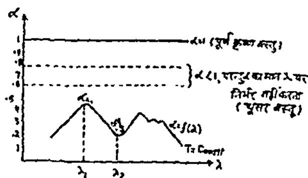
प्रयोगों से यह पता चलता है कि वस्तु की अवशोपण क्षमता, परावर्तन क्षमता आपाती विकिरण की तरंगदैर्ध्य तथा वस्तु के ताप पर निर्भरकरते हैं।

अर्थात् $\alpha = f(\lambda, T)$

तथा $\rho = F(\lambda, T)$

जहाँ पर f तथा F कोई दो λ, T के अज्ञात फलन हैं। विकिरण की किसी विशेष तरंग दैर्ध्य λ अर्थात् एक वर्णी विकिरण (Monochromatic Radiation) के वस्तु पर आपाती होने पर (वस्तु के किसी निश्चित ताप पर) अवशोपण क्षमता, परावर्तन क्षमता को क्रमशः α_λ व P_λ से प्रदर्शित किया जाता है। चित्र (8·1)

मे वस्तु की अवशोषण क्षमता का तरंग दैर्घ्य λ के साथ परिवर्तन, किसी निश्चित ताप पर प्रदर्शित किया गया है।



चित्र—8·1

ताप के बदलने पर वक्र $\alpha = f(\lambda, T)$ की प्रकृति भी बदल जायेगी अर्थात् वस्तु ताप के किसी विशेष मान पर जिस तरंग दैर्घ्य के विकिरण को अवशोषित करती थी, संभव है कि किसी दूसरे ताप पर यही वस्तु इसी तरंग दैर्घ्य के विकिरण को अवशोषित न करे। अर्थात् α का मान λ, T दोनों पर किसी विशेष सम्बन्ध द्वारा निर्भर करता है। α, P का मान तरंग दैर्घ्य पर निर्भर करने के ही कारण वस्तुओं के "रंगीन" (Coloured) होने का कारण है। उदाहरणार्थ यदि कोई वस्तु श्वेत प्रकाश के आपाती होने पर लाल दिखाई पड़े तो इसका अर्थ यह है कि वस्तु की अवशोषण क्षमता लघु तरंगो (Short waves) जैसे हरी, बैंगनी तरंगो के लिये कम है। यदि इसी वस्तु को नीले प्रकाश मे देखा जाये तो स्पष्ट है यह प्रकाश वस्तु के द्वारा लगभग पूर्ण रूपेण अवशोषित कर लिया जायेगा और वस्तु इस नीले प्रकाश मे "काली" दिखाई पड़ेगी। इसी प्रकार पारदर्शक वस्तुओं के रंग का कारण यह है कि अमुक वस्तु का आपाती विकिरण की किस तरंग दैर्घ्य के लिये संचरण क्षमता (Transmission Coefficient) अधिक है। उदाहरणार्थ यदि किसी वस्तु के लिये, लाल किरणों के लिये, वस्तु की संचरण क्षमता $f_{r} = \cdot 8 - \cdot 9$ तथा अन्य किरणों को यह वस्तु अवशोषित करले तो यह वस्तु लाल फिल्टर (red filter) का कार्य कर सकती है।

8·2. कृष्णिका एवम् धूसर वस्तु (Ideal black Body and grey body)

कृष्णिका उस वस्तु को कहते हैं जो सभी ताप पर सभी तरंग दैर्घ्य के विकिरणो को पूर्णरूपेण अवशोषित करले। अर्थात् कृष्णिका की अवशोषण क्षमता सभी ताप पर, सभी तरंग दैर्घ्यों के विकिरण के लिये 1 होती है :

$$\alpha = 1 \text{ (वस्तु के सभी ताप पर व सभी विकिरणों के लिये)}$$

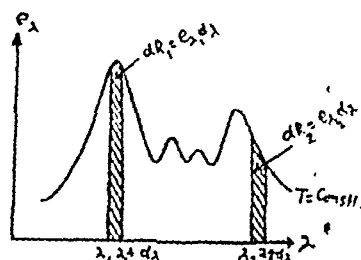
प्रकृति में पाई जाने वाली वस्तुओं में से कोई भी आदर्श कृष्णिका नहीं है। व्यावहारिक रूप में ऐसी वस्तु बनायी जा सकती है जो कि आदर्श कृष्णिका की तरह से व्यवहार करे। उदाहरण के लिये एक खोखला कोष्ठ जिसकी दीवाल में एक सूक्ष्म छिद्र हो, आदर्श कृष्णिका की तरह व्यवहार करेगा क्योंकि इस छिद्र में से किसी भी तरंग दैर्ध्य का विकिरण यदि प्रवेश करे तो वह कोष्ठ की दीवालों से कई बार परावर्तित होकर अन्त में अवशोषित हो जायेगा (चित्र 8·2)। अत: इस खोखले छिद्र की अवशोषण क्षमता 1 है और इस प्रकार यह आदर्श कृष्णिका की तरह व्यवहार करता है। इसीलिये खोखला कोष्ठ जिसे किसी निश्चित ताप तक गरम किया जाये तो इससे बाहर आने वाला विकिरण कृष्णिका के विकिरण की तरह ही होगा।



चित्र—8·2

एक अन्य प्रकार की वस्तुएँ जिनकी अवशोषण क्षमता विकिरण की तरंग दैर्ध्य पर निर्भर नहीं करती तथा इसका मान 1 से कम होता है, धूसर वस्तुएँ (grey bodies) कहलाती हैं। चित्र 8·1 में कृष्णिका का α एक सीधी रेखा से प्रदर्शित किया गया है तथा धूसर वस्तु का भी α स्थिर है परन्तु इसका मान 1 से कम है।

हम विभिन्न वस्तुओं के गर्म होने पर उत्सर्जित विकिरण का अध्ययन करेंगे। सभी वस्तुएँ गर्म होने पर ऊर्जा को विभिन्न तरंग दैर्ध्य के विद्युत चुम्बकीय तरंगों के रूप में उत्सर्जित करती हैं। किसी वस्तु के 1 वर्ग मीटर क्षेत्र द्वारा 1 sec में उत्सर्जित कुल ऊर्जा की मात्रा को वस्तु से उत्सर्जित विकिरण का ऊर्जा घनत्व कहते है। यह प्रायोगिक सत्य है कि वस्तु से उत्सर्जित विकिरण ऊर्जा का वितरण सभी तरंग दैर्ध्यों के लिये समान नहीं है अपितु अलग-अलग तरंग दैर्ध्य के विकिरणों के लिये ऊर्जा वितरण भी अलग-अलग है। माना कि dR वस्तु से उत्सर्जित उस विकिरण ऊर्जा को प्रदर्शित करता है जो λ तथा $\lambda + d\lambda$ के विकिरणों में निहित है। अलग-अलग तरंग दैर्ध्य के विकिरण के लिये dR का यह मान प्रयोगों द्वारा पता लगाया जा सकता है। भिन्न तरंग दैर्ध्य के विकिरणों के लिये $\frac{dR}{d\lambda}$ का मान भी भिन्न-भिन्न होता है। चित्र 8·3 में किसी निश्चित ताप पर निश्चित वस्तु के द्वारा उत्सर्जित विकिरणों के लिये $\frac{dR}{d\lambda}$ का λ के साथ परिवर्तन प्रदर्शित किया गया है।



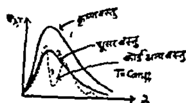
चित्र—8·3

इस वक्र से यह प्रदर्शित होता है कि वस्तु से उत्सर्जित विकिरणों में किस तरंग दैर्ध्य के विकिरण अधिक हैं या कम। $\frac{dR}{d\lambda}$ को वस्तु की उत्सर्जन क्षमता अथवा स्पैक्ट्रमी ऊर्जा घनत्व $e_{\lambda,T}$ कहते हैं। $e_{\lambda,T}$ किसी वस्तु के 1 वर्ग मी. क्षेत्र द्वारा 1 sec में उत्सर्जित λ या $\lambda+d\lambda$ के विकिरणों की मात्रा कहलाती है। इसे ही वस्तु का स्पैक्ट्रमी ऊर्जा घनत्व या वस्तु की किसी निश्चित ताप T पर λ-विकिरणों के लिये उत्सर्जन क्षमता (Emissive power) कहलाती है।

$$\therefore \qquad dR = e_{\lambda,T}\, d\lambda$$

$$\therefore \qquad R(T) = \int_0^\infty e_{\lambda,T}\, d_\lambda = \text{वक्र } e_{\lambda,T} \text{ तथा X-अक्ष के बीच का क्षेत्र}$$

एक पूर्ण कृष्ण वस्तु की किसी निश्चित ताप पर उत्सर्जित विकिरणो में सभी तरंग दैर्ध्य के विकिरण होते है अर्थात् पूर्ण कृष्ण वस्तु का स्पेक्ट्रम अविरत (Continuous) होता है। परन्तु अलग-अलग तरंग दैर्ध्य के विकिरणों के लिये स्पैक्ट्रमी ऊर्जा घनत्व अलग-अलग होता है (चित्र 8·4)। धूसर वस्तु का स्पैक्ट्रमी ऊर्जा घनत्व वितरण यद्यपि कृष्ण वस्तु की तरह अविरत होता है परन्तु प्रत्येक तरंग दैर्ध्य के विकिरण के लिये



8·4

धूसर वस्तु की उत्सर्जन क्षमता कृष्ण वस्तु की उत्सर्जन क्षमता के सापेक्ष कम होती है [चित्र 8·4 (वक्र 2)]। वक्र 3 किसी अन्य वस्तु का ऊर्जा वितरण वक्र है। अन्य प्रकार की वस्तुओं का विकिरण किन्हीं विशेष तरंग दैर्ध्य के लिये अधिक है तथा किन्ही अन्य तरंगो के लिये कम।

8.3. किर्शोफ का नियम

विकिरण सम्बन्धी एक महत्वपूर्ण नियम पिछली शताब्दी के मध्यम भाग में किर्शोफ द्वारा सर्वप्रथम ज्ञात किया गया, इसके अनुसार "किसी निश्चित ताप पर तथा किसी निश्चित तरंगदैर्ध्य के विकिरण के लिये प्रत्येक वस्तु की उत्सर्जन क्षमता तथा उसकी अवशोषण क्षमता की निष्पत्ति सदैव स्थिरांक होती है, तथा इस स्थिरांक का मान केवल तरंगदैर्घ्य λ तथा ताप T पर निर्भर करता है।"

उदाहरणार्थ माना कि किसी निश्चित ताप T पर विभिन्न वस्तुओं A, B,

C, ... इत्यादि की λ तरंगदैर्घ्य के विकिरण के लिये उत्सर्जन क्षमता क्रमशः a'_λ, a''_λ a'''_λ...... इत्यादि हैं, तो किर्शोफ के नियमानुसार :

$$\frac{e'_\lambda}{a'_\lambda} = \frac{e''_\lambda}{a''_\lambda} = \frac{e'''_\lambda}{a'''_\lambda} = \ldots\ldots = \text{स्थिराङ्क}$$

यदि इनमें से कोई एक वस्तु "आदर्श कृष्ण वस्तु" है तो स्पष्ट है कि आदर्श कृष्ण की वस्तु की अवशोपण क्षमता

$$A_\lambda = 1 \qquad \text{(कृष्ण वस्तु के लिये)}$$

अतः समीकरण ...से

$$\frac{e'_\lambda}{a'_\lambda} = \frac{e''_\lambda}{a''_\lambda} = \ldots\ldots = \frac{E_\lambda}{1} = \text{स्थिराङ्क} = f(\lambda, T)$$

जहाँ पर पूर्ण कृष्ण वस्तु की λ तरंगदैर्घ्य के विकिरण के लिये T ताप पर उत्सर्जन क्षमता है। इस स्थिराङ्क को f (λ,T) से प्रदर्शित किया गया है जो यह सकेत करता है $\frac{e_\lambda}{a_\lambda}$ का मान केवल λ तथा T पर ही निर्भर कर सकता है।

अतः दूसरे शब्दों में किर्शोफ नियमानुसार :

$$\boxed{e_\lambda \propto a_\lambda}$$

यह महत्वपूर्ण सम्बन्ध प्रकृति की कई महत्वपूर्ण घटनाओं की सही व्याख्या करने में सहायक है। इस नियम से यह स्पष्ट है कि यदि कोई वस्तु λ-विकिरण को अवशोपित अधिक करती है तो यदि इसे गरम किया जाय तो यही वस्तु λ विकिरण को उत्सर्जित भी अधिक करेगी। उदाहरणार्थ लाल काँच हरे रंग के विकिरण को अवशोपित करता है तो किर्शोफ के नियमानुसार लाल काँच को यदि गर्म करके अँधेरे कमरे में ले जायें तो वह हरा चमकता हुआ प्रतीत होगा, क्योंकि यह हरे प्रकाश को उत्सर्जित करेगा।

8·4. कृष्णिका का स्पैक्ट्रमी ऊर्जा का वितरण
(Spectral energ· distribution of black body rediation)

किर्शोफ के नियम से यह स्पष्ट है कि आदर्श कृष्ण वस्तु की उत्सर्जन क्षमता $E_{\lambda,T}$ केवल विकिरण के तरंग दैर्घ्य λ तथा वस्तु के ताप T पर ही निर्भर करती

है, अर्थात् एक निश्चित ताप पर सभी कृष्ण वस्तुओं का (E_{λ}, λ) ग्राफ समान होगा। चित्र (8-4) में कृष्ण वस्तु के लिये यह सम्बन्ध वक्र द्वारा प्रदर्शित किया गया है। इस ग्राफ से निम्न बातें स्पष्ट हैं :

(1) कृष्ण वस्तु से उत्सर्जित विकिरण में सभी तरंगें ($O \rightarrow \infty$) तक की उत्सर्जित होती हैं, अर्थात् कृष्ण वस्तु का स्पैक्ट्रम सन्तत है।

(2) ग्राफ से यह भी स्पष्ट है कि अतिसूक्ष्म तरंग दैर्घ्य के विकिरणों का ऊर्जा घनत्व तथा अत्यधिक तरंगदैर्घ्य के विकिरणों का ऊर्जा घनत्व कम होता जाता है।

(3) किसी निश्चित ताप पर एक निश्चित तरंग दैर्घ्य के विकिरणों का ऊर्जाघनत्व अधिकतम है।

कृष्ण वस्तु के इस विशेष प्रकार से स्पैक्ट्रमी ऊर्जा के वितरण की सैद्धान्तिक व्याख्या भौतिकी के इतिहास की एक महत्वपूर्ण घटना है। इसकी सही व्याख्या सर्वप्रथम जर्मन वैज्ञानिक प्लांक (May Plank) ने दी। इसका आगे वर्णन किया गया है।

8·5. प्रीवोस्ट का ऊष्मा विनिमय सिद्धान्त

प्रीवोस्ट से पूर्व यह धारणा प्रचलित थी कि गर्म वस्तुओं से उत्सर्जित विकिरण "गर्म" तथा ठण्डी वस्तुओं से उत्सर्जित विकिरण "ठण्डे" होते हैं। प्रीवोस्ट ने इस धारणा को त्रुटिपूर्ण बताया तथा उसके अनुसार किसी वस्तु के निकट "ठण्डक" या "गर्माहट" का महसूस होना विकिरणों का "ठण्डा" या "गर्म" होने के कारण नहीं है अपितु इसका मुख्य कारण वस्तु तथा वातावरण के मध्य ऊर्जा विनिमय होना है। प्रीवोस्ट के सिद्धान्तानुसार *"प्रत्येक वस्तु प्रत्येक ताप पर अपने वातावरण में स्थित अन्य वस्तुओं से ऊर्जा लेती भी है तथा साथ ही ऊर्जा (ऊष्मा विकिरणों के रूप में) उत्सर्जित भी करती है।"* वस्तुओं से उत्सर्जित विकिरण केवल परम शून्य ताप पर ही लुप्त होते हैं। अतः यदि कोई वस्तु A वातावरण B में रखी हुई है तो प्रीवोस्ट के नियमानुसार A तथा B में ऊष्मा विकिरणों के रूप में ऊर्जा का आदान-प्रदान होगा। यदि A से उत्सर्जित ऊष्मा विकिरणों की दर B से उत्सर्जित विकिरणों की दर से कम या अधिक है तो A वस्तु वातावरण के सापेक्ष "ठण्डी" या "गर्म" होना इस बात पर निर्भर करना है कि अमुक वस्तु का वातावरण से "ऊष्मा विनिमय दर" क्या है। उदाहरण के लिए यदि बर्फ तथा वातावरण के मध्य ऊष्मा विकिरणों के विनिमय को ही लो प्रीवोस्ट की धारणा के अनुसार बर्फ से उत्सर्जित विकिरण बर्फ के ताप के चतुर्थघात के समानुपाती होंगे। (स्टीफन के नियमानुसार) चूंकि बर्फ का ताप वातावरण के ताप से कम है, अतः बर्फ से प्रति सैकिण्ड उत्सर्जित विकिरणों की मात्रा से कम है, अतः बर्फ का वातावरण से ऊर्जा का ग्रहण करने की

दर उसके स्वयं के द्वारा उत्सर्जन की दर से कम है। अतः बर्फ वातावरण के सापेक्ष अधिक ठण्डी महसूस होती है।

यदि कोई व्यक्ति बर्फ के बड़े ढेर के पास खड़ा होता है तो उसको ठण्डक महसूस होती है, क्योंकि बर्फ से उसे कम विकिरण ऊर्जा प्राप्त होती है और उसमें स्वयं में से अधिक ऊष्मा-विकिरण उत्सर्जित होती है। इसी प्रकार जब कोई व्यक्ति किसी गर्म भट्टी के पास खड़ा होता है, तब उसे गर्मी महसूस होती है क्योंकि उसे अधिक ऊष्मा-ऊर्जा प्राप्त होती है।

जब गर्म वस्तु अपेक्षाकृत ठण्डे वातावरण में रखी जाती है तब उसमें से ऊष्मा विकिरण की दर अधिक होती है और उसका ताप कम होने लगता है। यह तब तक होता रहता है जब तक वातावरण और वस्तु का ताप एक-सा नहीं हो जाय। इस स्थिति में दोनों के लिए उत्सर्जित और अवशोषित ऊष्मा की मात्रा समान हो जाती है और ताप स्थिर रहता है। यह एक प्रकार की गतिक साम्य (Dynamic equilibrium) की स्थिति है।

8.6. कृष्णिका विकिरण के नियम

आदर्श कृष्ण वस्तु से उत्सर्जित विकिरण केवल कृष्ण वस्तु के ताप पर ही निर्भर करते हैं। कृष्ण वस्तु से उत्सर्जित विकिरणों का अध्ययन इसलिए महत्वपूर्ण है क्योंकि इसके द्वारा किसी अन्य वस्तु के द्वारा उत्सर्जित ऊष्माविकिरणों का स्पेक्ट्रमी ऊर्जाघनत्व आसानी से मालूम किया जा सकता है, यदि उस वस्तु की अवशोषण क्षमता मालूम हो। अवशोषण क्षमता का मान आसानी से प्रयोगों द्वारा मालूम किया जा सकता है। चित्र (8·4) में वक्र आदर्श कृष्ण वस्तु से उत्सर्जित विकिरणों का ($e_{\lambda,\lambda}$) ग्राफ है; वक्र 2 तथा 3 जो कि वक्र 1 से ही प्राप्त किया गया है किसी अन्य वस्तु के लिए ($e_{\lambda,\lambda}$) ग्राफ है। वक्र 1 से वक्र 2 तथा 3 को आसानी से प्राप्त किया जा सकता है यदि उस वस्तु की अवशोषण क्षमता $a_{\lambda, T}$ मालूम हो: उदाहरणार्थ λ विकिरण के लिए T ताप पर आदर्श कृष्ण वस्तु की उत्सर्जन क्षमता माना कि $E_{\lambda, T}$ है, तथा इसी ताप पर इसी तरंग दैर्घ्य के विकिरण के लिए हम किसी अन्य वस्तु की उत्सर्जन क्षमता $e_{\lambda, T}$ निकालना चाहते हैं तो किर्शॉफ के नियमानुसार :

$$\frac{e_{\lambda, T}}{a_{\lambda, T}} = E_{\lambda, T}$$

अथवा
$$e_{\lambda, T} = a_{\lambda, T}\, E_{\lambda, T}$$

चूंकि $E_{\lambda, T}$ का मान मालूम है अतः $c_{\lambda, T}$ का भी मान मालूम किया जा सकता है अर्थात् $(E_{\lambda,\lambda})$ ग्राफ के $(c_{\lambda,\lambda})$ ग्राफ प्राप्त किया जा सकता है। यही कारण है कि कृष्ण वस्तु के विकिरणो का अत्यन्त महत्वपूर्ण स्थान है। कृष्णिका से उत्सर्जित विकिरण निम्न महत्वपूर्ण नियमो का पालन करते हैं;

(a) स्टीफेन बोल्ट्जमेन का नियम—इस नियमानुसार "परमताप $T^{\circ}k$ पर किसी भी कृष्ण वस्तु के इकाई क्षेत्रफल द्वारा इकाई समय में उत्सर्जित विकिरणो की मात्रा, कृष्णवस्तु के परमताप T के चतुर्थघात के समानुपाती होती है।"

यदि कृष्ण वस्तु से T ताप पर उत्सर्जित विकिरणो का ऊर्जा घनत्व है तो

$$R \propto T^4$$

अथवा $$R = \sigma T^4$$

जहां पर σ स्टीफेन का स्थिराक कहलाता है इसका मान $\sigma = 5{\cdot}6687 \times 10^{-8}\ Jm^{-2}\ sec^{-1}\ deg^{-4}$ होता है। (जूल/मीटर². सैकण्ड. डिग्री⁴)। यदि किसी कृष्ण वस्तु का ताप $800^{\circ}k$ से $2400^{\circ}k$ बढ़ा दिया जाय तो उससे उत्सर्जित विकिरणों की मात्रा की दर 81 गुणा बढ जायगी। जैसा कि हम पहले देख चुके हैं कि,

$$R = \int_0^{\infty} c_{\lambda}\, d\lambda = (e_{\lambda,\lambda})$$ ग्राफ पर वक्र तथा X-अक्ष के मध्य का क्षेत्रफल

अतः ताप के बढ़ने से (e_{λ}, λ) वक्र तथा X-अक्ष के मध्य का क्षेत्र T^4 नियमानुसार बढता चला जायेगा। यह चित्र (8·5) से स्पष्ट है।

यदि कृष्णवस्तु $T_1{}^{\circ}k$ ताप पर $T_2{}^{\circ}k$ ताप के वातावरण मे रखी हुई है, तो स्पष्ट है कि वस्तु के इकाई क्षेत्र से प्रति सैकंड उत्सर्जित विकिरित ऊर्जा σT_1^4 तथा वस्तु के द्वारा वातावरण से प्रति सैकंड अवशोषित ऊर्जा σT_2^4 अतः वस्तु के द्वारा प्रति सैकंड विकरित ऊर्जा

$$R = \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

(b) वीन का विस्थापन नियम—कृष्णवस्तु से उत्सर्जित विकिरण एक महत्वपूर्ण नियम प्रतिपादित करते हैं, यह निम्न है : "T ताप पर उत्सर्जित कृष्णवस्तु के विकिरणों में यदि अधिकतम ऊर्जा घनत्व के विकिरणो की तरगदैर्घ्य λ_0 है तो वीन के नियमानुसार

$$\lambda_0 T = \text{स्थिराङ्क} = B$$

B को वीन का स्थिराङ्क कहते हैं। B का मान 0·2898 cm λ_0 को से० मी० में नापा जाये) होता है। वीन के नियम से स्पष्ट।

बढ़ने से λ_0 का मान घट जायेगा अर्थात ताप बढ़ने पर छोटी तरंगदैर्घ्य के विकिरणों का ऊर्जा घनत्व बढ़ जाता है । उदाहरणार्थ विभिन्न तापों पर चित्र (8·5) में कृष्ण वस्तु के लिये (e_λ, λ) वक्र दिये गये हैं चित्र से स्पष्ट है कि ताप के बढ़ने पर वक्र के अधिकतम ऊर्जा घनत्वों के विन्दु क्रमश: छोटी तरंगदैर्घ्य की ओर विस्थापित होते जाते हैं । इसको समझने के लिये हम एक प्रायोगिक उदाहरण देंगे । यह विदित है कि कम ताप पर वस्तुओं से उत्सर्जित विकिरण अवरक्त विकिरण (Infrared radiations) होते हैं, यदि ताप बढ़ जाये जैसे अंगीठी के कोयलों के ताप पर उत्सर्जित विकरणों में लाल विकिरणों की मात्रा अधिक होगी, यदि ताप को और बढ़ाया जाये उदाहरणार्थ वल्ब के ताप पर निकलने वाले विकिरणों में "पीले" रंग के प्रकाश के विकिरणों का ऊर्जा घनत्व अधिक है, यदि ताप और अधिक बढ़ जाये उदाहरणार्थ ऑक्सी एसीटिलिन के ताप पर उत्सर्जित विकिरणों में नीले रग के विकिरण अधिक मात्रा में निकलते हैं । अत: स्पष्ट है कि ताप के बढ़ने पर न केवल उत्सर्जित विकिरणों की कुल मात्रा T^4 नियमानुसार बढ़ती जाती है, साथ ही अधिकतम ऊर्जा घनत्वों के विकिरणों की तरंगदैर्घ्य कम होती जाती है । यही वीन के विस्थापन नियम में निहित सार है ।



चित्र—8·5

वीन के नियम का सवसे महत्वपूर्ण उपयोग यह है कि ग्रह तथा उपग्रहों का ताप जाना जा सकता है । जैसे कुछ तारों से निकलने वाले प्रकाश में लाल प्रकाश के विकिरण अधिक हैं यदि इस प्रकाश की तरंग दैर्घ्य मालूम हो तो $\lambda_0 T = B$ के सूत्र से तारे का ताप मालूम किया जा सकता है । स्पष्ट है कि तारों का ताप श्वेत तारों (White Stars) के ताप के सापेक्ष कम होगा । इस तरह हम किसी भी प्रदीप्त वस्तु का ताप का अनुमान लगा सकते हैं ।

(c) **प्लांक का नियम**—कृष्ण वस्तु से उत्सर्जित विकिरणों का एक निश्चित ताप T पर (e_λ, λ) ग्राफ एक सन्तक वक्र है जिसकी प्रकृति चित्र (8·5) के किसी एक वक्र से समझी जा सकती है । इस वक्र की प्रकृति की व्याख्या करने के लिये स्टीफेन तथा वीन के विस्थापन नियम ही पर्याप्त नहीं है । हम e_λ तथा λ में किसी निश्चित तात पर एक सम्बन्ध चाहते हैं जो कि प्रायोगिक वक्र की व्याख्या कर सके । इस दिशा में सर्व प्रथम प्रयास वीन तथा रेले और जीन्स ने किये । दोनों ने ही विद्युत चुम्बकीय तरंगों की सन्तत प्रकृति तथा ऊर्जा के समविभाजन (Equipartition of energy) के नियम के आधार पर निम्न सूत्र दिये :

(1) वीन का सूत्र :

$$e_{\lambda,T} = \frac{a}{\lambda^5} \frac{b}{e^{-\lambda T}}$$

जहाँ पर a तथा b दो स्थिरांक हैं।

(2) रेले तथा जीन्स का सूत्र :

$$e_{\lambda,T} = 8\pi kT\lambda^{-4}$$

जहाँ पर k बोल्जमेन स्थिरांक है।

प्रयोगों से यह पता चलता है कि किसी दिये हुए ताप पर छोटी तरंग दैर्घ्य के विकिरणों के लिये वीन का सूत्र प्रायोगिक वक्र से मेल खाता है, परन्तु बड़ी तरंग दैर्घ्य के विकिरणों के लिये वीन का सूत्र प्रायोगिक वक्र से मेल नहीं खाता। बड़ी तरंग दैर्घ्य के विकिरणों के लिये रेले जीन्स का सूत्र प्रायोगिक वक्र से मेल खाता है परन्तु छोटी तरंग दैर्घ्य के विकिरणों के लिये रेले जीन्स का सूत्र प्रायोगिक वक्र से मेल नहीं खाता। अतः इस समय एक ऐसे सूत्र की आवश्यकता थी जो पूरी वक्र (e_{λ}, λ) की व्याख्या कर सके। इस समस्या का निदान सर्वप्रथम मैक्स प्लांट ने सन् 1900 में भौतिकी के चिर सम्मत सिद्धान्तों को मोड़ दिया। उनके अनुसार :

"विकिरण तथा पदार्थ के मध्य की अन्योन्य क्रिया के फलस्वरूप पदार्थ तथा विकिरण ऊर्जा का विनिमय सतत न होकर असतत (discrete) है।" भौतिकी के इतिहास में यह प्रथम घटना थी जहाँ पर प्रकृति में सतत प्रक्रमों की जगह असतत प्रक्रमों का होना पाया गया। प्लांक के निम्न सूत्र दिया।



चित्र—8·6

$$e_{\lambda,T} = \frac{2\pi hC^2}{\lambda^5} \times \frac{1}{e^{(hC/k\lambda T} - 1)}$$

$$= \frac{C_1}{\lambda^5} \times \frac{1}{e^{(C_2/\lambda T} - 1)}$$

जहाँ पर $C_1 = 2\lambda hC^2$, $C_2 = \frac{hC}{k}$, C = प्रकाश का वेग।

8·7· न्यूटन का शीतलीकरण नियम

किसी वस्तु की सतह द्वारा विकरित ऊर्जा निम्न बातों पर निर्भर करती है .

(i) वस्तु की सतह का क्षेत्रफल

(ii) वस्तु की सतह की प्रकृति

(iii) वस्तु तथा वातावरण का ताप

यदि दो वस्तुएँ जिनकी बाह्य सतह का क्षेत्र समान है तथा जिनकी प्रकृति उदाहरणार्थ चमक या कालापन आदि समान है तो न्यूटन के नियमानुसार "किसी वस्तु के ठंडे होने की दर केवल वस्तु के ताप तथा वातावरण के ताप के अन्तर के समानुपाती होती है। यह आवश्यक है कि तापान्तर अधिक नहीं होना चाहिये"।

माना कि T_1°K वस्तु का ताप है तथा T_2°K वातावरण का ताप है, तो वस्तु के ठंडे होने की दर :

$$R=\sigma[T_1^4-T_2^4]$$

माना कि $T_1=T_2+t$

अत: $R=\sigma[(T_2+t)^4-T_2^4]$

$$=\sigma\left[T_2^4\left(1+\frac{t}{T_2}\right)^4T_2^4\right]$$

$$=\sigma T_2^4\left[\left(1+\frac{t}{T_2}\right)^4-1\right]$$

$$=\sigma T_2^4\left[1+4\frac{t}{T_2}+\ldots-1\right]$$

चूंकि $t/T_2<<1$ अत:

$(t/T_2)^2$ इत्यादि राशियाँ 1 के सापेक्ष नगण्य हैं।

अत: $R=4\sigma T_2^3t=kt$ $\qquad t/T_2<<1$

अत: $R\alpha t$

इसलिये किसी वस्तु के ठंडे होने की दर वस्तु तथा वातावरण के ताप के अन्तर के समानुपाती होती है। यही कारण है जैसे-जैसे वस्तु का ताप कम होता जाता है, वस्तु के ठंडे होने की दर भी कम होती जाती है।

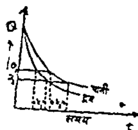
न्युटन के शीतलीकरण नियम से किसी द्रव की विशिष्ट ऊष्मा ज्ञात करना —न्यूटन के नियम से यह स्पष्ट है कि यदि दो द्रवों को समान सतह क्षेत्र तथा प्रकृति के दो कैलोरीमीटरों में रखा जाये तथा वातावरण भी समान हो तो दोनों द्रवों के ठंडे होने की दर समान होगी यदि दोनों द्रवों का ताप भी समान हो। माना कि द्रव क्रमश: A तथा B हैं।

तो A द्रव के ठंडे होने की दर=B द्रव के ठंडे होने की दर माना कि A द्रव की संहति m_1 है तथा θ_1 से θ_2 ताप तक ठंडा होने में t_1 sec समय लेता है एवं B द्रव जिसकी संहति m_2 है तथा θ_1 से θ_2 ताप तक ठंडे होने में t_2 sec समय लेता है तो स्पष्ट है,

$$\frac{m_1S_1(\theta_1-\theta_2)+W(\theta_1-\theta_2)}{t_1}=\frac{m_2S_2(\theta_1-\theta_2)+W(\theta_2-\theta_2)}{t_2}$$

जहां पर W कैलोरीमापी का जल तुल्यांक है तथा S_1 तथा S_2 क्रमश. A तथा B की विशिष्ट ऊष्माएँ हैं ।

इसलिये $\frac{m_1S_1+W}{t_1}=\frac{m_2S_2+W}{t_2}$



चित्र—8·7

यदि इनमें से एक द्रव पानी हो तो $S_2=1$, हम S_1 का मान मालूम कर सकते हैं । चित्र (8·7) में द्रव तथा पानी के ठंडे होने के वक्र दिखाये गये हैं । ग्राफ से आसानी से θ_1 से θ_2 तक ठंडा होने का समय क्रमश. t_1 तथा t_2 की गणना की जा सकती है ।

उदाहरण 8·1. तारो (Stars) के सतह के ताप का अनुमान उनसे आने वाले विकिरणो में से अधिकतम तीव्रता के विकिरणो की तरंग दैर्घ्य λ_0 का प्रयोगात्मक मान मालूम करने से लगाया जा सकता है, यदि तारों से आने वाले विकिरण को कृष्ण वस्तु विकिरण माना जाय तो उन तारो के सतह के ताप का अनुमान लगाओ जिनके विकिरण स्पेक्ट्रम में λ_0 का मान क्रमश: (a) $0{\cdot}55\times10^{-4}$ cm (b) $0{\cdot}35\times10^{-4}$ cm (c) $0{\cdot}29\times10^{-4}$ cm.

[वीन स्थिरांक b=0 29 cm degree]

(a) $\lambda_0 T=b$

$0{\cdot}55\times10^{-4}\times T=0{\cdot}29$

$$T=\frac{0{\cdot}29}{0{\cdot}55\times10^{-4}}=\frac{29\times10^4}{55}$$

$$=5500^\circ K$$ (सूर्य का ताप)

(b) $0{\cdot}35\times10^{-4}\times T=0{\cdot}29$

$$\therefore\quad T=\frac{0{\cdot}29}{0{\cdot}35\times10^{-4}}=\frac{29\times10^4}{35}=8300^\circ K$$

(उत्तरी तारा का ताप)

(c) $0{\cdot}29\times10^{-4}\times T=0{\cdot}29$

$$\therefore\quad T=\frac{0{\cdot}29}{0{\cdot}29\times10^{-4}}=10^4=1000^\circ K$$

(सिरियस तारे का ताप) उत्तर :

उदाहरण 8·2. सूर्य की त्रिज्या 7×10^{10} cm है, तथा इसकी संहति 2×10^{33} g. है । यदि इसकी सतह का ताप = 5700°K माना जाय तो सूर्य के विकिरण के लिये सत्य मानकर

(i) सूर्य के द्वारा प्रति सैकेंड उत्सर्जित विकिरण ऊर्जा का मान क्या होगा।

(ii) सूर्य का ऊर्जा के विकिरण होने के कारण प्रति सैकेंड उसकी संहति कितनी कम हो रही है।

(iii) सूर्य की संहति में 1% की कमी कितने समय में होगी।

[दिया है : $\sigma = 5{\cdot}7 \times 10^{-5}$ erg/cm^2. sec. deg^4

(i) स्टीफेन बोल्ट्जमेन नियम के द्वारा यदि E=कृष्ण वस्तु के द्वारा प्रति से० प्रति इकाई क्षेत्र द्वारा विकरित ऊर्जा की मात्रा

तो $$E = \sigma T^4]$$

अतः सूर्य की पूरी सतह से प्रति सै० विकरित ऊर्जा की मात्रा

$$E' = \sigma T^4 \times \text{सूर्य की सतह का क्षेत्रफल}$$

$$= \sigma T^4 \times 4\pi r^2$$

प्रश्नानुसार $T = 5700 + 273 = 5973°K$; $r = 7 \times 10^{10}$ cms.

अतः $E' = 5{\cdot}7 \times 10^{-5} \times (5973)^4 \times (22/7) \times (7 \times 10^{10})^2$ ergs/sec

$$= 5{\cdot}7 \times 4 \times (22/7) \times 49 \times 10^{15} \times (5973)^4 \text{ ergs/sec}$$

$$= 4458 \times 10^{30} \text{ ergs/sec}$$

(ii) $\therefore E' = mc^2$

$$\therefore \quad m = \frac{E'}{C^2} = \frac{4458 \times 10^{30}}{9 \times 10^{20}} = 4{\cdot}95 \times 10^{12} \text{ grms/sec}$$

उत्तर

(iii) सूर्य की संहति का $1\% = \frac{1}{100} \times M = \frac{2 \times 10^{33}}{100} = 2 \times 10^{31}$ gms.

अतः सूर्य की संहति में 1% कमी आने में लगा समय

$$= \frac{2 \times 10^{31} \text{ grms}}{4{\cdot}95 \times 10^{12} \text{ grms/sec}}$$

$$= \frac{2 \times 10^{31}}{4{\cdot}95 \times 10^{12}} \text{ secs}$$

$$= \frac{2 \times 10^{31}}{4{\cdot}95 \times 10^{12} \times 60 \times 60 \times 24 \times 365} \text{ yrs}$$

$$\simeq 10^{11} \text{ years.}$$

स्पष्ट है कि अब यह अन्दाज लगाया जा सकता है कि सूर्य को समाप्त होने में कितना समय लगेगा। उत्तर

उदाहरण 8·3. दो ठोस गोलों A व B के व्यास का अनुपात 2:1 है तथा उनकी सतहें एक समान प्रकृति की हैं। A का ताप 400°K, B का ताप 300°K है। स्टीफ़ेन का नियम उपयुक्त मानते हुए दोनों गोलों के ठन्डे होने की दरों का अनुपात ज्ञात करो। [Rajasthan 1967]

माना कि E_1=A गोले से प्रति सें० विकरित ऊष्मा; A_1=गोले की सतह क्षेत्रफल,

E_2=B गोले से प्रति सें० विकरित ऊष्मा; A_2=B गोले की सतह क्षेत्रफल,

अत. $$\frac{E_1}{A_1}=\sigma(T_1^4-T_0^4);\ \frac{E_2}{A_2}=\sigma(T_2^4-T_0^4)$$

$$\therefore\ E_1=\sigma(T_1^4-T_0^4)A_1;\ E_2=\sigma(T_2^4-T_0^4)A_2$$

अत: $$\frac{E_1}{E_2}=\frac{T_1^4-T_0^4}{T_2^4-T_0^4}\times\frac{A_1}{A_2}=\left[\frac{(400)^4-(200)^4}{(300)^4-(200)^4}\right]\times\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2}$$

माना कि A का व्यास d_1, B का व्यास d_2

अत: $$\frac{d_1}{d_2}=\frac{2r_1}{2r_2}=\frac{r_1}{r_2}$$

प्रश्नानुसार $$\frac{d_1}{d_2}=\frac{2}{1}$$

$$\therefore\ \frac{r_1}{r_2}=\frac{2}{1}\qquad\therefore\ \frac{r_1^2}{r_2^2}=\frac{4}{1}$$

अत: $$\frac{E_1}{E_2}=\left[\frac{(400)^4-(200)^4}{(300)^4-(200)^4}\right]\times\frac{4}{1}$$

$$=\frac{(100)^4}{(100)^4}\left\{\frac{4^4-2^4}{3^4-2^4}\right\}\times\frac{4}{1}$$

$$=\left\{\frac{256-16}{81-16}\right\}\times\frac{4}{1}$$

$$=\frac{240}{65}\times\frac{4}{1}=147:1$$

उदाहरण 8·4. 40 वाट के एक टंगस्टन वल्ब के तन्तु का ताप 2170°C है और उसकी सतह का कार्यकारी क्षेत्रफल 0·66 वर्ग से० मी० है। यह मान-कर, कि विकिरण ऊर्जा का मान समान परिस्थितियों में किसी आदर्श कृष्ण वस्तु विकिरण ऊर्जा के मान का 0·31 भाग है, स्टीफेन के नियतांक की गणना करो। वल्ब के कांच का विकिरण ऊर्जा पर प्रभाव नगण्य है। [Rajasthan 1969]

$$T=(2170+273)^{\circ}k=2443^{\circ}k$$

कृष्ण वस्तु से इकाई क्षेत्रफल सतह द्वारा प्रति से० विकिरण ऊर्जा स्टीफेन बोल्ट्जमेन नियम द्वारा

$$E=\sigma\ (2443)^4 \text{ ergs/cm}^2 \text{ sec}$$

अतः टंगस्टन वल्ब के तन्तु द्वारा प्रति से० प्रति इकाई क्षेत्रफल द्वारा

$$E'=0\cdot31\ E=0\cdot31\times\sigma\times(2443)^4 \text{ ergs/sec. cm}^2$$

अतः तन्तु के 0·66 sq cm क्षेत्रफल द्वारा प्रति सैकेंड विकरित ऊर्जा

$$E''=0\cdot31\times\sigma\times(2443)^4\times0\cdot66 \text{ ergs/sec}$$

परन्तु $E''=40\ W=40\times10^7$ ergs/sec

अतः $40\times10^7=0\cdot31\times\sigma\times(2443)^4\times0\cdot66$

$$\therefore \quad \sigma=\frac{40\times10^7}{0\cdot31\times(2443)^4\times0\cdot66}$$

$$=5\cdot6\times10^{-5}$$ उत्तर

उदाहरण : 8·5. एक वस्तु 10 मिनट में 62°C से 50°C तक और अगले 10 मिनट में 42°C तक ठण्डी हो जाती है। अगले 10 मिनट बाद इसका क्या ताप होगा ? [Rajashthan 1972, 59]

न्यूटन के शीतली करण नियम से स्पष्ट है कि :

$$\frac{m\times s\times(62-50)}{10}=k\left(\frac{62+50}{2}-\theta\right) \quad \ldots(i)$$

जबकि θ वातावरण का ताप है।

वस्तु पुनः 50°C से 42°C तक ठण्डे होने में 10 मिनट लेती है

अतः $$\frac{m\times s\times(50-42)}{10}=k\left(\frac{50+42}{2}-\theta\right) \quad \ldots(ii)$$

माना कि अगले 10 मिनट बाद इसका ताप t हो जाता है :

$$\frac{m\times s\ (42-t)}{10}=k\left(\frac{42+t}{2}-\theta\right) \quad \ldots(iii)$$

समीकरण (*i*) में (ii) का भाग देने पर

$$\frac{62-50}{50-42}=\frac{56-\theta}{46-\theta}$$

$$\therefore \qquad \theta=26^\circ C$$

इसी प्रकार समीकरण (ii) तथा (iii) से

$$\frac{50-42}{42-t}=\frac{46-\theta}{\frac{42-t}{2}-\theta}=\frac{46-26}{\frac{42+t}{2}-26}$$

$$\frac{8}{42-t}=\frac{20}{\frac{42+t}{2}-26}$$

$$\frac{2}{42-t}=\frac{5\times 2}{t-10}$$

$$t-10=210-5t$$

$$6t=220$$

$$t=36\ 6^\circ C \qquad \text{उत्तर}$$

प्रश्न

(1) किसी वस्तु की उत्सर्जन क्षमता, अवशोषण क्षमता, की परिभाषा दो। किर्शोफ के नियम का वर्णन करो तथा इसकी सहायता से सूर्य के स्पैक्ट्रम में पायी जाने वाली 'काली रेखाओं' की व्याख्या करो।

(2) इस्पात का टुकड़ा, जब इसे लगभग 800°C तक गर्म किया जाये तो लाल रंग की ज्वाला से दीप्त होता है, जबकि इसके विपरीत क्वार्ट्ज का 'पारदर्शक' टुकड़ा इसी ताप पर बिलकुल भी 'दीप्त' नहीं होता, क्यों ?

(3) कृष्ण वस्तु का विकिरण तथा अन्य प्रकार के विकिरणों जैसे रस-सदीप्ति विकिरण (Chemi luminescence), आलोक-सदीप्ति विकिरण (Photo luminescence) आदि में क्या मौलिक अन्तर है ?

(4) 'पूर्ण कृष्ण वस्तु' की तथा धूसर वस्तु (Grey Body) की परिभाषा दो ? सिद्ध करो कि $T^\circ k$ ताप पर कोई भी बन्द प्रकोष्ठ के एक सूक्ष्म छिद्र द्वारा आने वाला विकिरण 'कृष्ण वस्तु विकिरण' के समतुल्य है।

(5) वीन का नियम क्या है ? इसकी सहायता से तारों की सतह का ताप कैसे निकालोगे ?

(6) कृष्ण वस्तु के ऊर्जा विकिरण का स्पैक्ट्रमी वितरण वक्र विभिन्न तापों पर खींचो तथा उनके अन्दर ताप के परिवर्तन के साथ आने वाले परिवर्तनों की ओर संकेत करो ।

(7) स्टीफेन वोल्ट्जमेन नियम क्या है ? इसकी सहायता से न्यूटन का शीतलीकरण निकालो । प्रीवोस्ट का ऊष्मा विनिमय सिद्धान्त क्या है ?

(8) न्यूटन के शीतलीकरण नियम से किसी द्रव की विशिष्ट ऊष्मा कैसे पता लगाओगे । प्रयोगशाला में न्यूटन के शीतलीकरण नियम का सत्यापन कैसे करोगे ?

(9) 300°C ताप पर कृष्ण वस्तु से 10 वाट ऊष्मा प्रति वर्ग से० मी० विकरित होती है । अगर सूर्य 10^5 वाट ऊष्मा प्रति वर्ग सें० मी० विकरित कर रहा हो तो सूर्य का ताप निकालो ? [Rajasthan 1971]

[उत्तर 5457°C]

(10) एक कैलोरीमापी का जल तुल्यांक 5 ग्राम है । इसे 25 ग्राम जल से भर दिया गया है । 25°C से 17°C तक ठन्डा होने में यह 4 मिनट लेता है, जब इसे 30 ग्राम द्रव से भरते हैं तो इसी ताप तक ठन्डा होने में 180 सैकेंड लगते हैं । द्रव की विशिष्ट ऊष्मा की गणना करो । [Rajasthan 1953)

[उत्तर 0·58]

(11) 10 cm व्यास की एक गोलाकार कृष्ण वस्तु को स्थिर ताप पर रखा जाता है, इस ताप की गणना करो यदि वस्तु के द्वारा प्रति मिनट विकरित ऊष्मा का मान 15k cal/min है ।

[$\sigma = 5 \cdot 7 \times 15^{-5}$ erg/cm². sec. deg⁴, $4 \cdot 2 \times 10^7$ ergs = 1 cal]

Hint : $E/A = \sigma T^4$ अर्थात $E = \sigma T^4 A$

$$\frac{15 \times 10^3 \times 4 \cdot 2 \times 10^7}{60} = 5 \cdot 7 \times 10^{-5} T^4 \times 4\pi (5)^2$$

$\therefore$ $T = 875°k$ उत्तर

(12) वीन के विस्थापन नियम द्वारा उस तारे का ताप ज्ञात करो जिसके स्पैक्ट्रम में अधिकतम तीव्रता की तरंग दैर्ध्य $0 \cdot 30\mu$ (microns) है ।

[$\mu = 10^{-4}$cm, वीन स्थिराङ्क $b = 0 \cdot 29$ cm. degree]

Hint : $\lambda_0 T = b$

$$\therefore \quad T = \frac{b}{\lambda_0}$$

$T = 9666 \cdot 6°k$ उत्तर

9 प्रकाश की प्रकृति
(Nature of Light)

9·1. प्रकाश तरंगों के रूप में

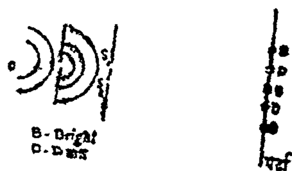
अब तक हम प्रकाशिकी मे जो अध्ययन कर चुके हैं वह ज्यामितीय प्रकाशिकी (Geometrical Optics) कहलाता है। इस अध्ययन मे हम यह मानते रहे हैं कि समांगी माध्यम में प्रकाश सीधी रेखाओ मे गमन करता है तथा प्रकाश के गमन की दिशा बताने वाली रेखा को ही प्रकाश-किरण (Ray of light) की सज्ञा दी जाती है। इस प्रकार माध्यम मे प्रकाश की गति का निश्चित पथ मानते हुए प्रकाश किरणों की सहायता से हमने समतल और गोलीय दर्पण पर परावर्तन, समतल तथा गोलीय तलों (लैन्स) मे अपवर्तन आदि का अध्ययन किया है तथा हम छाया का बनना, दर्पणो मे प्रतिबिम्ब बनना और लैन्स द्वारा प्रतिबिम्ब बनना समझ सके हैं। सामान्य परिस्थितियों मे यह विधि काफी उपयोगी होती है जब किरणापुन्ज पर्याप्त बड़े हों तथा अन्य अवयव भी बड़े हो। (वस्तुतः यह पूर्णतः सही तब ही है जब किरण पुन्ज का विस्तार अनन्त हो)। अन्यथा ज्यामितीय प्रकाशिकी एक स्थूल विधि ही है, जब किरण पुन्ज बहुत बारीक हो और अन्य अवयव भी अत्यन्त लघु हो, तब सामान्य ज्यामितीय प्रकाशिकी की धारणायें उपयुक्त नहीं होती। यह समझने के लिए कि इन धारणाओ का केवल सीमित उपयोग है तथा ये सर्वथा सही नहीं है, प्रकाश की प्रकृति के बारे में अध्ययन करना आवश्यक है।

न्यूटन ने सर्वप्रथम प्रकाश के कणिका-सिद्धान्त का प्रतिपादन किया जिसमें उन्होंने यह माना कि प्रकाश स्रोत से अति सूक्ष्म कण (Corpuscles) निकलते हैं जो आँख की रैटिना पर गिरकर प्रकाश का संवेदन उत्पन्न करते हैं। परन्तु शीघ्र ही यह स्पष्ट हो गया कि प्रकाश को कणों के रूप में मानना संगत नहीं हो सकता, नहीं इनके आधार पर प्रकाश के तरंगीय गुणों यथा व्यतिकरण, विवर्तन और ध्रुवण को समझा जा सकता है। कणिका सिद्धान्त के आधार पर पारदर्शक माध्यम की सतह पर



चित्र—9·1

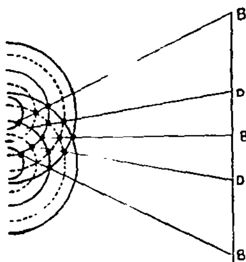
समक्षपिक (Simultaneous) परावर्तन और अपवर्तन की व्याख्या भी संभव नहीं है। सन 1801 में वैज्ञानिक थामस यंग ने प्रकाश के व्यतिकरण का प्रायोगिक प्रदर्शन किया। उन्होंने प्रकाश स्रोत O के सामने एक वारीक रेखाछिद्र रेखा (चित्र 9·2) और उसके सामने वरावर दूरी पर दो अन्य वारीक रेखा छिद्र रखे, S_1 और S_2 तथा यह दोनों प्रकाश के सर्वथा एक समान स्रोतों का कार्य करते हैं और इनके सामने कुछ दूरी पर पर्दा रखने पर उस पर लगभग सीधी चमकीली और काली धारियाँ प्राप्त होती हैं। चित्र में रेखाछिद्र तथा व्यतिकरण फ्रिन्ज (अर्थात चमकीली व काली धारियाँ) कागज के लम्बरूप हैं। यंग के प्रयोग से यह सिद्ध



चित्र—9 2

हुआ कि जिस प्रकार अन्य तरंगों जैसे जल में तरंगों में व्यतिकरण होता है और स्रोतों के सामने कुछ रेखाओं के अनुदिश अधिक आयाम के कम्पन होते हैं और उनके वीच कुछ रेखाओं के अनुदिश जल लगभग स्थिर होता है (चित्र 9·1) उसी प्रकाश में भी व्यतिकरण होता है जैसा कि (चित्र 9·3) में से दर्शित किया गया है, दोनों स्रोतों से गोलीय तरंगें फैलती हैं और जिन विन्दुओं पर दोनों के शृंग अथवा गर्त मिलते हैं वहाँ अधिक आयाम हो जाता है और जहाँ एक तरंग का शृंग और दूसरी

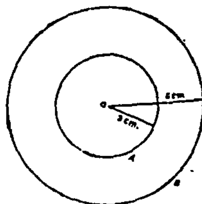
उजली और काली धारियाँ बनती हैं। अतः प्रकाश को किसी प्रकार की तरंग गति ही मानना अधिक संगत है।



चित्र—9 3

इन प्रयोगों के लगभग 123 वर्ष पूर्व ही सन् 1678 में वैज्ञानिक हूयगन्स ने प्रकाश के तरंग सिद्धान्त का प्रतिपादन कर दिया था, यद्यपि उस समय उनके सिद्धान्त को अधिक मान्यता नहीं मिली।

उन्होंने यह माना कि प्रकाश के एक बिन्दु स्रोत से उसी प्रकार तरंगे प्रसारित होती हैं जिस प्रकार जल में पत्थर का टुकड़ा डालने पर वृत्तों के रूप में तरंगे फैलती है। बिन्दु स्रोत से सब दिशाओं में तरंगे एक ही गति से प्रसारित होने के कारण ये तरंगे गोलाकार होती हैं (जब माध्यम समांगी हो)। इन गोलाकार तरंग



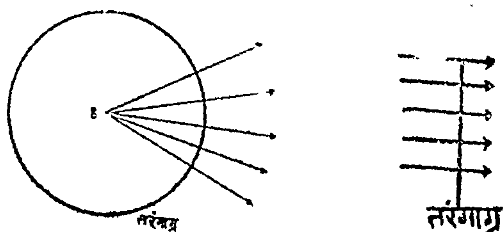
चित्र—9 4

पृष्ठों पर सभी बिन्दु एक ही कला में होते हैं तथा इनका आकार एक निश्चित गति से बढ़ता है जो उस माध्यम में प्रकाश की गति के बराबर होता है। स्पष्टतः किसी समय गोलाकार तरंग का अर्द्धव्यास बराबर होगा $=Ct$, जबकि C प्रकाश तरंगों का वेग है। देखिये चित्र 9·4 निर्वात में बिन्दु स्रोत O से जनित गोलाकार प्रकाश तरंगों का कागज के तल में संचरण दो क्षणों पर दिखाया गया है; A, 10^{-10} सैकण्ड पर और B, 2×10^{-10} सैकण्ड पर।

9·2 तरंग पृष्ठ, प्रकाश किरण और समतल तरंग पृष्ठ

जैसा कि वर्णन किया जा चुका है, बिन्दु स्रोत से जनित तरंगों का तरंग पृष्ठ (Wave Surface) गोलाकार होता है। यदि प्रकाश स्रोत एक बारीक रेखा छिद्र हो तो प्रकाश तरंगे लगभग बेलनाकार पृष्ठ के रूप में प्रसारित होती हैं

जब बिन्दु स्रोत अथवा रेखा छिद्र बहुत दूरीपर हो, तब तरंग पृष्ठ का एक अंश लगभग समतल अंश होगा। इसके अतिरिक्त लैन्स अथवा गोलीय दर्पण की सहायता से भी समतल तरंग पृष्ठ प्राप्त किया जा सकता है। प्रकाश तरंगों की दिशा तरंग पृष्ठ के लम्बरूप होती है। तरंग पृष्ठ का सम्मुख का सीमित भाग तरंगाग्र (Wave Front) कहलाता है और स्पष्ट ही तरंग की दिशा इसके भी लम्बरूप होती है। **तरंगों की दिशा बताने वाली रेखा को ही प्रकाश की किरण कहते हैं।** चित्र 9·5 में गोलाकार तरंगाग्र (अ) तथा समतल तरंगाग्र (ब) तथा किरणें प्रदर्शित किये गये हैं।



चित्र—9·5

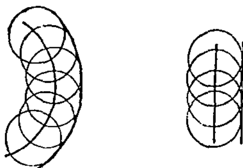
9·3 ह्यगन्स का सिद्धान्त

अपने तरंग सिद्धान्त में एक अत्यन्त महत्वपूर्ण धारणा ह्यगन्स ने बताई जिसकी सहायता से एक दिये हुये तरंग पृष्ठ से अगला तरंग पृष्ठ ज्ञात किया जा सकता है। जिस प्रकार जल में पत्थर के गिरने से जो वृत्ताकार तरंगे बनती हैं, उनके प्रसारण में, एक वृत्तीय तरंग ही अगली तरंग को जन्म देती है (पत्थर का टुकड़ा तो विक्षोभ उत्पन्न कर डूब जाता है, उसके बाद विक्षोभ अपने आप ही प्रसारित होता है), उसी प्रकार एक दिये हुए प्रकाश तरंग पृष्ठ से ही अगले तरंग पृष्ठ की रचना की जा सकती है। ह्यगन्स के सिद्धान्त का आवेदन हम निम्न प्रकार कर सकते है :

(1) एक दिये हुए तरंग पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु को एक नवीन विक्षोभ का उद्गम माना जा सकता है।

(2) प्रत्येक बिन्दु से प्रारम्भ हुआ नवीन विक्षोभ सभी दिशाओं में प्रकाश की उस माध्यम मे गति के अनुसार प्रसारित होता है। ये द्वितीयक तरंगिकाएँ (Secondary Wavelets) कहलाती हैं।

(3) नवीन तरग पृष्ठ इन तरंगिकाओ के अग्रिम एनवेलप (Forward Envelope) के रूप मे प्राप्त होता है। चित्र 9·6



चित्र—9·6

[ह्यगन्स ने प्रारम्भ मे प्रकाश तरंगो को एक सर्वव्यापी माध्यम 'ईथर' मे अनुदैर्घ्य तरंगों के रूप में माना था जैसा कि ध्वनि तरगें हवा मे होती है। उनके तरंग सिद्धान्त के द्वारा प्रकाश का व्यतिकरण, विवर्तन और परावर्तन, अपवर्तन तथा समक्षणिक परावर्तन और अपवर्तन की व्याख्या सम्भव होती है। परन्तु प्रकाश के ध्रुवरण की व्याख्या नही हो सकती। यह बाद मे प्रकाश को अनुप्रस्थ विद्युत चुम्बकीय तरगें मानने पर ही समझा जा सका।

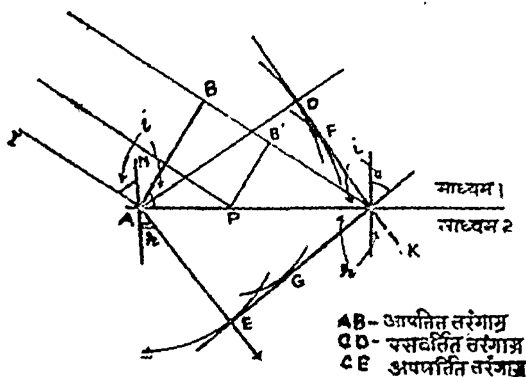
तरंग सिद्धान्त मे प्रारम्भ में दो बड़ी कठिनाइयां सामने आईं; एक तो 'ईथर' नामक सर्वव्यापी माध्यम की कल्पना, दूसरी प्रकाश का सीधी रेखा में गमन। ध्वनि तरगें जिस प्रकार रुकावट आने पर मुड सकती हैं, उसी प्रकार प्रकाश तरंगों में भी मुड़ने का गुण होना स्वाभाविक प्रतीत होता था, परन्तु अपारदर्शक वस्तुओ की छाया बनना इस बात का स्पष्ट प्रमाण था कि प्रकाश किरणें सीधी रेखा से गमन करती हैं। इस कठिनाई का निदान लगभग 1820 में फ्रेज्नल ने किया जब उन्होंने प्रकाश तरंगों के अत्यन्त लघु होने के कारण उनका लगभग सीधी रेखा में गमन करना गणितीय विश्लेषण से सिद्ध किया ईथर माध्यम की अवास्तविकता की कठिनाई विद्युत चुम्बकीय तरंगो की धारणा मे दूर हो जाती है, जो निर्वात मे उत्पन्न हो सकती है।]

9·4. समतल पर परावर्तन और अपवर्तन के नियम

AB एक समतल तरंगाग्र है जो समतल पृष्ठ AC पर आपातित होता है (जो कि कागज के तल के लम्बवत है) AC के ऊपर माध्यम 1 (प्रथम माध्यम) है और नीचे की ओर माध्यम 2 (द्वितीय माध्यम) और AC उनका पृथक्करण पृष्ठ (Surface of sapration) है। तरंगाग्र AB, समतल AC से जो कोंण बनाता है वही आपतन कोंण i है, यही कोंण आगत किरण IA और वहाँ माध्यम के तल पर अभिलम्ब AN के बीच भी है (देखिये चित्र 9·7) आगत तरंगाग्र पृथक्करण पृष्ठ को सबसे पहले A विन्दु पर स्पर्श करता है और यहाँ से द्वितीयक तरंगिका प्रारम्भ होती है जो दोनों माध्यमों में सम्बन्धित प्रकाश की गति से प्रसारित होती है। माना सर्वप्रथम माध्यम में प्रकाश की गति V_1 और द्वितीय में V_2 है। तरंगाग्र AB अपने समानान्तर आगे बढ़ता जाता है जिससे कि पृथक्करण पृष्ठ पर आगे के विन्दु द्वितीयक स्रोत बनते जाते हैं। इस प्रकार PB′ तरंगाग्र की एक स्थिति है जब विन्दु P से द्वितीयक तरंग प्रारम्भ होती है। तरंगाग्र का अन्तिम विन्दु B, दूरी BC तय करके C विन्दु पर पहुँचता है, तब C से द्वितीयक तरंग प्रारम्भ होती है। AB स्थिति से C तक पहुंचने में लगा समय, $t=\frac{BC}{V_1}$ ···(9·1) इस समय में A से प्रारम्भ हुई द्वितीयक तरंग का प्रथम माध्यम में अर्द्धव्यास होगा $R_1=V_1t$

$$\therefore \quad R_1=V_1 \frac{BC}{V_1} \qquad \left(\text{क्योंकि } t=\frac{BC}{V_1}\right)$$

अतः A विन्दु को केन्द्र मानकर (BC) के बराबर अर्धव्यास लेकर चाप



चित्र—9·7

(arc) बनाया। यह A से प्रसारित होने वाले द्वितीयक तरंग का कागज के तल में

उस क्षण पर संपरान है जब विन्दु C से द्वितीयक तरंग प्रारम्भ होने वाली है। C विन्दु से इस चाप पर स्पर्श रेखा CD खीची, यही परावर्तित तरंगाग्र का कागज के तल में संपरान है। सामान्य ज्यामिति के नियमों से यह सिद्ध किया जा सकता है कि अन्य विन्दुओं, जैसे P, से भिन्न भिन्न समय पर प्रारम्भ हुए तरंगाग्र भी CD को स्पर्श करेंगे (P विन्दु से प्रारम्भ हुई द्वितीयक तरंग, अर्धव्यास B'C के बराबर, का चाप भी CD को F विन्दु पर स्पर्श करता है) अतः CD ही उस क्षण पर सभी द्वितीयक तरंगाग्र का एनवेलप है और परावर्तित तरंगाग्र है। कोण ACD परावर्तित कोण है तथा CD के लम्बवत AD और CH परावर्तित किरणें हैं।

परावर्तन के नियम—(*i*) यहाँ हम देखते है कि आपतित किरण IA, अभिलम्ब AN और परावर्तित किरण AD एक ही तल (कागज के तल) में हैं।

(ii) त्रिभुज ABC और ADC मे एक भुजा AC उभयनिष्ठ है, दोनो मे इस भुजा के सामने का कोण बराबर है (प्रत्येक 90°) तथा भुजा BC=AD, अतः दोनों त्रिभुज तुल्य हैं, अतः कोण BAC=ACD. इस प्रकार आपतन कोण=परावर्तन कोण।

अपवर्तित तरंगाग्र की रचना—जिस क्षण तरंगाग्र का सिरा B विन्दु C पर पहुँचता है, उस क्षण A से द्वितीय माध्यम में प्रसारित होने वाली द्वितीयक तरंग का अर्धव्यास होगा, $R_2=V_2t$

'*t*' का मान (9 1) मे से रखने पर,

$$R_2=V_2\frac{BC}{V_1} \qquad (9{\cdot}2)$$

यदि V_2 का मान V_1 से कम हो तब R_2 का मान BC से कम होगा और V_2 का मान अधिक होने पर अधिक होगा। चित्र मे V_2 का मान V_1 का $\frac{3}{4}$ के बराबर लेकर रचना की गई हैं अतः अर्धव्यास $R_2=\frac{3}{4}$ BC लेकर A विन्दु को केन्द्र लेकर चाप बनाया और C विन्दु से उस पर स्पर्श रेखा CE खीची। यहाँ भी हम सिद्ध कर सकते हैं कि अन्य विन्दुओ, जैसे P, से प्रारम्भ होने वाले द्वितीयक तरंग भी इससे स्पर्श करेंगे, चित्र में P से खींचा हुआ चाप CE से G विन्दु पर स्पर्श करता है। अतः CGE तो अपवर्तित तरंगाग्र है और AE तथा CK अपवर्तित किरणें हैं। कोण ACE अपवर्तन कोण *r* है।

अपवर्तन के नियम—(i) आपतित किरण IA, अपवर्तित किरण AE और लम्ब AN एक ही तल मे हैं।

(ii) त्रिभुज ABC और AEC में,

$$\sin i=\frac{BC}{AC} \qquad \text{और } \sin r=\frac{AE}{AC}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin i}{\sin r}=\frac{BC}{AC} \Big/ \frac{AE}{AC}=\frac{BC}{AE}$$

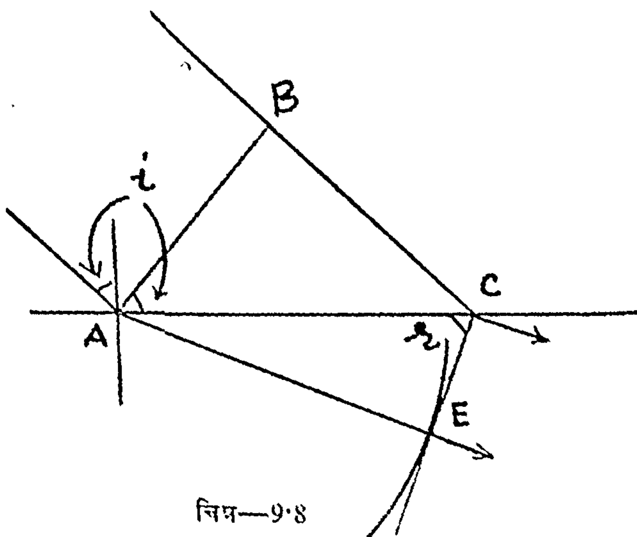
AE=अर्द्धव्यास R_2 ; सूत्र 9·2 में से मान रखने पर,

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{BC}{\frac{BC}{V_1}V_2}=\frac{V_1}{V_2}=\mu_{12} \qquad \cdots(9\cdot3)$$

इस प्रकार आपतन कोंण के 'साइन' और अपवर्तन कोंण के 'साइन' का अनुपात दोनों माध्यमों के लिये नियत होता है और इस नियतांक (μ_{12}) को द्वितीय माध्यम का प्रथम माध्यम की अपेक्षा अपवर्तनांक कहते हैं ।

जैसा कि सूत्र (9·3) में स्पष्ट है, अपवर्तनांक प्रथम माध्यम में प्रकाश के वेग और द्वितीय माध्यम में प्रकाश के वेग के अनुपात के बराबर होता है । हमने जो रचना चित्र 9·7 में की है, इसमें अपवर्तन कोंण r का मान आपतन कोंण i से कम है ; यह विरल माध्यम से सघन माध्यम में अपवर्तन के लिए है । इस प्रकार तरंग सिद्धान्त के अनुसार सघन माध्यम में प्रकाश का वेग V_2 कम हुआ । इस बात का प्रायोगिक सत्यापन फोको (Focault) द्वारा प्रकाश का वेग पानी आदि माध्यमों में निकालने पर हो गया ।

विरल माध्यम में प्रकाश का वेग अधिक होता है, अतः अपवर्तित किरण की रचना में A से प्रारम्भ होने वाली द्वितीयक तरंग का अर्धव्यास $R_2=(BC/V_1\cdot)\,V_2$



चित्र—9·8

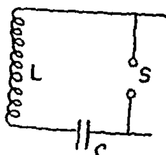
BC से अधिक होगा । V_2 को V_1 का $\frac{4}{3}$ गुना लेकर उपर्युक्त विधि से रचना करने पर चित्र 9·8 के अनुसार CE अपवर्तित तरंगाग्र आया अब अपवर्तन कोंण r का मान

आपतन कोण i से अधिक आता है। अतः यदि i का मान अधिक हो, तब अन्ततः ऐसी स्थिति आ जायगी जब r का मान 90° हो जाय। आपतन कोण के इस मान को क्रान्तिक कोण कहते हैं। और इस स्थिति में अपवर्तित किरण तल AC के अनुदिश हो जाती है। यदि (i) का मान इससे अधिक हो, तो अपवर्तित तरंगाग्र नहीं बनता और प्रकाश पूर्णतः परावर्तित हो जाता है। इसे पूर्ण आन्तरिक परावर्तन कहते हैं।

9·5. प्रकाश तरंगें वस्तुतः विद्युत चुम्बकीय तरंगे हैं !

हयगन्स के तरंग सिद्धान्त में तरंगों के स्वरूप के बारे में कोई निश्चित मत नहीं था, उन्होंने 'ईथर' नामक माध्यम में उसी प्रकार की तरंगों की कल्पना की थी जैसी वायु में ध्वनि तरंगे होती हैं। उन्नीसवीं शताब्दि में जब विद्युत चुम्बकीय तरंगों की खोज हुई तब ही प्रकाश को इन विद्युत चुम्बकीय तरंगों के रूप में पहचाना जा सका।

मैक्सवेल ने सन् 1864 में ही यह सैद्धान्तिक प्रागुक्ति (prediction) कर दिया था कि यदि किसी स्थिति A पर एक दोलनी विद्युतीय परिपथ हो तो वह अपने आस पास के क्षेत्र में आवर्ती विद्युतीय तथा चुम्बकीय क्षेत्र उत्पन्न करेगा (चित्र 9·9) दोलनी परिपथ में एक सधारित्र धारिता C, और एक कुन्डली, प्रेरकत्व L जुडे हुए हैं और परिपथ में एक स्फुलिंग अन्तराल S है जब इसके सिरो पर पर्याप्त उच्च विभव लगाया जाता है, तो स्फुलिंग (Spark) उत्पन्न होता है तथा परिपथ में विद्युत दोलन होने लगते है जिनके फलस्वरूप आस-पास विद्युतीय क्षेत्र और सम्बन्धित चुम्बकीय क्षेत्र प्रसारित होते हैं। इन दोलनों की आवृत्ति होती है :—

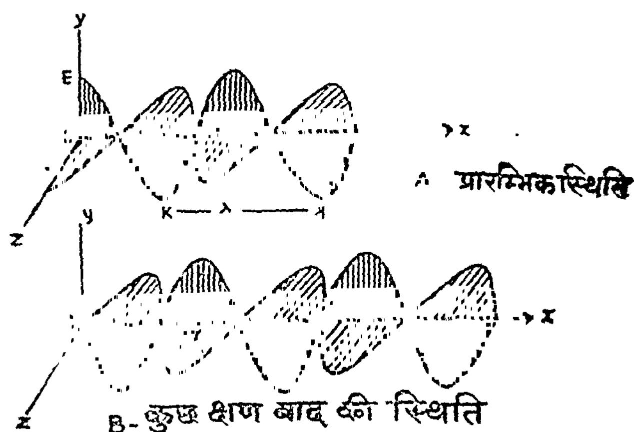


चित्र—9 9

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad \cdots(9·4)$$

चित्र (9·10) में इस प्रकार की विद्युत चुम्बकीय तरंगे प्रदर्शित की गई हैं। तरंग की गति की दिशा x-अक्ष के अनुदिश है, विद्युत क्षेत्र x-y तल में है और और चुम्बकीय क्षेत्र x-z तल में A में एक क्षणिक स्थिति दिखाई गई है जब बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र y की ओर अधिकतम है। B में इसके कुछ क्षण बाद की स्थिति है जब अधिकतम P बिन्दु पर आ गया है और O बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र शून्य हो गया

है इस प्रकार प्रत्येक विन्दु पर विद्युत क्षेत्र तथा चुम्बकीय क्षेत्र निश्चित समय में दोलन करता है जो उसका आवर्त्त काल या दोलन काल (T) है और उसकी आवृत्ति (1/T) ही वि० चु० तरंग की आवृत्ति है।



चित्र—9·10

मैक्सवैल ने यह भी निष्कर्ष निकाला कि ये तरंगें निर्वात में एक निश्चित वेग से गति करती हैं तथा सैद्धान्तिक विधि से उन्होंने इनका वेग निम्न अनुपात के बरावर पाया

$$\text{वेग } C = \frac{\text{धारा की वि० चु० इकाई (e. m. u.)}}{\text{धारा की स्थि० वि० इकाई (e. s. u.)}}$$

यह प्रकाश के निर्वात में वेग के बरावर होता है। इसके कुछ वर्ष पश्चात् हर्टज् (Hertz) ने (सन् 1887 में) वि० चु० तरंगे उत्पन्न कर दिखाई तथा उनमें परावर्त्तन, अपवर्त्तन तथा ध्रुवण आदि का होना प्रदर्शित किया। इन सब समानताओं के आधार पर तथा निर्वात में एक समान ही वेग होने के कारण, प्रकाश को विद्युत चुम्बकीय तरंगे माना गया। जैसा कि चित्र 9·10 में प्रदर्शित है, इनमें विद्युतीय तथा चुम्बकीय क्षेत्र दोनों एक दूसरे के लम्बवत तथा तरंग की गति की दिशा के लम्बवत होते हैं।

वस्तुत: निर्वात में गति करने वाली सभी तरंगे, तथा गामा किरणें, एक्स-किरणें, परा बैंगनी, दृश्य-प्रकाश किरणें, अवरक्त किरणें, रेडियो-तरंगे-विद्युत चुम्बकीय तरंगे मानी गई हैं। इनके अनुप्रस्थ होने के कारण ध्रुवण आसानी से समझा जा सकता है। अतः अब प्रकाश तरंगों को प्रदर्शित करने के लिए सामान्यतः विद्युत क्षेत्र के सरल आवर्त्त कम्पन को प्रयुक्त किया जाता है; किसी विन्दु पर विद्युत क्षेत्र का मान समय के साथ उसी प्रकार परिवर्तित होता है जिस प्रकार सरल आवर्त्त गति में विस्थापन का।

9·6 प्रकाश की क्वाण्टम प्रकृति

प्रकाश को वि० चुम्बकीय तरंगो के रूप मे मानने पर सभी घटनाएँ (Phenomena) समझाई जा सकती हैं, परन्तु प्रकाश के उत्सर्जन और अवशोषण से सम्बन्धित बातें नहीं। प्रकाश-वैद्युत प्रभाव और काम्पटन प्रभाव की तरंग सिद्धात के आधार पर व्याख्या नहीं की जा सकती। प्रकाश-वैद्युत प्रभाव में प्रकाश के किसी सतह पर गिरने पर उसमें से इलेक्ट्रान निकलते है। यह क्रिया समुचित आवृत्ति के प्रकाश द्वारा ही सम्भव होती है तथा एक दी हुई सतह के लिये एक निश्चित आवृत्ति से कम आवृत्ति का प्रकाश यह क्रिया कराने में समर्थ नही होता प्रकाश की आवृत्ति अधिक होने पर उत्सर्जित इलेक्ट्रान की गतिज ऊर्जा भी अधिक होती है। इन तथ्यों से प्रकट होता है कि प्रकाश मे सतत (Continuous) रूप में ऊर्जा न मिलकर 'क्वाण्टम' मे मिलती है और ऊर्जा के क्वाण्टम का मान उसकी आवृत्ति पर निर्भर करता है। प्लांक ने ऊष्मा विकिरण के बारे मे 1900 मे यह धारणा बनाई थी कि एक परमाणविक दोलित्र ऊर्जा का आदान प्रदान ($h\nu$) के क्वाण्टम मे करता है, जबकि h प्लाक का नियतांक ($=6{\cdot}67\times10^{-34}$ जूल-सैकण्ड) और ν विकिरण की आवृत्ति है। आइन्स्टीन ने इसी आधार पर प्रकाश-वैद्युत प्रभाव की व्याख्या की। उनके अनुसार ν आवृत्ति का प्रकाश ($h\nu$) ऊर्जा के 'क्वाण्टम' का वहन करता है। जब यह प्रकाश किसी सतह पर आपतित होता है तब उसमे विद्यमान इलेक्ट्रान को इतनी ही ऊर्जा प्राप्त हो सकती है। अत इस धारणा के अनुसार प्रकाश को ($h\nu$) ऊर्जा युक्त कण के रूप मे माना जाता है जिसको फोटोन (Photon) की संज्ञा दी गई है। इसका संवेग $\frac{h\nu}{C}$ के बराबर होता है।

प्रश्न

(1) हयगन्स के तरग सिद्धात का वर्णन करिये तथा उनके द्वितीयक तरंगिकाओं के सिद्धात का महत्व समझाइये।

(2) निम्न का तात्पर्य समझाइये :
(अ) तरंग पृष्ठ (ब) प्रकाश किरण (स) तरंगाग्र।

(3) तरंग सिद्धात मे प्रारम्भ मे क्या मुख्य कठिनाइयाँ थी ? उनका किस प्रकार निदान हुआ।

(4) विद्युत चुम्बकीय तरंगो से आप क्या समझते है ? प्रकाश तरंगो को वि० चु० तरंगे मानने का क्या आधार है ? इनके अन्य कुछ उदाहरणो का उल्लेख करिये।

(5) 'फोटोन' से आप क्या समझते हैं। विकिरण के क्वाण्टम सिद्धान्त के अनुसार फोटोन की ऊर्जा तथा संवेग क्या होता है

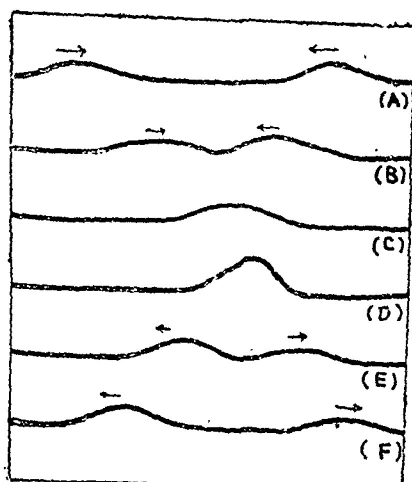
तरंगों का अध्यारोपण

10

(Superposition of Waves)

10 1. अध्यारोपण का सिद्धान्त

तरंगों का एक महत्त्वपूर्ण गुण है कि वे एक दूसरे को प्रवाहित नहीं करती यदि किसी माध्यम में दो तरंगांश विपरीत दिशाओं से आ रहे हैं, तो एक दूसरे को पार कर अपनी पूर्ववत गति से चलते रहेंगे तथा उनमें कोई परिवर्तन नहीं होगा। इसका प्रदर्शन करने के लिए हम एक तनी हुई कोयल स्प्रिंग के दो सिरों पर भिन्न आवृति के तरंग स्पन्द उत्पन्न करते हैं जो विपरीत सिरों की ओर बढ़ते हैं। चित्र 10·1 में इन तरंग स्पन्दों की अलग-अलग स्थिति दिखाई गई है। (C) और (D) स्थिति में दोनों कोयल स्प्रिंग में एक ही स्थल पर है और दोनों से भिन्न आकार का तरंग स्पन्द बना है। इसके पश्चात (E) और (F) में



चित्र—10·1

पुनः मूल तरंग स्पन्द अपनी-अपनी दिशा में गति करते हुए दिखाई पड़ते हैं। चित्र के द्वारा हम देख सकते है कि (C) और (D) स्थिति में तरंग स्पन्द का आकार वह है जो दोनो अलग-अलग तरंग स्पन्दों के अपने-अपने आकार का योग होता है। इसी प्रकार प्रकाश तरंगे (अथवा प्रकाश किरणें) भी माध्यम में स्वतन्त्र रूप से चलती हैं और किसी स्थल पर अन्य तरंगें विद्यमान होने पर भी वहाँ पर उसके बाद वही तरंगे उसी प्रकार चलती हुई दिखाई देती हैं। सभी तरंगों में यह गुण होता है, अतः हम तरगों के बारे मे निम्न सामान्य सिद्धान्त का आवेदन कर सकते हैं—

किसी माध्यम में एक से अधिक तरंगे विद्यमान होने पर किसी बिन्दु पर परिणामित विस्थापन, उन अलग-अलग तरंगों के कारण उस बिन्दु पर विस्थापनों (जो वहाँ पर केवल सम्बन्धित तरंग ही होने पर होते) के बीज गणितीय योग के बराबर होता है।

गणितीय स्वरूप—ध्वनि की तरंगों के कारण माध्यम के कणो मे कम्पन होता है। जैसा कि पूर्व अध्याय मे वर्णन किया जा चुका है, प्रकाश तरंगे विद्युत चुम्बकीय तरंगे हैं तथा उनको विद्युत क्षेत्र की सरल आवर्त्त कम्पन के रूप में व्यक्त किया जाता है। इस अन्तर को ध्यान मे रखते हुए दोनो प्रकार की तरंगो के अन्तर्गत कम्पन को y के द्वारा निम्न प्रकार प्रदर्शित किया जा सकता है—

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi\nu_1 t \qquad \ldots(10\cdot1)$$

इसी प्रकार अन्य तरंग के कारण

$$y_2 = a_2 \sin 2\pi\nu_2 t \qquad \ldots(10\cdot2)$$

अतः दोनों के एक साथ उपस्थिति में अध्यारोपण सिद्धान्त के अनुसार, परिणामित कम्पन होगा :—

$$y = y_1 + y_2 = a_1 \sin 2\pi\nu_1 t + a_2 \sin 2\pi\nu_2 t \qquad (10\cdot3)$$

[यहाँ a_1 और a_2 क्रमशः दोनों के आयाम तथा ν_1 और ν_2 आवृत्तियाँ हैं]

व्यतिकरण—दो अथवा अधिक तरंगो का सम्मिलित प्रभाव अध्यारोपण के सिद्धान्त के अनुसार, दोनो के अलग-अलग प्रभावो से भिन्न होता है। इस घटना को हम व्यतिकरण (Interference) की संज्ञा देते हैं। किसी समय, किसी बिन्दु पर दोनो तरगो के कारण विस्थापन एक ही कला में होने के कारण परिणामित विस्थापन बढ़ जायगा, यह रचनात्मक व्यतिकरण (Constructive Interference) कहलाता है। किसी समय किसी बिन्दु पर दोनो तरगो के कारण विस्थापन विपरीत दिशा मे होने पर परिणमित विस्थापन कम हो जायगा अतः उस समय वहाँ तरंगो का प्रभाव (प्रकाश की तीव्रता, ध्वनि की तीव्रता या अन्य किसी प्रकार की तरंग

का प्रभाव) बहुत कम रह जायगा यह विनाशी व्यतिकरण कहलाता है। किसी विन्दु पर हर समय एक जैसा ही व्यतिकरण प्रभाव स्थिर रहने के लिए वहाँ तरंगो का कलान्तर स्थिर रहना चाहिए।

10·2. दो समान आवृत्ति की ध्वनि तरंगो का व्यतिकरण

सर्वप्रथम हम ऐसी दो ध्वनि तरंगों के व्यतिकरण पर विचार करेंगे जिनकी आवृत्ति तथा वेग बराबर हों तथा जो लगभग एक ही दिशा में गति कर रहीं हों।

गणितीय विश्लेषण—माना कि एक ध्वनि तरंग के कारण किसी विन्दु पर विस्थापन निम्न समीकरण के अनुसार होता है :—

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi\nu_1 t \qquad ...10·4$$

जबकि a_1 आयाम और ν_1 आवृत्ति है।

दूसरी तरंग के कारण उसी विन्दु पर विस्थापन

$$y_2 = a_2 \sin (2\pi\nu_1 t - \phi) \qquad ...(10·5)$$

जबकि a_2 आयाम है तथा ϕ दोनों का कला अन्तर है। अर्थात द्वितीय तरंग के कारण विस्थापन की अपेक्षा 'ϕ' पीछे है। अध्यारोपण सिद्धान्त के अनुसार उस कण का परिणामित विस्थापन होगा :—

$$y = a_1 \sin 2\pi\nu_1 t + a_2 \sin (2\pi\nu_1 t - \phi) \qquad ...(10·6)$$

या $y = a_1 \sin 2\pi\nu_1 t + a_2 \sin 2\pi\nu_1 t \cos\phi - a_2 \cos 2\pi\nu_1 t \sin\phi$

[त्रिकोणमिति (Trigonometry) के सूत्र के अनुसार,

$$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \qquad ...(10·7)$$

अतः $y = \sin 2\pi\nu_1 t(a_1 + a_2 \cos\phi) - \cos 2\pi\nu_1 t\ (a_2 \sin\phi)$

यदि $(a_1 + a_2 \cos\phi)$ को $a \cos\theta$ तथा $a_2 \sin\phi$ को $a \sin\theta$ के रूप में रखा जा सके, तो उपर्युक्त विस्थापन के समीकरण को पुनः (10·7) के समान बनाया जा सकता है।

अतः माना $\quad a_1 + a_2 \cos\phi = a \cos\theta \qquad ...(10·8)$

और $\quad a_2 \sin\phi = a \sin\theta \qquad ...(10·9)$

जबकि a कोई उपयुक्त आयाम और θ कोई उपयुक्त कोण है। इन दोनों प्रतिस्थापनों के अनुसार a और θ का मान निकाला जा सकता है, अतः उपर्युक्त प्रतिस्थापन करना सम्भव है (10·8) तथा (10·9) का वर्ग करने पर

$$a_1^2 + a_2^2 \cos\phi + 2\, a_1 a_2 \cos\phi = a^2 \cos^2\theta$$

$$a_2^2 \sin^2\phi = a^2 \sin^3\theta.$$

जोड़ने पर $\quad a_1^2 + a_3^2 (\cos^2\phi + \sin^2\phi) + 2a_1 a_2 \cos\phi = a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

अतः $a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\phi \qquad ...(10·10)$

[क्योंकि किसी भी कोण α के लिए $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$]

(10·9) में (10·8) का भाग देने पर

$$\frac{a \sin \theta}{a \cos \theta} = \frac{a_2 \sin \phi}{a_1 + a_2 \cos \phi}$$

या $\tan \theta = \dfrac{a_2 \sin \phi}{a_1 + a_2 \cos \phi}$ ...(10·11)

इस प्रकार 'a' और 'θ' का मान a_1, a_2 और ϕ के द्वारा निश्चित हो जाता है।

(10·8) और (10·9) के अनुसार y के समीकरण प्रतिस्थापन करने पर

$y = a \sin 2\pi\nu_1 t \cos \theta - a \cos 2\pi\nu_1 t \sin \theta$

या $y = a \sin (2\pi\nu_1 t - \theta)$ ...(10·12)

इस प्रकार परिणामित विस्थापन का आयाम 'a' सूत्र (10·10) के अनुसार होता है, आवृत्ति वही, ν_1 होती है तथा कला में प्रथम कम्पन से पीछे है जबकि θ का मान (10·11) के अनुसार होगा।

अतः दो एक समान आवृत्ति की तरंगों के व्यतिकरण के फलस्वरूप उसी आवृत्ति की तरंग प्राप्त होगी तथा उसका आयाम दोनों के आयामों और कलांतर पर निर्भर करेगा।

विशेष—यदि कला अन्तर $\phi = 0$ (शून्य) तब सूत्र (10·10) के अनुसार

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos 0$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 = (a_1 + a_2)^2$$

$$\therefore \quad a = (a_1 + a_2)$$

अतः परिणामी तरंग में आयाम दोनों के योग के बराबर होगा

यह रचनात्मक व्यतिकरण है, चित्र (10 2)

यदि कला अन्तर $\phi = 180°$, तब

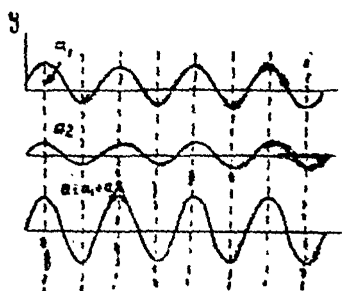
$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos 180 \quad \therefore \quad \cos 180 = -1,$$

$$\therefore \quad a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2$$

$$= (a_1 - a_2)^2$$

$$\therefore \quad a = (a_1 - a_2)$$

अतः परिणामी तरंग में आयाम दोनों के आयामों के अन्तर के बराबर होगा, यह विनाशी व्यतिकरण है, चित्र (10·3)



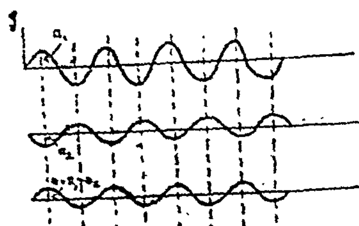
चित्र—10·2

ग्राफ-विधि—माध्यम में दोनों तरंगों का चित्र बनाकर प्रत्येक विन्दु पर उनके अलग अलग विस्थापनों का बीज गणितीय योग ज्ञात कर परिणमित तरंग का चित्र बनाया जा सकता है। चित्र (10·2) दोनों एक ही आवृत्ति व भिन्न आयाम की तरंगों के चित्र प्रदर्शित किये गये हैं तथा परिणमित तरंग का चित्र भी खींचा गया है जब कलांतर शून्य है।

इसी प्रकार दोनों तरंगों में कलांतर 180° होने पर परिणमित तरंग का चित्र 10·3 दिखाया गया है।

10·3. विस्पन्द : लगभग बराबर आवृत्ति की दो तरंगो का व्यतिकरण

जब दो तरंगे लगभग एक ही दिशा में जा रही हों तथा उनकी आवृत्ति में



चित्र—10·3

थोड़ा ही अन्तर हो तब उनका कलांतर समय के साथ बदलेगा अतः परिणमित आयाम भी समय के साथ परिवर्तित होगा। जिस समय कलांतर शून्य (या $2n\pi$) होगा, आयाम बढ़ जायगा और ध्वनि की तीव्रता अधिकतम होगी; जिस समय कलांतर 180° या $(2n-1)\pi$ होगा, आयाम और तीव्रता न्यूनतम हो जावेंगे। इस प्रकार ध्वनि की तीव्रता एकान्तर से (alternately) एक निश्चित अंतराल से अधिकतम और न्यूनतम होगी। यह विस्पन्द कहलाते हैं। एक अधिकतम और एक न्यूनतम तीव्रता को मिलाकर एक विस्पन्द कहते हैं, अतः दो अधिकतम तीव्रता के बीच का अन्तराल एक विस्पन्द का काल (Period) कहलाता है जिसे माना t_b से व्यक्त किया। उदाहरण—माना दो स्वरित्र एक साथ बजाये जाते हैं; एक की आवृत्ति ν_1 और दूसरे की ν_2 है जब कि $\nu_1-\nu_2=\nu_b$ एक छोटा अंक है। प्रारम्भ में अर्थात् $t=0$ पर दोनों एक ही कला में हैं अतः ध्वनि की तीव्रता अधिकतम है। प्रथम की आवृत्ति ν_1 अधिक है, अतः वह दूसरे की अपेक्षा शीघ्र कम्पन करता है और दूसरे स्वरित्र से आगे हो जाता है। जब प्रथम दूसरे से $\frac{1}{2}$ कम्पन आगे हो जाता है तब वे विपरीत कला में हो जाते हैं (कलान्तर π) और ध्वनि का आयाम व तीव्रता न्यूनतम

जाती है। इसमें दूसरे स्वरित्र में प्रथम स्वरित्र से एक कम्पन कम हो जाता है, अ-
ध्वनि की तीव्रता पुनः अधिकतम हो जाती है, अतः यह दो अधिकतम के बीच का
समय t_b हुआ। इस समय में प्रथम स्वरित्र द्वारा किये गये कम्पन

$$N_1 = \nu_1 t_b$$

दूसरे स्वरित्र द्वारा किये गये कम्पन,

$$N_2 = \nu_2 t_b$$

जैसा कि वर्णन किया गया है, दोनों का अन्तर एक है, अर्थात्

$$N_1 - N_2 = 1$$

अतः $\nu_1 t_b - \nu_2 t_b = 1$

$\therefore$ $(\nu_1 - \nu_2)\, t_b = 1$

$$\therefore \quad \boxed{t_b = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2}} \qquad \ldots(10{\cdot}13)$$

यह एक विस्पन्द का समय है। अतः

एक सैकण्ड में विस्पन्दो की सख्या होगी .—

$$\frac{1}{t_b} = \nu_1 - \nu_2$$

एक सैकण्ड में विस्पन्दों की संख्या को विस्पन्द की आवृत्ति कहते हैं (frequency of beats)

अतः विस्पन्द की आवृत्ति $= \nu_1 - \nu_2 = \nu_b$ $\qquad \ldots(10{\cdot}14)$

अतः विस्पन्द की आवृत्ति ν_b दोनों स्रोतों की आवृत्ति के अन्तर के बराबर होती है।

गणितीय विवेचन —

एक स्वरित्र के कारण कम्पन,

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi \nu_1 t \qquad \ldots(10{\cdot}15)$$

दूसरे स्वरित्र के कारण कम्पन

$$y_2 = a_2 \sin 2\pi \nu_2 t \qquad \ldots(10{\cdot}16)$$

[दोनों एक साथ कम्पन प्रारम्भ करते है, अतः कलांतर नहीं है, यदि प्रारम्भ में कलान्तर होता तो, वह समय के साथ बढ़ता जाता है, अतः समीकरणों में कलान्तर लेने की कोई आवश्यकता नहीं है]

अतः परिणामी कम्पन के लिए,

$$y = y_1 + y_2 = a_1 \sin 2\pi \nu_1 t + a_2 \sin 2\pi \nu_2 t \qquad \ldots(10{\cdot}17)$$

$\because \quad \nu_1 - \nu_2 = \nu_b, \quad \therefore \quad \nu_1 = \nu_2 + \nu_b$

(10·17) में प्रतिस्थापन करने पर

$$y = a_1 \sin 2\pi (\nu_2 + \nu_b)t + a_2 \sin 2\pi \nu_2 t$$
$$= a_1 \sin (2\pi \nu_2 t + 2\pi \nu_b t) + a_2 \sin 2\pi \nu_2 t$$
$$= a_1 \sin 2\pi \nu_2 t \cos 2\pi \nu_b t + a_1 \cos 2\pi \nu_2 t \sin 2\pi \nu_b t + a_2 \sin 2\pi \nu_2 t$$

या $y = \sin 2\pi \nu_2 t (a_1 \cos 2\pi \nu_b t + a_2) + \cos 2\pi \nu_2 t (a_1 \sin 2\pi \nu_b t)$ ...(10·18)

अब माना a_1 coc $2\pi \nu_b t + a_2 = a \cos \theta$

और $a_1 \sin 2\pi \nu_b t = a \sin \theta$

दोनों का वर्ग करके जोड़ने पर

$$a^2 (\cos^2\theta + \sin^2 \theta) = a_1^2 (\cos^2 2\pi \nu_b t + \sin^2 2\pi \nu_b t) + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos 2\pi \nu_b t$$

अर्थात् $\boxed{a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos 2\pi\nu_b t}$ ...(10·19)

भाग देने पर $\tan \theta = \dfrac{a_1 \sin 2\pi \nu_b t}{a_1 \sin 2\pi \nu_b t + a_2}$ ...(10·20)

समीकरण (10·18) में प्रतिस्थापन करने पर

$$y = \sin 2\pi\nu_2 t \, a \cos \theta + \cos 2\pi \nu_2 t \, a \sin \theta$$
$$= a (\sin 2\pi \nu_2 t \cos \theta + \cos 2\pi \nu_2 t \sin \theta)$$

या $\boxed{y = a \sin (2\pi \nu_2 t + \theta)}$ ...(10·21)

इस प्रकार परिणमित कम्पन की भी आवृत्ति ν_2 है, परन्तु आयाम 'a' का समय के साथ परिवर्तन होता है, सूत्र 10·19. अतः ध्वनि की तीव्रता भी समय के साथ बढ़ती है। सूत्र 10·19 के अनुसार समय $t=0$ पर

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1a_2 \cos 2\pi\nu_b (0)$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1a_2 \cos 0 \; ; \; (\cos 0 = 1)$$
$$\therefore \quad a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1a_2 = (a_1 + a_2)^2$$

$\therefore \quad a=(a_1+a_2)$; अधिकतम

समय $t=\frac{1}{\nu_b}$ पर

$$a^2=a_1^2+a_2^2+2\,a_1a_2\,\cos\,2\pi\nu_b\frac{1}{\nu_b}$$

$$=a_1^2+a_2^2+2\,a_1a_2\cos 2\pi\ ;\ (\cos 2\pi=1)$$

$$\therefore \quad a^2=a_1^2+a_2^2+2\,a_1a_2=(a_1+a_2)^2$$

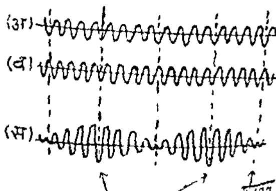
$\therefore \quad a=(a_1+a_2)$, अधिकतम

इस प्रकार समय अंतराल $\frac{1}{\nu_b}$ मे एक विस्पन्द हुआ

अतः एक सैकण्ड में विस्पन्दों की संख्या $=\boxed{\nu_b=\nu_1-\nu_2}$ –(10·22)

हम दो स्वरित्रो को एक साथ ध्वनित कर, उनसे उत्पन्न होने वाले विस्पन्दो की सख्या गिन सकते हैं जो कि उनकी आवृत्तियों के अन्तर के बराबर होगी। अतः यदि एक स्वरित्र की आवृत्ति ज्ञात हो, तो दूसरे की आवृत्ति ज्ञात हो सकती है।

ग्राफ विधि—चित्र (10 4) मे दो कम्पन प्रदर्शित किये गये हैं जिनकी आवृत्ति में थोड़ा ही अन्तर है साथ ही दोनों का परिणमित कम्पन का चित्र भी है। इसमें हम देखते हैं कि कम्पन का आयाम भी आवर्ती रूप मे (Periodically) परिवर्तित हो रहा है। इसके परिवर्तन का आवर्तकाल t_b है जो सूत्र 10·13 मे



कम्पनों की आवृत्ति के अन्तर के बराबर है। जैसा कि समीकरण (10·21) तथा उपर्युक्त चित्र से प्रकट है, कम्पनों की आवृत्ति ही है जो मूल कम्पनों की थी।

10·4 तरंग समीकरण

समीकरण (10·1) के अनुसार तरंग के कारण सरल आवर्त्त कम्पन का समीकरण होगा :

$$y = a \sin 2\pi\nu t$$

यदि प्रारम्भ में अर्थात t=0 पर 'y' शून्य न हो तब समीकरण निम्न प्रकार होगा :

$$y = a \sin (2\pi\nu t + \theta) \qquad \cdots(10{\cdot}23)$$

ध्वनि तरंगों में y माध्यम के कणों के विस्थापन को व्यक्त करता है तथा प्रकाश तरंगों में y सामान्यतः विद्युतीय क्षेत्र के मान को व्यक्त करता है। **'a' कम्पन का आयाम कहलाता है, जो कि (y) का अधिकतम मान है।**

परिवर्त्तनीय राशि (y) का मान की एक निश्चित काल में पुनरावृत्ति होती है, यह आवर्त्तकाल (T) कहलाता है। समीकरण (10·23) से प्रकट है कि यह समय अन्तराल, $1/\nu$ के बराबर होगा, क्योंकि इस समय में कोण का मान (2π) के बराबर बदल जाता है (अतः sin फलन का पुनः वही मान आ जाता है)

$$\text{अतः} \qquad T = \frac{1}{\nu} \text{ या } \nu = \frac{1}{T} \qquad \ldots(10{\cdot}24)$$

स्पष्टतः ही किसी भी समय (y) का मान ($2\pi\nu t + \theta$) पर निर्भर करेगा ; **इस राशि को उस समय की कला (Phase) कहा जाता है।** प्रारम्भ में t=0 समय पर इस राशि का मान प्रारम्भिक कला (Initial Phase) कहलाता है।

जब किसी विन्दु पर कोई भी विक्षोभ उत्पन्न होता है तब उसके कारण अन्य विन्दुओं पर भी विक्षोभ उत्पन्न होता है वस्तुतः स्रोत पर प्रारम्भ हुआ विक्षोभ एक निश्चित गति से प्रसारित होता है। **यह विक्षोभ ही तरंग कहलाता है तथा इकाई समय में विक्षोभ जितना दूर पहुँचता है, वह उस तरंग का वेग कहलाता है।**

प्रगामी तरंग का समीकरण—

विक्षोभ के उद्गम विन्दु पर सरल आवर्त्त कम्पन तो समीकरण (10·23) के अनुसार होते हैं। तथापि किसी भी प्रकार के आवर्ती कम्पन हों तो उनको हम समय के किसी फलन (Function of time) के रूप में लिख सकते हैं :—

$$y_0 = f(t) \qquad \cdots(10{\cdot}25)$$

यदि उद्गम विन्दु O से तरंग के गति की दिशा में x दूरी पर कोई विन्दु P हो (चित्र 10·5 अ) तथा तरंग का वेग v हो, तो P तक विक्षोभ के पहुंचने में

समय $=\frac{x}{v}$ लगेगा। अतः P बिन्दु पर 't' समय पर वही विक्षोभ होगा जो समय $\left(t-\frac{x}{v}\right)$ पर उद्गम बिन्दु O पर था। अतः P पर विस्थापन का समीकरण निम्न होगा—

$$y_x=f\left(t-\frac{x}{v}\right) \qquad (10{\cdot}26)$$

यह x दिशा में बढ़ती हुई प्रगामी तरंग का समीकरण है। जब उद्गम बिन्दु O पर सरल आवर्त कम्पन हो तब

$$y_0=a \sin 2\pi\nu t$$

अतः
$$y_x=a \sin 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{v}\right) \qquad (10{\cdot}27)$$

[सरल आवर्त कम्पन, कोसाइन (Cosine) फलन के द्वारा भी व्यक्त किया जा सकता है;

$$\left.\begin{array}{l} y_0=a \cos 2\pi\nu t \\ y_x=a \cos 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{v}\right) \end{array}\right\} \qquad \cdots(10{\cdot}28)$$

इसमें केवल यही अन्तर है कि प्रारम्भ में अर्थात $(t=0)$ पर y का मान अधिकतम होगा जैसा कि चित्र 10·5 ब में O' बिन्दु पर है]

अतः किसी भी बिन्दु x पर विक्षोभ y का मान समीकरण (10·27) के अनुसार होगा अतः हम सामान्य तरंग समीकरण निम्न प्रकार लिख सकते है—

$$y=a \sin 2\pi\nu\,(t-x/v) \qquad \cdots(10{\cdot}29)$$

जो कि किसी बिन्दु 'x' पर विक्षोभ को व्यक्त करता है। तरंगदैर्घ्य (λ) तरंग द्वारा एक आवर्तकाल T में तय की गई दूरी तरंग दैर्घ्य (Wave length) ...ाती है, जिसको 'λ' से व्यक्त किया जाता है; $\lambda=vT$

स्पष्ट ही आवर्त काल $T=1/\nu$

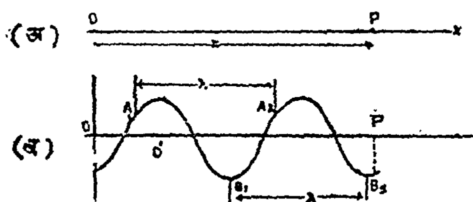
अतः $\lambda=v\,(1/\nu)$

या
$$\boxed{\nu.\ \lambda=v} \qquad \cdots(10{\cdot}30)$$

स्पष्ट ही एक आवर्तकाल में तरंग जहाँ पहुँचती है, वहाँ वही विक्षोभ होगा प्रारम्भ में उद्गम बिन्दु पर था (क्योंकि एक आवर्तकाल में 'y' की पुनरावृत्ति ...ती है), अतः दोनों बिन्दु एक ही कला में होंगे। अतः तरंगदैर्घ्य दो ऐसे निकटतम ...न्दुओं की दूरी भी है, जो एक ही कला में हों।

चित्र 10·5 ब में विक्षोभ की एक क्षणिक स्थिति प्रदर्शित की गई है। ...मान कला के निकटतम बिन्दु A_1A_2 अथवा B_1B_2 की दूरी तरंगदैर्घ्य 'λ'

भी प्रदर्शित की गई है। इस प्रकार के कोई से भी दो विन्दुओं की दूरी तरंग दैर्घ्य के बराबर है।



चित्र—10·5

समीकरण (10·28) में ν कोष्टक में लेने पर

$$y = a \sin 2\pi\ (\nu t - x\nu/v)$$

या $$y = a \sin 2\pi\ (\nu t - x/\lambda)$$

या $$y = a \sin 2\pi\ (t/T - x/\lambda) \quad \ldots(10\cdot31)$$

जो कि तरंग समीकरण के ही अन्य रूप हैं

[तरंग समीकरण के और भी अन्य रूप :—

$$y = a \sin 2\pi\nu/v\ (vt - x)$$

या $$y = a \sin 2\pi/\lambda\ (vt - x) \quad \ldots(10\cdot32)$$

या $$y = a \sin 2\pi/T\ (t - x/v) \quad \ldots(10\cdot33)$$

या $$y = a \sin \omega\ (t - x/v) \quad \ldots(10\cdot34)$$

जब कि $\omega = 2\pi\nu$, कोणीय आवृत्ति कहलाती है]

विशेष—(Double periodicity in waves) जैसा कि हम चित्र 10·5 ब में देखते हैं किसी एक क्षण माध्यम में 'y' का मान तरंग दैर्घ्य की दूरी पर स्थित विन्दुओं पर उतना ही होता है (Repeats itself)। इसी प्रकार किसी एक विन्दु पर 'y' का मान 'T' समय आवर्त्तन करता है।

10·5. विपरीत दिशाओं से आती हुई दो सर्वथा एक समान तरंगों का व्यतिकरण अप्रगामी तरंगे

यदि दो सर्वथा एक समान (a, ν और λ विल्कुल वरावर) तरंगे विपरीत दिशा में गति करती हुई माध्यम के किसी भाग में मिलती है तो उनके व्यतिकरण के फल स्वरूप एक अलग ही प्रकार की तरंग उत्पन्न होती है जिसमें कि विक्षोभ आगे बढ़ता हुआ प्रतीत नहीं होता, वरन् माध्यम के भिन्न भिन्न विन्दुओं पर भिन्न भिन्न आयाम के कम्पन होते रहते हैं।

गणितीय विश्लेषण—x की दिशा में एक प्रगामी तरंग का समीकरण (10·31) के अनुसार

$$y_1 = a \sin 2\pi\ (\nu t - x/\lambda)$$

इससे विपरीत दिशा में गति करती हुई तरंग का समीकरण

$$y_2 = a \sin 2\pi\ (\nu t + x/\lambda)$$

अतः अध्यारोपण के सिद्धान्त के अनुसार परिणामित तरंग के लिये

$$y = y_1 + y_2$$

अतः $y = a \sin 2\pi\ (\nu t - x/\lambda) + a \sin 2\pi\ (\nu t + x/\lambda)$

या $y = a \sin\ (2\pi\nu t - 2\pi x/\lambda) + a \sin\ (2\pi\nu t + 2\pi x/\lambda)$

त्रिकोणमिति के सूत्र 10·7 के अनुसार खोलने पर

$$y = a \sin 2\pi\nu t \cos 2\pi x/\lambda - a \cos 2\pi\nu t \sin 2\pi x/\lambda$$
$$+ a \sin 2\pi\nu t \cos 2\pi x/\lambda + a \cos 2\pi\nu t \sin 2\pi x/\lambda$$

$\therefore$ $y = 2\ a \sin 2\pi\nu t \cos 2\pi x/\lambda$

या $\boxed{y = 2\ a \cos 2\pi x/\lambda \sin 2\pi\nu t}$ ···(10·35)

इसमे समय के साथ आवर्त्तन प्रदर्शित करने वाले पद ($\sin 2\pi\nu t$ (जिसमे आवृत्ति वही, ν, है) के अतिरिक्त आयाम के स्थान पर ($2a \cos 2\pi x/\lambda$) है। स्पष्ट ही यह बिन्दु की स्थिति अर्थात् 'x' पर निर्भर करता है तथा शून्य से अधिकतम मान ($2a$) तक परिवर्तित होता है।

(a) जब $x = 0$, तब आयाम $= 2a$

(b) जब $x = \lambda/4$, तब आयाम $= 2a \cos\ .\pi/\lambda.\lambda/4 = 0$

(c) जब $x = \lambda/2$, तब आयाम $= 2a \cos 2\pi/\lambda.\lambda/2 = -2a$

(d) जब $x = 3\lambda/4$, तब आयाम $= 2a \cos 2\pi/\lambda.3\lambda/4 = 0$

(e) जब $x = \lambda$, तब आयाम $= 2a \cos 2\pi/\lambda.\lambda = 2a$

इनके बीच अन्य बिन्दुओं पर आयाम का मान भिन्न-भिन्न होगा इस प्रकार परिणमित तरंग में कुछ बिन्दुओं जैसे a, c, e, आदि पर आयाम अधिकतम है, इन्हें प्रस्पन्द (Antinodes) कहते हैं कुछ अन्य बिन्दुओं जैसे b d, आदि पर आयाम शून्य है, अतः यहाँ सदैव विस्थापन शून्य ही होगा, इन्हें निस्पन्द (nodes) कहते हैं।

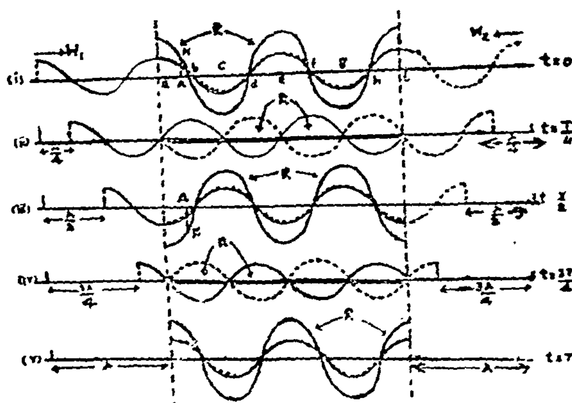
प्रस्पन्दों की आपस मे दूरी ac या ce $= \lambda/2$

निस्पन्दों की आपस मे दूरी bd $= \lambda/2$

इस प्रकार यह तरंग, एक प्रगामी तरंग जिसमे कम्पन की कोई भी अवस्था (State of Vibration) आगे बढ़ती है, से सर्वथा भिन्न है तथा इसमे कम्पन स्थानीकृत (Localized) प्रतीत होते है। इन तरगों को अप्रगामी तरंग कहते हैं।

यदि आवर्तकाल T कम हो अथवा आवृत्ति ν अधिक हो, तो दृष्टि-निबंन्ध (*Persistence of vision*) के कारण एक अनुप्रस्थ अप्रगामी तरंग चित्र (10·7) के अनुसार प्रतीत होगी।

ग्राफ-विधि—हम उपर्युक्त अप्रगामी तरंग दो विपरीत दिशा में गतिशील प्रगामी तरंगों के ग्राफीय-अध्यारोपण से भी प्राप्त कर सकते हैं। चित्र 10·6 में एक तरंग W_1 दायीं ओर गति करती हुई दिखाई गई है और एक सर्वथा एक समान तरंग W_2 वायीं ओर गति करती हुई दिखाई गई है। माध्यम के अंश a i में इनका भिन्न-भिन्न समय पर अध्यारोपण प्रदर्शित किया गया है। प्रारम्भ में (t=0) पर W_1 की क्षणिक स्थिति रेखीय वक्र द्वारा तथा W_2 की क्षणिक स्थिति बिन्दु-रेखा (dotted-line) वक्र द्वारा प्रदर्शित की गई है। इस स्थिति में दोनों के कारण विस्थापनों का बीज गणितीय योग करने पर जो परिणामित वक्र प्राप्त होता है, वह मोटी रेखा द्वारा प्रदर्शित किया गया है व 'R' से चिन्हित किया गया है। चित्र 10·6 की (ii) स्थिति (t=T/4) की क्षणिक स्थिति को प्रदर्शित करती है जब तरंग W_2 इतनी ही दूरी से वायीं ओर बढ़ गई है। (iii) चित्र में (t=T/2) की स्थिति प्रदर्शित की गई है और परिणामित विस्थापन को प्रत्येक चित्र में 'R' से



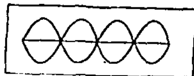
चित्र—10·6

चिन्हित किया गया है। इसी प्रकार (iv) और (v) में क्रमश: (t=3T/4) और (t=T) की स्थिति प्रदर्शित की गई है। इस प्रकार पूरे एक आवर्त्तकाल में माध्यम में किस प्रकार कणों का कम्पन होता है, यह चित्र (10.6) द्वारा स्पष्ट करने का प्रयास किया गया है। इसके बाद यही क्रम प्रत्येक आवर्त्तकाल में चलता रहेगा।

हम देखते हैं कि दोनों तरंगों के सम्मिलित प्रभाव के फलस्वरूप माध्यम के कुछ विन्दुओं, a, c, e, g, i द्विगुणित (अर्थात् अधिकतम) आयाम का कम्पन करते हैं जब कि कुछ अन्य बिन्दुओं, b, d, f, h का आयाम शून्य है। अधिकतम आयाम वाले विन्दुओं को 'प्रस्पन्द' (Antinodes) कहते हैं और जैसा कि चित्र से स्पष्ट है, इनकी आपसी दूरी λ/2 के बराबर होती है। शून्य आयाम वाले बिन्दु 'निस्पन्द' (Nodes) कहलाते हैं; इनकी भी आपसी दूरी λ/2 के बराबर होती है। इनके बीच अन्य विन्दु अलग-अलग निश्चित आयामों के कम्पन करते हैं, जैसे A विन्दु का आयाम AN है।

सामान्य प्रगामी तरंगो में माध्यम के प्रत्येक कण के कम्पन का आयाम बराबर होता है, परन्तु किसी एक क्षण विस्थापन भिन्न-भिन्न होते हैं अर्थात् कण भिन्न-भिन्न 'कला' में होते हैं। परन्तुउपर्युक्त तरंग में दो निस्पन्दों के बीच के कण सब समान कला में हैं, तथा विस्थापन का आयाम अलग-अलग निश्चित हो जाने के कारण तरंग स्थिर (Localized) प्रतीत होती है। यद्यपि भिन्न-भिन्न समय पर विस्थापन चित्र (10·6) के अनुसार होता है तथापि यदि 'T' कम हो तो दृष्टि-निर्बन्ध (Persistance of vision) के कारण अनुप्रस्थ तरंग मे कम्पन चित्र (10·7) के समान दिखाई देगें और इस प्रकार तरग स्थिर प्रतीत होगी। अतः इन्हें "अप्रगामी तरंग" कहा गया है।

उपर्युक्त वर्णन मे तरग W_1 और W_2 अनुप्रस्थ तरगे ली गई हैं; तथापि अनुदैर्ध्य तरंगों में भी इसी प्रकार अप्रगामी तरंगे बनेगी। अनुनाद नली मे इस प्रकार की अनुदैर्ध्य अप्रगामी तरंगे बनती हैं, सोनोमीटर मे अनुप्रस्थ अप्रगामी तरंग बनती है।



चित्र—10·7

प्रगामी तथा अप्रगामी तरगो की तुलना

प्रगामी तरग	अप्रगामी तरंग
(1) प्रगामी तरग मे माध्यम की कोई भी स्थिति आगे बढ़ती है। जैसे अनुप्रस्थ तरग में शृग (Crest) आगे बढ़ता है, अनुदैर्ध्य तरंग मे विरलन (rarefaction)।	माध्यम की कोई भी स्थिति स्थिर प्रतीत होती है। कई बिन्दुओं पर स्थायी रूप से शृग बना हुआ रहता है अथवा कहीं स्थायी रूप से विरलन या सघनन।
(2) माध्यम के कण भिन्न-भिन्न कला मे होते हैं। एक तरग दैर्घ्य की दूरी के बाद कम्पन की कला की पुनरावृत्ति होती है।	दो निस्पन्दो के बीच के सब कण एक समान कला में होते हैं। अर्थात् सब एक साथ अधिकतम विस्थापन की स्थिति प्राप्त करते हैं और इसी प्रकार एक साथ माध्य-स्थिति मे आते हैं। उनके आगे के दो निस्पन्दो के बीच के कण इनसे विपरीत कला मे होते हैं।
(3) सब कण एक समान आयाम से कम्पन करते हैं।	भिन्न-भिन्न कणों का आयाम भिन्न होता है। कुछ अधिकतम आयाम से कम्पन करते हैं (प्रस्पन्द) और कुछ शून्य आयाम से (निस्पन्द)।

(4) माध्यम के सब विन्दुओं 'पर' घनत्व और दाब के एक जैसे परिवर्तन होते हैं।

प्रस्पन्दों पर घनत्व और दाब के परिवर्तन नगण्य होते हैं जब कि निस्पन्दों पर अधिकतम होते हैं।

10·6 परस्पर लम्बवत कम्पनों का योग : लिसाजु आकृतियाँ

माना कि एक ही कण दो परस्पर लम्बवत कम्पनों के सम्मिलित प्रभाव में है, तब परिणमित गति क्या होगी ? गणितीय विश्लेषण हेतु हम एक कम्पन x—अक्ष के अनुदिश और दूसरा y—अक्ष के अनुदिश ले सकते हैं।

गणितीय विश्लेषण :—(अ) प्रथम स्थिति जब दोनों की आवृत्ति समान हों

x—अक्ष के अनुदिश कम्पन का समीकरण

$$x = b \sin \omega t \qquad \ldots(10{\cdot}36)$$

y– अक्ष क अनुदिश कम्पन का समीकरण

$$y = a \sin (\omega t - \phi) \qquad \ldots(10{\cdot}37)$$

जब कि 'ϕ' उनमें कलान्तर है। समीकरण (10·37) से

$$y/a = \sin\omega t \cos\phi - \cos = \omega t \sin\phi$$

समीकरण (10·36) से, $\sin\omega t = x/b$

$$\therefore \quad y/a = (x/a)\cos\phi - \sqrt{1 - x^2 b^2}\sin\phi$$

या $$(y/a - x/b \cos\phi) = -\sqrt{1 - x^2 b^2}\sin\phi$$

वर्ग करने पर

$$y^2/a^2 - (2xy/ab)\cos\phi + (x^2/b^2)\cos^2\phi = (1 - x^2/b^2)\sin^2\phi$$

या $$y^2/a^2 - (2xy/ab)\cos\phi + x^2/b^2 = \sin^2\phi \qquad \ldots(10{\cdot}38)$$

यह समीकरण परिणमित गति को व्यक्त करता है तथा यह सामन्यत: दीर्घवृत्त (ellipes) का समीकरण है। परन्तु 'ϕ' के भिन्न भिन्न मान के अनुसार वक्र भिन्न भिन्न होगा।

(1) जब $\phi = 0$ (शून्य) हो,

तब समीकरण (10·38) निम्न रूप ले लेगा

$$y^2/a^2 - 2xy/ab + x^2/b^2 = 0$$

या $$(y/a - x/b)^2 = 0 \qquad \ldots(10{\cdot}39)$$

यह दो संपाती (Coinsident) रेखाओं अथवा एक ही रेखा को व्यक्त करता है। अत: परिणमित्त गति x-अक्ष से एक निश्चित कोण बनाती हुई रेखा के अनुदिश होती है जिसका झुकाव (slope) a/b के बराबर होता है।

(2) जब $\phi = \pi/4$ या $45°$

तब समीकरण निम्न रूप लेगा

$$y^2/a^2 - 2xy/ab \cos 45 + x^2/b^2 = \sin^2 45$$

या $$y^2/a^2-2xy/ab\times 1/2+x^2/b^2=1/2 \qquad \cdots(10\cdot 40)$$

यह x-अक्ष से झुके हुए दीर्घवृत्त को प्रदर्शित करता है।

(3) जब $\phi=\pi/2$ या 90, $\cos 90=0$ और $\sin 90=1$ रखने पर

$$y^2/a^2+x^2/b^2=1 \qquad (10\cdot 41)$$

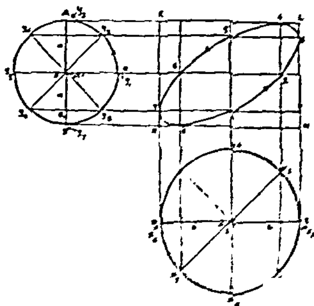
यह भी एक दीर्घवृत्त है जिसकी अक्ष (axes) x और y अक्ष के अनुदिश हैं। यदि इसके साथ ही आयाम भी बराबर हों, a=b, तब समीकरण होगा—

$$y^2+x^2=a^2$$

अतः तब परिणमित गति वृत्तीय होगी

इसी प्रकार कलान्तर ϕ के भिन्न-भिन्न मान के अनुसार भिन्न-भिन्न आकृतियाँ बनेगी। ये लिसाजु-आकृतियाँ कहलाती हैं तथा चित्र (10·9) में दिखाई गई हैं।

ग्राफ विधि—इसमें सरल आवर्त्त कम्पन में भिन्न-भिन्न समय पर विस्थापन का चित्र बनाने के लिए दिये हुए आयाम 'a' और 'b' अर्द्धव्यास के वृत्त बना लेते हैं। 'a' अर्द्धव्यास के वृत्त के y-अक्ष के अनुदिश व्यास पर प्रक्षेप स० आ० ग० (10·37) को व्यक्त करेगा। इसी प्रकार 'b' अर्द्धव्यास के वृत्त के x-अक्ष के अनुदिश व्यास पर प्रक्षेप स० आ० ग० (10·36) को व्यक्त करेगा। स्पष्ट ही प्रथम गति की सीमायें 'A' और 'B' बिन्दुओं पर हैं और द्वितीय गति की सीमायें 'C' और 'D' बिन्दुओं पर हैं। चित्र (10·8) के अनुसार इन सीमाओं को आगे बढ़ाकर

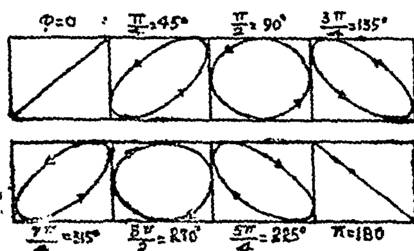


चित्र—10·8

सम्मिलित सीमा के रूप में आयत KLMN प्राप्त होता है। प्रस्तुत चित्र में वृत्तीय गति वामावर्त्त ली गई है, तब स्पष्ट ही बिन्दुओं की प्रारम्भिक स्थिति 'E' और x_0 पर होगी, जब कलान्तर न हो।

[सबसे पहले शून्य कलान्तर के लिए प्रारम्भिक स्थिति निर्धारित करनी चाहिये। वृत्तीय गति दक्षिणावर्त्त भी ली जा सकती है, जब प्रारम्भिक स्थितियाँ क्रमश: y_5 और x_4 पर होंगी]।

शून्य कलान्तर की प्रारम्भिक स्थिति निर्धारित करने के बाद जिस गति में कलान्तर दिया गया हो, उसमें वृत्तीय गति करने वाले बिन्दु की स्थिति उतने ही कोण से बदल देनी चाहिए। उदाहरण के लिए चित्र (10·8) में y-अक्ष के अनुदिश गति -xअक्ष के अनुदिश गति से 45° पीछे हैं अतः प्रारम्भिक बिन्दु y_0 पर लिया गया है। अत: प्रारम्भ में y-विस्थापन OB_1 के बराबर हुआ इसको y_4 B_1 y_0 रेखा बढ़ाकर प्रदर्शित किया गया है। प्रारम्भ में x-विस्थापन शून्य है जो x_0 O_2 x_4 रेखा बढ़ाकर प्रदर्शित किया अत: इनका काट-बिन्दु । आया। इसके 1/8 समय के पश्चात वृत्तीय गति करने वाले बिन्दुओं की स्थिति 45° आगे सरक कर क्रमश: y_1 और x_1 पर पहुँची और दोनों के परिणमित विस्थापन के लिये काट-बिन्दु 2 आया। इसी प्रकार 1/8 के अन्तराल पर परिणमित विस्थापन के बिन्दु 3, 4, 5 आदि प्राप्त होते जायेंगे। इस प्रकार चित्र से स्पष्ट है कि y-गति 45° पीछे होने पर परिणमित गति झुके हुए दीर्घवृत्त के रूप में प्राप्त होती है। यही परिणाम गणितीय विश्लेषण से प्राप्त हुआ था, समीकरण (10·38)। इसी प्रकार दिया हुआ कलान्तर प्रविष्ट करके परिणमित गति का वक्र प्राप्त किया जा सकता है। ये आकृतियाँ (चित्र (10·9) अनुसार होंगी।



चित्र—10·9

गणितीय विश्लेषण—(ब) जब y-गति की आवृत्ति x-गति की आवृत्ति से दुगनी हो।

माना कि y-गति का समीकरण है :

$$y = a \sin (2\omega t + \phi) \qquad \cdots(10{\cdot}42)$$

और x-गति का समीकरण है—

$$x = b \sin (\omega t) \qquad \cdots(10{\cdot}43)$$

समीकरण (10·42) से

$$y/a = \sin 2\omega t \cos \phi + \cos 2\omega t \sin \phi$$

$$= 2 \sin \omega t \cos \omega t \cos \phi + (1 - 2\sin^2 \omega t) \sin \phi$$

समीकरण (10·43) से $\sin \omega t = x/b$ तथा $\cos \omega t = \sqrt{1 - x^2/b^2}$

उपर्युक्त समीकरण में प्रयुक्त करने पर

$$y/a = 2\, x/b \sqrt{1 - x^2/b^2} \cos \phi + (1 - 2x^2/b^2) \sin \phi$$

या $y/a - (1 - 2x^2/b^2) \sin \phi = 2x/b \sqrt{1 - x^2/b^2} \cos \phi$

या $\left(\frac{y}{a} - \sin \phi + \frac{2x^2}{b^2} \sin \phi \right) = \frac{2x}{b} \sqrt{1 - x^2/b^2} \cos \phi$

या $\left\{ \left(\frac{y}{a} - \sin \phi \right) + \frac{2x^2}{b^2} \sin \phi \right\} = \frac{2x}{b} \sqrt{1 - x^2/b^2} \cos \phi$

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$$\left(\frac{y}{a} - \sin \phi \right)^2 + 2 \left(\frac{y}{a} - \sin \phi \right) \frac{2x^2}{b^2} \sin \phi + \frac{4x^4}{b^4} \sin^4 \phi$$

$$= \frac{4x^2}{b^2} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \cos^2 \phi$$

या $\left(\frac{y}{a} - \sin \phi \right)^2 + \frac{2y}{a} \left(\frac{2x^2}{b^2} \sin \phi \right) - \frac{4x^2}{b^2} \sin^2 \phi$

$$+ \frac{4x^4}{b^4} \sin^2 \phi = \frac{4x^2}{b^2} \cos^2 \phi - \frac{4x^4}{b^4} \cos^2 \phi$$

$$\text{या} \left(\frac{y}{a} - \sin\phi\right)^2 + \frac{4x^2}{b^2}\ \frac{y}{a}\sin\phi - \frac{4x^2}{b^2}(\text{sia}^2\phi + \cos^2\phi)$$

$$+\frac{4x^4}{b^4}(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = 0$$

या $\boxed{(y/a - \sin\phi)^2 + 4x^2/b^2\ (y/a\ \sin\phi - 1 + x^2/b^2) = 0}$ ···(10·44)

यह सामान्यतः दो कनिक सैक्सन (two Conic section) प्रदर्शित करती है

विशेष स्थिति—

(1) जब $\phi = 0$, समीकरण (10·44) निम्न रूप ले लेता है—

$y^2/a^2 + 4x^2/b^2(x^2/b^2 - 1) = 0$ ···(10·45)

यह 8 के अंक के समान आकृति प्रदर्शित करता है।

(2) जब $\phi = \pi/2$, समीकरण (10·43 निम्न रूप ले लेता है—

$(y/a - 1)^2 + 4x^2/b^2\ (y/a - 1 + x^2/y^2) = 0$

या $(y/a - 1)^2 + 2(y/a - 1)\ 2x^2/b^2 + 4x^4/b^4 = 0$

या $\{(y/a - 1) + 2x^2/b^2\}^2 = 0$ ···(10·46)

यह दो संपाती परवलय प्रदर्शित करता है जिनमें प्रत्येक का समीकरण—

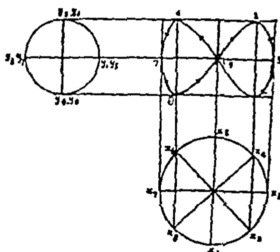
$y/a \quad 1 + 2x^2/b^2 = 0$

या $x^2 = -b^2/2a.(y - a)$ ···(14·47)

इसी प्रकार ϕ के अन्य मान के लिये भी आकृतियाँ ज्ञात की जा सकती हैं। ध्यान रहे कि यहाँ ϕ कलान्तर दुगुनी आवृति की गति में प्रविष्ट किया गया है।

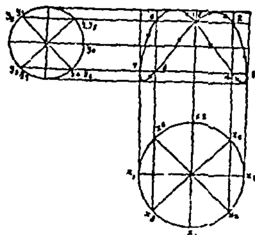
ग्राफ विधि—प्रथम स्थिति (जब आवृत्तियाँ बराबर थी) के समान ही दो वृत्तीय गतियों के प्रक्षेपों की सहायता से इस स्थिति में भी लिसाजु आकृतियाँ बनाई जा सकती है। अब यही ध्यान रखना होगा कि y गति का आवर्त काल x गति के आवर्तकाल का आधा है। अतः x गति में कण जितने समय में 45° से बढ़ेगा, y गति में कण उसी समय में 90° से बढ़ जायगा। अतः पहले के समान ही दिये हुए आयामों के वृत्त बनाकर तथा प्रारम्भिक बिन्दु निर्धारित कर, y गति में दिया हुआ कलान्तर प्रविष्ट कर दिया जाता है : अर्थात y गति का प्रारम्भिक बिन्दु उतने ही कोण से आगे बढ़ा दिया जाता है। इसके बाद x गति के आवर्तकाल T के आठवें भाग के अन्तराल से दोनों गतियों की स्थितियाँ बनाते जाते हैं। इतने समय में x गति का जनक-बिन्दु (generating point) 45° बढ़ेगा और y गति का जनक-बिन्दु

90° बढ़ेगा। चित्र (10·10) में शून्य कलान्तर होने पर 8 के अंक के समान आकृति का बनना प्रदर्शित किया गया है।



चित्र—10·10

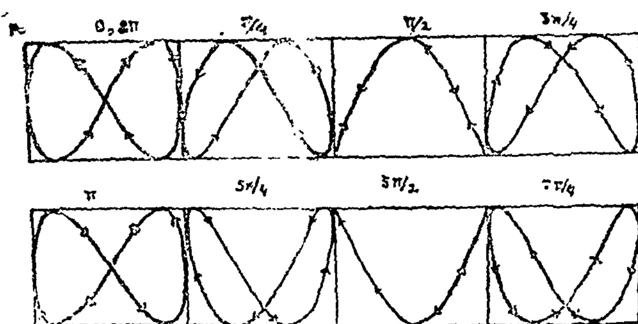
जब कलान्तर 45° या $\pi/4$ हो, तब द्वि—परवलय (double parabola) के समान आकृति बनती है, यह चित्र (10·11) में प्रदर्शित किया गया है। जैसा कि गणितीय विश्लेषण में बतलाया गया है, कलान्तर $\pi/2$ होने पर दोनों परवलय संपाती होकर एक परवलय बना देते हैं। शून्य से लेकर (2π) तक कलान्तर के लिए विभिन्न आकृतियाँ चित्र (10·12) में दिखलाई गई हैं। इसमें हम देखते हैं कि (π) कलान्तर



चित्र—11·11

के पश्चात् आकृति की पुनरावृत्ति हो जाती है। परन्तु उनके आकार में और अ

के बनने की दिशा (directiou of tracing) में अन्तर होता है। चित्र में विभिन्न

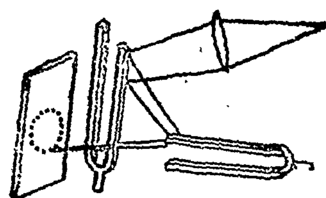


चित्र—12 12

कलान्तरों के लिए आकृति, और उसके बनने की दिशा तीर का चिन्ह् लगाकर, प्रदर्शित की गई है। कलान्तर O, π और 2π के लिए लिसाजु आकृति (∞) आठ के अंक के समान है, परन्तु π कलान्तर के लिए दिशा विपरीत है।

लिसाजु आकृति प्राप्त करने की प्रायोगिक विधि—दो परस्पर लम्बवत कम्पनों का योग कर लिसाजु आकृति बनाने की कई विधियाँ हैं जैसे प्रकाशीय विधि ब्लेकबर्न-पेन्डुलम् ओर ऑसिलोस्कोप (Oscilloscope) की सहायता से। यहाँ हम इनमें से एक विधि का वर्णन करेंगे।

प्रकाशीय विधि—इसमें दो स्वरित्र प्रयुक्त किये जाते हैं जिनमें से प्रत्येक की एक एक भुजा पर छोटा दर्पण चिपका दिया जाता है। एक स्वरित्र ऐसी स्थिति में रखा जाता है कि उसकी भुजा के कम्पन ऊर्ध्वाधर दिशा में हो तथा दूसरा स्वरित्र ऐसी स्थिति में रखा जाता है कि उसकी भुजा के कम्पन क्षैतिज दिशा में हों। एक लघु परन्तु शक्तिशाली प्रकाश स्रोत के सामने एक उत्तल लैन्स फोकस दूरी से कुछ अधिक दूरी पर रखा जाता है और उसके कारण बनी हुई अभिसारी प्रकाश-पुंज प्रत्येक स्वरित्र के दर्पण से परावर्तित होकर अन्ततः एक पर्दे पर फोकस की जाती है। देखिये चित्र 10·13 जब स्वरित्र कम्पित किये जाते हैं तो प्रकाश किरणें भी क्रमशः ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दिशा में कम्पन करती हैं। अतः दोनों को एक साथ कम्पित करने पर दोनों गतियों के योग के फलस्वरूप लिसाजु आकृति बनती है। यदि दोनों की आवृत्ति बराबर है तो, कलान्तर के अनुसार चित्र 10·9 में दिखाई गई आकृतियों में से कोई आकृति बनेगी और यदि एक की



चित्र—10·13

वृत्ति दुगुनी हो, तो चित्र 10·12 में दिखाई गई आकृतियों में से कोई आकृति गी। यदि आवृत्तियाँ ठीक ठीक 1 : 1 या 1 : 2 के अनुपात में न हों वरन् बहुत ड़ा ही अन्तर हो (जैसे 200 और 204 अथवा 100 और 201) तो स्वरित्रों के पनों में कलान्तर धीरे धीरे बढ़ता रहेगा और क्रमशः सब आकृतियाँ चित्र 10·9 अनुसार अथवा चित्र 10·12 के अनुसार) अंकित होंगी। यदि हम उस समय (t) माप करें जिसमें कि इन आकृतियों का एक चक्र पूर्ण होता हो (Complete rcle) अर्थात् पुन प्रारम्भ की आकृति उसी दिशा में अंकित होने लगे तो स्पष्ट ही समय (t) में दोनों में कलान्तर 2π से परिवर्तित हुआ है, अर्थात् कम्पनों की या में एक का अन्तर आया है।

अतः t सैकण्ड में कम्पन-संख्या में अन्तर = 1

, 1 सैकण्ड में कम्पन-संख्या में अन्तर = $1/t$

अतः यदि चित्र 10·9 की आकृतियाँ बनी है, और एक स्रोत की आवृत्ति n तो दूसरे की होगी, $n' = n \pm 1/t$ ·· (10·48)

यदि चित्र 10·12 की आकृतियाँ बनती हैं और दूसरे स्वरित्र की आवृत्ति रम से लगभग दुगुनी है, तो स्पष्ट ही $n' = 2n \pm 1/t$ ···(10·49)

इस प्रकार लिसाजु आकृतियों की सहायता से स्वरित्र की अज्ञात आवृत्ति ज्ञात की जा सकती है

0·7 प्रकाश तरंगो का व्यतिकरण

जिस प्रकार ध्वनि तरंगो में या पानी में तरंगो में व्यतिकरण होता है, उसी कार प्रकाश तरंगो में भी व्याति करण होता है जैसा कि पहले वर्णन किया जा का है, व्यतिकरण तरंगो का विशिष्ट गुण है, किसी भी प्रकार की तरंग हों, उनमें तिकरण सम्भव है। प्रकाश तरंगों में भी जब एक ही आवृत्ति (या तरंग दैर्घ्य) दो या अधिक तरंगे किसी बिन्दु पर लगभग एक सी ही दिशा में कम्पन उत्पन्न रती हैं, तब उनके कलान्तर के अनुसार कुछ निश्चित परिणामित कम्पन होता है। ही व्यतिकरण है तथा परिणामित प्रभाव का अधिकतम (रचनात्मक व्यतिकरण) न्यूनतम (विनाशी व्यतिकरण) होना उन कम्पनों के कलान्तर पर निर्भर रता है।

यदि दो समान आवृत्ति की तरंगे जो लगभग एक ही दिशा में गति कर रही किसी बिन्दु पर ϕ कलान्तर के कम्पन उत्पन्न करती हों, अनुच्छेद 10·2 में समीकरण (10·10) के अनुसार परिणमित कम्पन का आयाम होगा—

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \phi$$

[प्रकाश तरंगो में a's विद्युत-क्षेत्र-वक्टर के आयाम लिये जाते हैं; जैसा कि

अध्याय 9 में वर्णन किया गया है प्रकाश तरंगो को विद्युत-चुम्बकीय तरंगे माना गया है जिनमें विद्युत-क्षेत्र वेक्टर और चुम्बकीय क्षेत्र वेक्टर दोनों का समय के साथ आवर्त्ती परिवर्तन होता है। तथा इनमें से किसी भी वेक्टर द्वारा प्रकाश तरंगों का वर्णन किया जा सकता है। परम्परानुसार विद्युत-क्षेत्र वेक्टर द्वारा प्रकाश तरंगों का प्रदर्शन किया जाता है]

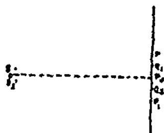
उपर्युक्त समीकरण को ध्यान में रखते हुए हम यह देख सकते हैं कि दिक के भिन्न भिन्न विन्दुओं पर स्थायी व्यतिकरण प्रभाव* उत्पन्न करने के लिए आवश्यक शर्त्तें क्या होंगी।

कला सम्वद्ध स्रोत (Coherent sources)—सबसे प्रमुख आवश्यकता है कि दोनों स्रोत कला-सम्वद्ध स्रोत होने चाहिये, इसका तात्पर्य यह है कि दोनों में सदैव निश्चित कला-सम्बन्ध (definite phase-velation) रहे। समीकरण (10·10) के अनुसार यदि ϕ का निश्चित मान होगा तभी a^2 (या a) का निश्चित मान हो सकता है तथा ϕ का मान दोनों स्रोतों से विन्दु की दूरी और उसके प्रारम्भिक कलान्तर पर निर्भर करेगा। यदि चित्र 10·3 में दोनों स्रोतों से विन्दु P की दूरी का अन्तर (पथ-अन्तर; path-difference) λ के बराबर हो, तो कलान्तर 2π होगा और यदि दोनों स्रोतों के कम्पनों का प्रारम्भिक कलान्तर π रहा हो, तो कुल कलान्तर 3π हुआ, अतः P पर विनाशी व्यक्तिकरण होगा और 'a' का मान न्यूनतम होगा। अब यदि प्रारम्भिक कलान्तर में यकायक परिवर्तन हो जाय और उसका मान 2π हो जाय, तो P पर कुल कलान्तर 4π होने के कारण रचनात्मक व्यक्तिकरण होगा और 'a' का मान अधिकतम होगा। इस प्रकार पथ-अन्तर तो स्रोतों और विन्दु की स्थिति के साथ निश्चित हो जाता है और यदि दोनों स्रोतों का प्रारम्भिक कलान्तर भी निश्चित रहे तो P पर 'a' का मान निश्चित रहेगा (समय के साथ परिवर्तित नहीं होगा) यह प्रतिबन्ध अत्यन्त आवश्यक है, अन्यथा P पर व्यक्तिकरण का प्रभाव परिवर्तित होता रहेगा और हम उसका मध्यमान प्रभाव (average effect) ही देख सकेंगे जो कि लगभग एक समान प्रकाश-तीव्रता होगा। अर्थात् व्यक्तिकरण तो होता है, परन्तु स्थायी नहीं, अतः वह सामान्यतः दृश्य

---

* किसी भी विन्दु पर व्यतिकरण प्रभाव स्थायी हो अर्थात समय के साथ परिवर्त्तित न हो, तभी देखा जा सकता है। यदि कुछ क्षणों की अवधि में ही विन्दु पर कभी अधिकतम, कभी न्यूनतम अथवा अन्य आयाम के कम्पन होते रहें, तो उनका मध्यमान प्रभाव (average effect) ही दृष्टिगत होगा, अर्थात लगभग एक समान प्रकाश—तीव्रता।

(observable) नहीं है। चित्र 10·14 में यदि s_1, s_2 से तरंगें एक ही कला में प्रारम्भ होती है, तब P_0, P, P_1 आदि पर प्रकाश तीव्रता अधिकतम होगी (bright-point); यदि तरंगें कलान्तर π से प्रारम्भ होती हैं, तब ये बिन्दु न्यूनतम प्रकाश की स्थिति में होंगे तथा अन्य कोई कलान्तर होने पर यहाँ तदनुसार प्रकाश तीव्रता हो जायगी। अतः इन बिन्दुओं पर व्यतिकरण की स्थिति प्रारम्भिक कलान्तर पर निर्भर करेगी तथा



चित्र 10·14

जब तक दोनों स्रोतों में एक निश्चित स्थायी कलान्तर रहेगा विभिन्न बिन्दुओं पर व्यतिकरण-प्रभाव भी निश्चित और स्थायी रहेगा परन्तु यदि दोनों स्रोतों का कलान्तर अनिश्चित रूप से (random) बदलता रहे, तब निश्चित और स्थायी व्यतिकरण नहीं होगा। ऐसे दो स्रोत जिनमें एक निश्चित कलान्तर बना रहता है, कला-सम्बद्ध स्रोत कहलाते हैं [यह स्पष्ट कर देना आवश्यक है कि प्रकाश के दो स्वतन्त्र स्रोत कभी भी कला-सम्बद्ध स्रोत नहीं हो सकते और व्यतिकरण-प्रभाव उत्पन्न नहीं कर सकते। क्योंकि कोई भी स्रोत अरबों, खरबों परमाणुओं के कम्पनों का सम्मिलित प्रकाश देता है और प्रकाश-उत्सर्जित करने वाले परमाणु एक सैकण्ड में करोड़ों बार बदलते रहते हैं। अतः किसी एक प्रकाश स्रोत से ही किसी न किसी प्रकार दो कला-सम्बद्ध स्रोत प्राप्त किये जा सकते हैं।]

व्यति-करण के लिये आवश्यक शर्तें—

1. कला-सम्बद्ध स्रोत होने चाहिये—इनके विषय में पूर्ण विवेचन ऊपर किया जा चुका है।

2. तरंगें लगभग एक ही दिशा में गतिशील होनी चाहिये जिससे कि कम्पन की दिशा भी लगभग एक-समान हो।

3. यदि तरंगें ध्रुवित हों (polarised) तो उनके ध्रुवण-तल (plane of polarization) एक ही होने चाहिये।

उपर्युक्त (2) और (3) शर्तें पूर्ण न होने पर अन्य प्रकार के व्यतिकरण प्रभाव होंगे न कि अनुच्छेद 10 2 के अनुसार सामान्य व्यतिकरण।

4. स्रोत लगभग एक समान तीव्रता के होने चाहिये, जिससे कि आयाम a_1 और a_2 भी लगभग बराबर हों।

5. स्रोतों की दूरी अपेक्षाकृत कम होनी चाहिये।

6. मूल स्रोत जिससे कि कला-सम्बद्ध स्रोत प्राप्त किये गये हैं, एक वर्णी

(monochromatic) होना चाहिये अर्थात एक निश्चित तरंग दैर्घ्य का उत्सर्जन करता हो।

इनमें प्रथम तीन शर्तें आवश्यक आधारभूत शर्तें हैं और अन्तिम तीन, स्वच्छ तथा स्पष्ट व्यतिकरण फ्रिन्ज देख सकने की सुविधा के लिए अपेक्षित हैं।

शर्त (4) के अनुसार अगर आयाम लगभग बराबर होंगे तो चमकीली और अदीप्त (dark) फ्रिन्ज की तीव्रता (intensity) में विपर्यास (contrast) अच्छा होगा अन्यथा विनाशी व्यतिकरण के स्थलों पर भी आयाम शून्य नहीं होने के कारण तीव्रता शून्य नहीं होगी।

प्रकाश की तीव्रता—कम्पन के आयाम के वर्ग के समानुपाती होती है अतः यह एक तरंग के कारण आयाम $a_1 = 10$ इकाई हो तथा दूसरी तरंग के कारण आयाम $a_2 = 4$ इकाई हो तो अधिकतम आयाम $= a_1 + a_2 = 10 + 4 = 14$ तथा न्यूनतम आयाम $= a_1 - a_2 = 10 - 4 = 6$ अतः दोनों की तीव्रता का अनुपात

$$= \frac{(14)^2}{(6)^2} = \frac{196}{36} = 5 \cdot 5$$

शर्त (5) के अनुसार स्रोतों की दूरी अपेक्षाकृत कम होने पर व्यतिकरण फ्रिन्ज की चौड़ाई अधिक होती है अर्थात फ्रिन्जों की आपस में दूरी अधिक होती है, जिन्हें देखने में आसानी रहती है।

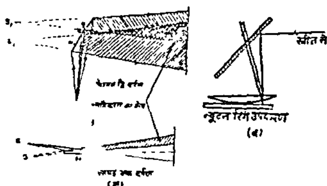
शर्त (6) के अनुसार एक वर्णी प्रकाश होने पर सुस्पष्ट चमकीली और अदीप्त फ्रिन्ज बनती है अन्यथा प्रत्येक वर्ण के कारण अलग-अलग फ्रिन्ज बनेंगे और उनका अतिव्यापन (overlapping) होगा, जिससे केन्द्रीय फ्रिन्ज से दूरी पर फ्रिन्ज मिश्रण हो जाने के कारण स्पष्ट नहीं रहेंगे।

व्यति-करण फ्रिन्ज—चित्र 10·14 में यदि s_1 और s_2 का प्रारम्भिक कलान्तर शून्य हो, तो बिन्दु P_0 तथा अन्य बिन्दु जो s_1 और s_2 से समान दूरी पर होंगे, सब चमकीले होंगे। इसके दोनों ओर बिन्दु Q_1 और Q_2 (जहाँ दोनों तरंगें π कलान्तर से पहुँचती हैं) अदीप्त होंगे। इस बार यदि P_0 बिन्दु पर कागज के तल के लम्बवत एक पर्दा रखा जाय, तो उस पर चमकीली और काली धारियाँ दिखाई देंगी; वस्तुतः s_1, s_2 के सामने के स्थान में चमकीले तथा काले बिन्दुओं के भिन्न-भिन्न बिन्दु-पथ (locus) होंगे (एक बिन्दु-पथ के सभी बिन्दुओं पर तरंगों का कलान्तर एक-समान होता है) इन्हें व्यतिकरण फ्रिन्ज कहते हैं। पर्दा रखने पर इनका पर्दे पर काट-क्षेत्र प्राप्त होता है। पर्दे पर प्राप्त धारियों को भी व्यतिकरण फ्रिन्ज कहते हैं। यदि s_1 और s_2 दो बारीक रेखा-छिद्र हों तब इनके तल के समान्तर तल में स्थित पर्दे पर (P_0 पर कागज के लम्बवत तथा रेखा OP_0 के लम्बवत) लगभग सीधी समान्तर धारियाँ प्राप्त होंगी।

10·8. तरंग पृष्ठ का विभाजन तथा आयाम का विभाजन (Division of wave front and division of Amplitude)

स्थायी व्यतिकरण के लिए आवश्यक कला सम्बद्ध स्रोत प्राप्त करने की कई विधियाँ प्रयुक्त की गई हैं जिनमें सभी मे किसी न किसी प्रकार एक मूल स्रोत प्राप्त करने की कई विधियाँ प्रयुक्त की गई हैं। जिनमें सभी मे किसी न किसी प्रकार किसी मूल स्रोत से ही दो स्रोत प्राप्त किये जाते हैं। इसके कुछ उदाहरण चित्र 10 15 (अ) और (ब) मे दिखाये गये हैं। इन चित्रो से यह स्पष्ट हो जायगा कि इन विधियो मे मूलतः दो सिद्धान्तो का प्रयोग किया गया है।

(अ) तरंग पृष्ठ का विभाजन—एक स्रोत से प्रसारित तरग पृष्ठ के किसी भी उपयुक्त विधि से दो भाग किये जाते हैं जैसा कि चित्र 10 15 के (अ) भाग मे फ्रेज्नल के द्वि-दर्पण, लायड के एक-दर्पण आदि मे किया गया है। इनकी दिशा मे

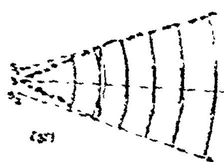


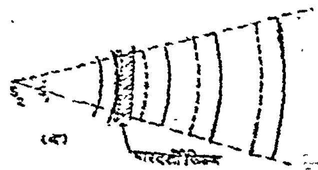
चित्र 10·15

थोड़ा परिवर्तन हो जाने के बाद मे भाग दो भिन्न स्रोतों से आते हुए प्रतीत होते हैं। यदि मूल स्रोत के तरग पृष्ठ के कम्पनों की कला मे कोई भी यकायक-परिवर्तन होता है तो वह दोनों भागों में भी होता है, अत. दोनो आभासी स्रोतों मे निश्चित कला-सम्बन्ध रहता है। इस सिद्धान्त के प्रयोग का एक अन्य उदाहरण फ्रेज्नल का बाइ-प्रिज्म है जिसका वर्णन अनुच्छेद 10 9 मे किया गया है। इस प्रकार तरंग पृष्ठ का विभाजन चित्र 10 16 (अ) मे प्रदर्शित किया गया है।

(ब) आयाम का विभाजन—स्रोत से प्रसारित होने वाला तरग पृष्ठ विभाजित नहीं किया जाता, वरन् परावर्तन और अपवर्तन के द्वारा सम्पूर्ण तरग पृष्ठ के आयाम का विभाजन होता है। जैसा कि हम जानते है। परावर्तन मे प्रकाश की तीव्रता (अथवा आयाम) का कुछ अंश परावर्तित होता है; इसी प्रकार अपवर्तन मे भी प्रकाश का कुछ अंश अपवर्तित होता है, अत. चित्र 10 16 (ब) के अनुसार एक पारदर्शक फिल्म मे से कुछ अंश अपवर्तित होकर निकल जाता है, जब कि कुछ अंश दो बार परावर्तित होकर फिर निकलता है। अत. यह अंश प्रथम अंश से पथ में पीछे रह जाता है और दोनो का पथ का अन्तर (Path difference)

मोटाई की फिल्म होने पर तथा लम्बवत किरणें होने पर, स्पष्टतः 2t के बराबर होगा। अतः हम दोनों तरंग पृष्ठों को अलग-अलग श्रोत S_1 और S_2 से प्रसारित हुआ मान सकते हैं; इस प्रकार आयाम के विभाजन के द्वारा भी दो कला-सम्बद्ध स्रोत प्राप्त होते हैं। दोनों तरंग पृष्ठ क्रमशः पूर्ण रेखाओं (Full lines) और बिन्दु-रेखाओं (Dotted lines) के द्वारा प्रदर्शित किये गये हैं।





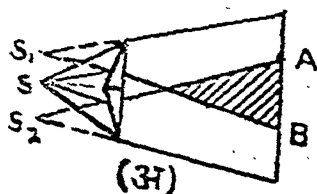
चित्र 10·16

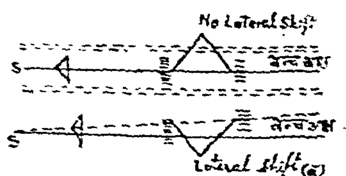
[इस विधि में अधिकांशतः दो से अधिक स्रोत प्राप्त हो सकते हैं, क्योंकि दो बार परावर्तन के बाद कुछ अंश का अपवर्तन हो जाने के बाद भी बचे हुए अंश का फिल्म के अन्दर परावर्तन-अपवर्तन का क्रम चलता रहेगा। अत समान मोटाई की फिल्म होने पर वस्तुतः कई समान्तर किरणें अर्थात् कई स्रोतों का मिला-जुला व्यतिकरण प्रभाव होता है।]

10·9. फ्रेज्नल बाइ-प्रिज्म

तरंग पृष्ठ के विभाजन द्वारा दो कला सम्बद्ध स्रोत प्राप्त कर व्यतिकरण फ्रिन्ज प्राप्त करने का एक उदाहरण फ्रेज्नल बाइ-प्रिज्म है जिसमें तरंग पृष्ठ का विभाजन चित्र 10-15 (अ) में प्रदर्शित किया गया है।

बाइ-प्रिज्म दो अत्यन्त लघु प्रिज्म-कोण वाले त्रिकोणीय प्रिज्मों का युग्म होता है जिनमें प्रिज्म कोण लगभग 1-2 डिग्री की कोटि का होता है क्यों ? इस पर व्यतिकरण की शर्तों की अपेक्षा से विचार करें तथा बाद में उदाहरण 10·1 देखें) अतः वस्तुतः यह कांच के एक आयताकार प्रिज्म की ही समुचित तरीके से घिसाई करके बनाया जाता है। दोनों प्रिज्मों में से अपवर्तन के फलस्वरूप निर्गत किरणें दो स्रोतों S_1 और S_2 से आती हुई प्रतीत होती हैं तथा क्षेत्र AB में जहाँ दोनों की किरणें विद्यमान हैं, व्यतिकरण होता है (देखिये चित्र (10·17)। एक बारीक-रेखा-छिद्र स्रोत की किनार (edge) के समानान्तर रखने पर उनके समान्तर रेखीय फ्रिन्ज प्राप्त होते हैं।





चित्र 10·17

बाइ-प्रिज्म द्वारा व्यतिकरण फ्रिन्ज प्राप्त कर सम्बन्धित मापन करने के लिये एक विशेष प्रकार की प्रकाशीय बेंच (optical bench) होती है जिसमें दो समान्तर छड़ें (double rod) होती हैं तथा इनको क्षैतिज तल में रखने के लिए उपकरण के भारी आधार (heavy base) में क्षैतिजकारी पेंच (levelling screws) होते हैं एक स्टैण्ड पर रेखा-छिद्र (slit) लगी हुई रहती है तथा इसमें रेखा-छिद्र की मोटाई कम या अधिक करने के लिए और रेखा-छिद्र को बेंच की अक्ष के परितः घुमाने के लिये व्यवस्था होती है जिससे कि रेखा-छिद्र बिलकुल बारीक किया जा सके और बिलकुल ऊर्ध्वाधर (vertical) रखा जा सके। इसके आगे एक अन्य स्टैण्ड पर बाई-प्रिज्म लगाया जाता है तथा इसमें भी अक्ष के परितः घुमाने की व्यवस्था होती है जिससे कि दोनों प्रिज्मों के बीच की किनार बिल्कुल ऊर्ध्वाधर (अर्थात रेखाछिद्र के समान्तर) की जा सके। इसके अतिरिक्त इस स्टैण्ड को एक माइक्रोमीटर स्क्रू की सहायता से बेंच के लम्बवत सरकाया जा सकता है। दो अन्य स्टैण्ड इनके बाद रखे जाते हैं जिनमें अन्तिम स्टैण्ड पर फ्रिन्ज देखने के लिये एक नेत्रिका (eye-piece) लगा रहता है जिसको बेंच के लम्बवत सरकाया जा सकता है तथा स्केल और वर्नियर की सहायता से ऊर्ध्वाधर क्रासतार की स्थिति पढ़ी जा सकती है। बाइ-प्रिज्म और नेत्रिका के बीच के स्टैण्ड पर एक उत्तल लैन्स लगाया जा सकता है जिसकी सहायता से प्रयोग के अन्त में दोनों आभासी स्रोतों के बीच की दूरी (2d) ज्ञात की जाती है।

सुस्पष्ट फ्रिंज प्राप्त करने के लिये आवश्यक समंजन

(1) उपकरण को क्षैतिज तल में किया जाना चाहिये।

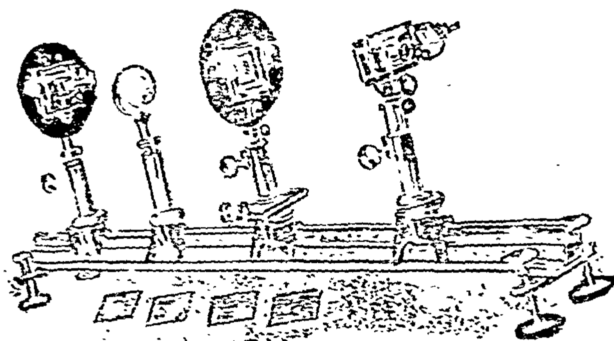
(2) रेखा-छिद्र बारीक और ऊर्ध्वाधर रखना चाहिये। ऊर्ध्वाधर करने के लिये एक डोरे में वजन लटकाकर स्लिट के पास लटकाया जाता है और नेत्रिका में से देखते हुए स्लिट को घुमाकर डोरे की दिशा में कर लिया जाता है।

(3) बाइ-प्रिज्म की किनार रेखा-छिद्र के समान्तर अर्थात ऊर्ध्वाधर कर दी जाती है तथा उसको लम्बवत विस्थापन (lateral displacement) देकर रेखा-छिद्र के बिल्कुल सामने कर लेते हैं। यह समंजन होने पर यदि बाइ-प्रिज्म में से देखा जाय तो उसकी किनार के दोनों ओर दो बारीक रेखा-छिद्र दिखाई देंगे ... को उपकरण के अक्ष के लम्बवत विस्थापित करने पर एक रेखा-छिद्र ... साथ विलुप्त हो जायगा।

(4) यदि बाइ-प्रिज्म की किनार और रेखा-छिद्र बेंच के ... आ जाते हैं तो समंजन पूर्ण हो जाता है। (चित्र 10·17 द)

नेत्रिका में से देखने पर सन्तुष्ट ऊर्ध्वाधर फ्रिन्ज दिखते हैं

फ्रिन्ज पर क्रास-तार समंजित कर यदि नैत्रिका को बाइ-प्रिज्म से दूर या पास सरकाया जाता है तब भी क्रास-तार उसी केन्द्रीय फ्रिन्ज पर रहता है; इस प्रकार फ्रिन्ज का लम्बवत विस्थापन (lateral shift) नहीं होता। अन्यथा बाइ-प्रिज्म को लम्बवत विस्थापन देकर अन्ततः उसकी किनार और रेखा-छिद्र को बेंच की अक्ष में करके यह समंजन सही-सही प्राप्त किया जाता है। बाइ-प्रिज्म प्रयोग के लिये प्रकाशीय बेंच उपकरण चित्र 0·18 में दिखाया गया है।



चित्र 10·18

उपर्युक्त समंजन करने के पश्चात् नैत्रिका के स्टैण्ड को बेंच पर किसी समुचित स्थिति में बद्ध (fix) कर फ्रिन्ज चौड़ाई के लिये नैत्रिका को लम्बवत विस्थापन देते हुये पाठ्यांक ले लेते हैं। स्रोत से नैत्रिका की सही दूरी (D) ज्ञात करने के लिये, सम्बन्धित बेंच-शुद्धि (bench-correction) ज्ञात करना चाहिये। हम गणितीय विश्लेषण द्वारा फ्रिन्ज चौड़ाई (β) की गणना कर सकते हैं। जो निम्न होगी—

$$\beta=\frac{D\,\lambda}{2d} \qquad \ldots\ldots(10{\cdot}50)$$

जबकि 'λ' प्रयुक्त एक वर्णी प्रकाश की तरंग-दैर्घ्य है। इसकी सहायता से 'β' की माप कर 'λ' की गणना भी की जा सकती है। इस हेतु बेंच-शुद्धि का विलोपन करने के लिए नैत्रिका की दो स्थितियों में फ्रिन्ज चौड़ाई का मापन किया जाता है। यदि 'D' में शुद्धि x हो,

$$\beta_1=\frac{(D_1+x)\lambda}{2d}$$

तथा
$$\beta_2=\frac{(D_2+x)\ \lambda}{2d}$$

$$\therefore \quad (\beta_2-\beta_1)=\frac{(D_2-D_1)\,\lambda}{2d}$$

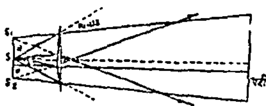
$$\therefore \quad \lambda=\frac{(\beta_2-\beta_1)\,2d}{(D_2-D_1)} \qquad ......(10\cdot51)$$

उत्तल लैन्स की सहायता से (2d) ज्ञात करना—

बाइ-प्रिज्म और नेत्रिका के बीच के स्टैण्ड में एक लघु फोकस दूरी का उत्तल लैन्स लगाकर उसको बाइ-प्रिज्म के पास ऐसी स्थिति में लाया जाता है कि दोनों *आभासी स्रोतों का सुस्पष्ट प्रतिबिम्ब नेत्रिका में दिखाई दे।* इस समय इनकी दूरी (d_1) वास्तविक दूरी (2d) से अधिक होगी जिसका माप-तार को सरकाकर मापन किया जाता है। इसके बाद लैन्स को नेत्रिका के पास की स्थिति में रखकर सुस्पष्ट प्रतिबिम्ब प्राप्त किया जाता है और स्रोतों के प्रतिबिम्ब की आपसी दूरी (d_2) का मापन किया जाता है; यह (2d) से कम होगी। इनकी सहायता से वास्तविक दूरी *निम्न सूत्र की सहायता से ज्ञात की जाती है—*

$$(2d)=\sqrt{d_1\,d_2} \qquad ...(10\,52)$$

उदाहरण 10·1—बाइ-प्रिज्म के प्रयोग में उसका अधिक कोण 178° है और $\mu=1\cdot524$ है। स्लिट से बाइ-प्रिज्म की दूरी 5 से०मी० और बाइ-प्रिज्म के पर्दे की 65 0 से०मी० हो तो फ्रिन्ज चौड़ाई की गणना करो। प्रकाश का तरंग-दैर्घ्य =5893 A° (देखिये चित्र 10 9) (राजस्थान वि० वि० 972)



चित्र 0·19

जबकि प्रिज्म का अधिक कोण 178° है तो दोनों प्रिज्मों के प्रिज्म कोण $\frac{180-178}{2}$ अर्थात 1° के होंगे। चित्र से स्पष्ट है कि d (स्रोत रेखा-छिद्र से एक आभासी स्रोत की दूरी

$$=a\,(\mu-1)\,\alpha$$

जबकि α प्रिज्म कोण (रेडियन में) और 'a' रेखा-छिद्र की बाइ-प्रिज्म से दूरी है। [$(\mu-1)\,\alpha$ प्रिज्म द्वारा उत्पन्न विचलन है]

अतः $2d=2a\,(\mu-1)\,\alpha$, $D=a+b$

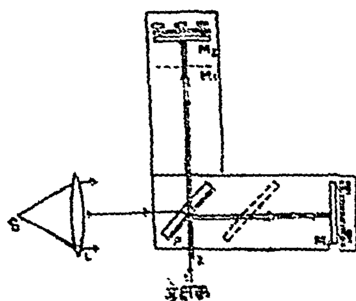
अतः $\beta = \frac{D\lambda}{2d}$

$$= \frac{70 \times 5893 \times 10^{-8}}{2 \times 5\,(1{\cdot}524 - 1) \times \frac{\pi}{180}}$$

$= 0{\cdot}0451$ से० मी०

10·10 माइकल्सन इन्टरफेरोमीटर

सिद्धान्त—यह उपकरण "आयाम के विभाजन" द्वारा आपतित किरणपुंज (beam) को दो भागों में विभाजित करता है जो परस्पर लम्बवत दिशाओं में जाकर दो समतल दर्पणों से परावर्त्तित होते हैं तथा इस प्रकार भिन्न भिन्न पथ की यात्रा कर पुनः एक समान दिशा में आकर नेत्र तक पहुँचते हैं। देखिये चित्र 10·20 इन दोनों किरण पुंजो के व्यतिकरण के फलस्वरुप फ्रिन्ज बनते हैं। जब दोनों दर्पणों परस्पर लम्बवत तथा ऊर्ध्वाधिर होते हैं तो प्रभावी रूप से (क्योंकि M_1 का प्रतिबिम्ब P में M'_1 पर बनता है) दोनों के बीच समान मोटाई की हवा की परत होने के कारण समान्तर किरणों में व्यतिकरण होता है और वृत्तीय फ्रिन्ज (Circular fringe) अनन्त पर बनते हैं।



चित्र 10·20

उपकरण का वर्णन—

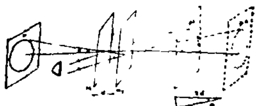
चित्र 10·20 में केवल प्रकाशीय अवयव (optical parts) दिखाये गये हैं। यह उपकरण धातु के एक भारी आधार पर दो लम्बवत भुजाओं के आकार में होता है। P एक कांच की समतल प्लेट है जिसकी दूसरी सतह पर आंशिक रजतन (silvering) किया हुआ रहता है। M_1 और M_2 दो समतल दर्पण हैं जिनकी सामने की सतह पर घना रजतन किया रहता है जिससे कि आपतित प्रकाश इस सतह से ही पूर्णतः परावर्त्तित हो जाय और दर्पण के अन्दर प्रवेश कर बारम्बार अपवर्त्तन, परावर्त्तन न हो, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है ये दर्पण ऊर्ध्वाधिर तल में परस्पर

लम्बवत दिशा में होते हैं और प्लेट P दोनों की दिशा से 45° का कोण बनाते हुए रखी जाती है। M_1 और M_2 को उनके पीछे लगे पेचों की सहायता से बिल्कुल उर्ध्वाधर तल में किया जाता है। यह वृत्तीय फ्रिन्ज प्राप्त करने के लिये आवश्यक है। दर्पण M_1 की स्थिति बद्ध (fixed) है, परन्तु M_2 को अपने समान्तर, एक अति यथार्थ स्क्रू की सहायता से सरकाया जा सकता है। यह स्क्रू अति सूक्ष्म चूड़ी-अन्तर का होता है तथा इसकी सहायता से दर्पण M_2 के अति सूक्ष्म विस्थापन (10^{-5} से० मी० के क्रम के) दिये जा सकते हैं। उपकरण में सामान्यतः एक अन्य काँच की प्लेट P' भी चित्र के अनुसार P के समान्तर रहती है। इसकी आवश्यकता के बारे में अध्याय के अन्त में पढ़िये।

वृत्तीय फ्रिन्ज किस प्रकार बनते हैं ?

जैसा कि चित्र 10·20 में दिखाया गया है, प्लेट P_1 के द्वारा ही आपतित प्रकाश के आयाम का विभाजन होता है। चित्र में एक आपतित किरण दिखलाई गई है जो प्लेट P_1 में से गुजर कर उसकी दूसरी (आंशिक रजतन युक्त) सतह पर आंशिक परावर्तन के फलस्वरूप दर्पण M_2 की ओर लम्बवत जाती है और उससे परावर्तित होकर वापस आती है, चित्र में यह वापसी पथ स्पष्टता की दृष्टि से अलग दिखाया गया है, तथापि ऐसी स्थिति में जब किरण लम्बवत आजाती हो, यह उसी पथ पर वापस आयेगी। प्लेट P_1 से आपाती किरण का बना हुआ अंश, दर्पण M_1 पर लम्बवत आपतित होकर उसी पथ से वापस आता है (यहाँ भी यह अलग दिखाया गया है) और P_1 की दूसरी सतह पर परावर्तित होकर चित्र के अनुसार प्रेक्षक की ओर आता है, इस प्रकार दोनों किरणें भिन्न भिन्न पथ तय करके अन्त में एक ही दिशा से प्रेक्षक की ओर आती हैं तथा उनमें व्यतिकरण होता है। चित्र में किरण 1 व 2

जब दर्पण पूर्णतः उर्ध्वाधर होते है, तब दर्पण M_1 का P_1 की रजतन-युक्त सतह से परावर्तन के कारण प्रतिबिम्ब M_1' पर बनता है जो M_2 के समान्तर है।



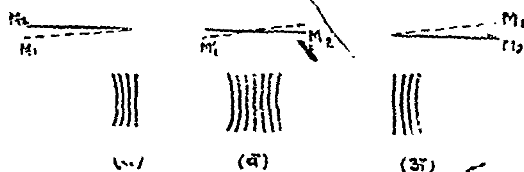
चित्र 10 21

इस प्रकार प्रभावी रूप में (effectively) इसमें किसी भी ...
के द्वारा और M_2 के द्वारा परावर्तन होकर, दोनों ...
स्पष्ट ही समान्तर होंगी, व्यतिकरण होता है।

गया है। वृहत आकार के स्रोत के विन्दु P से दर्पण के अभिलम्ब के साथ 'x' कोण वनाती हुई किरण दोनों से परावर्त्तित होकर क्रमशः P' और P'' से आती हुई प्रतीत होती है। चित्र से स्पष्ट है कि यदि M_1' और M_2 में दूरी d हो, तो P' और P'' में दूरी 2d होगी, तथा दोनों परावर्त्तित किरणों का पथान्तर $2d \cos \alpha$ होगा। अतः इस पथान्तर के $2n. \lambda/2$ अथवा $(2n+1)\lambda/2$ होने के अनुसार रचनात्मक अथवा विनाशी व्यतिकरण होगा। यह भी स्पष्ट है कि दर्पणों की एक दी हुई स्थिति में यह पथान्तर उन सभी किरणों के लिए वरावर होगा जो दर्पण के अभिलम्ब से एक ही कोण α वनाती हों। स्पष्ट ही एक वृत्त के विन्दुओं से चलने वाली किरणें समान कोण 'α' वनायेंगी, अतः उस वृत्त के सभी विन्दु प्रकाश तीव्रता की एक-सी स्थिति में होंगे। इस प्रकार वृत्तीय फ्रिंज वनते है और इसीलिए इनको **समान झुकाव के फ्रिन्ज (Fringes of equal inclination)**—कहते हैं। समान्तर किरणों के द्वारा वनने के कारण ये अनन्त पर स्थित होते हैं।

[न्यूटन की रिंग (Neuton's rings) भी आयाम के विभाजन के द्वारा व्यतिकरण के कारण वनती हैं, परन्तु उनमें पथान्तर वायु-परत की मोटाई के कारण होता है जो एक वृत्त पर एक सी होती है, कोण बहुत छोटे होने के कारण $\cos \alpha = 1$ ही होता है। अतः न्यूटन की अन्य रिंग वस्तुतः **(Frings of equal thickness)** होती है।]

माइकल्सन इन्टरफेरोमीटर में प्रकार की जैसे सीधी रेखाओं के अनुरूप फ्रिन्ज भी प्राप्त किये जा सकते हैं: ये भी न्यूटन-रिंग के समान स्थानीकृत (localized) फ्रिन्ज होते हैं। यदि एक दर्पण को थोड़ा झुका दिया जाय और उनकी प्लेट P_1 से दूरी वरावर कर दी जाय तो स्थिति चित्र 10.22 के अनुसार होगी, दर्पण M_2 की



चित्र—10·22

दूरी कम करते जाने पर क्रमशः स्थिति (अ) (व) और (स) वनेंगी और वेज के आकार (wedge shape) की वायु-परत वनेगी। प्रत्येक स्थिति में उसके साथ के चित्र के अनुसार फ्रिन्ज वनेंगे।

वृत्तीय फ्रिन्ज की सहायता से प्रकाश का तरंग दैर्घ्य ज्ञात करना

प्रेक्षक की स्थिति से दर्पण M_2 पर अभिलम्ब जहां होगा, वह विन्दु वृत्तीय फ्रिन्जों का केन्द्र होता है और यहां α शून्य होने के कारण पथान्तर सर्वाधिक (2d) होता है, अतः फ्रिन्ज का क्रम (order) केन्द्र पर सर्वाधिक होता है। अव यदि 'd'

को बढ़ाया जाय तो केन्द्र पर फ्रिन्ज का क्रम भी बढ़ेगा और केन्द्र में से क्रमशः नयी फ्रिन्ज प्रकट होती रहेंगी और यदि 'd' को कम किया जाय तो केन्द्र में एक-एक कर फ्रिन्ज विलुप्त होती जायगी। माना कि किसी समय जब M_2 और M_1 की दूरी 'd' है, केन्द्र में n क्रम की चमकीली फ्रिन्ज है, तो

$$2d = n\lambda \qquad ...(10.52)$$

अब यदि दर्पण M_2 को x से॰मी॰ सरकाकर दूरी $(d-x)$ कर दी जाय तो केन्द्र में n' क्रम की चमकीली फ्रिन्ज होगी जबकि

$$2(d-x) = n'\lambda \qquad ....(10.53)$$

केन्द्र में कितनी चमकीली फ्रिन्ज विलुप्त हुई यह संख्या, M_2 को धीरे-धीरे सरकाते हुये गिन ली जाती है यह $(n-n')$ है।

समीकरण······और ·····से,

$$(n-n')\lambda = 2x$$

$$\therefore \qquad \lambda = \frac{2x}{n-n'} \qquad ...(10.54)$$

x का मान माइक्रोमीटर स्क्रू की सहायता से ज्ञात हो जाता है। इस प्रकार प्रकाश की तरंग दैर्घ्य की गणना की जा सकती है।

*[माइकल्सन इन्टरफेरोमीटर के अन्य उपयोग—(1) इसकी सहायता से दो लगभग बराबर तरंग दैर्घ्य का अन्तर ज्ञात किया जा सकता है जैसे सोडियम लैम्प के प्रकाश को एक वर्णी माना जाता है, उसमें वास्तव में दो तरंग दैर्घ्य होती है— 5890 A° और 5896 A°। अतः इनके कारण बने हुये फ्रिन्ज में बहुत ही कम अन्तर होता है और वे एक वर्णी प्रकाश के समान ही सुस्पष्ट होते हैं। परन्तु यदि 'd' बढ़ाते जायें तो एक स्थिति में एक तरंग दैर्घ्य के कारण जहाँ चमकीली फ्रिन्ज बनती है वहीं दूसरी के कारण काली फ्रिन्ज बनने के कारण फ्रिन्ज अस्पष्ट हो जायगी अर्थात लगभग एक समान प्रकाश तीव्रता हो जायगी। ऐसी दो स्थितियों के अन्तर के द्वारा दोनों तरंग दैर्घ्यों का अन्तर ज्ञात किया जा सकता है।

(2) स्थानीकृत सीधे फ्रिन्जों की सहायता से किसी पारदर्शक पदार्थ की पतली परत के द्वारा उसका अपवर्तनांक ज्ञात किया जा सकता है।

(3) इसका अत्यन्त महत्वपूर्ण उपयोग लम्बाई की इकाई "मीटर" का किसी समुचित प्रकाश के तरंग दैर्घ्य के पदों में मानकीकरण (standerraisation) करने में किया गया है।]

उदाहरण 10·2—माइकल्सन इन्टरफेरोमीटर में वृत्तीय फ्रिन्ज प्राप्त किये गये तथा दर्पण M_2 को धीरे-धीरे प्लेट P_1 के पास सरकाने पर केन्द्र से 50 फ्रिन्ज विलुप्त हो जाते हैं अब दर्पण का कुल विस्थापन 0·00147 से॰मी॰ है। प्रयुक्त प्रकाश का तरंग-दैर्घ्य ज्ञात करो।

समीकरण (10·54) की सहायता से

$$\lambda=\frac{2\times0{\cdot}00147}{50}$$

$$=\frac{0{\cdot}00294}{50}$$

$$=0{\cdot}0000588 \text{ से॰मी॰}$$

$$=5880\ A^{\circ}$$ उत्तर

उदाहरण 10·3—एक स्वरित्र सोनोमीटर की डोरी के साथ 6 विस्पन्द बनाता है जबकि उसकी लम्बाई 95 से०मी० तथा 100 से०मी० है और तनाव स्थिर रहता है। स्वरित्र की आवृत्ति की गणना करो।

(राजस्थान वि० वि० परीक्षा 1970)

जब तनाव स्थिर होता है, तब सोनोमीटर की डोरी की आवृत्ति उसकी लम्बाई के व्युत्क्रमानुपाती होती है। स्पष्ट ही जब लम्बाई कम है, तब डोरी की आवृत्ति स्वरित्र की आवृत्ति से 6 अधिक और जब लम्बाई अधिक हो, तब 6 कम होगी (क्योंकि दोनों स्थिति में 6 विस्पन्द बनते हैं)। अतः यदि स्वरित्र की आवृत्ति n हो, तो डोरी की आवृत्ति क्रमशः होगी—

$$\frac{K}{95} \text{ और } \frac{K}{100}$$

जब कि K एक स्थिरांक है

अतः $\frac{K}{95}-n=6$ या $\frac{K}{95}=n+6$

और $n-\frac{K}{100}=6$ या $\frac{K}{100}=n-6$

भाग देने पर $\frac{100}{95}=\frac{n+6}{n-6}$

अतः $100n-600=95n+570$

$\therefore$ $100n-95n=570+600$

या $5n=1170$

$\therefore$ $n=234$

अतः स्वरित्र की आवृत्ति $=234$ प्रति सैकण्ड उत्तर

वृहत आकार के स्रोत की आवश्यकता—

[माइकलसन इन्टरफेरोमीटर में या न्यूटन-रिंग में व्यतिकरण फ्रिन्ज देखने के लिए वृहत आकार के स्रोत (Broad Source) की आवश्यकता होती है। इसका

कारण समझने के लिये चित्र 10·21 में ध्यान देवें कि स्रोत के किसी एक बिन्दु से चलने वाली प्रकाश किरण फ्रिन्ज का एक बिन्दु बनाती है। आँख को उसी स्थिति में रखते हुए पूरी फ्रिन्ज देख सकने के लिये स्रोत के अलग अलग बिन्दुओं से चलने वाली प्रकाश किरणें फिल्म के दोनो तलों पर परावर्तित होकर आँख तक पहुँचेंगी। अतः वृहत आकार का स्रोत होने पर ही पूरी फ्रिन्ज दिखाई देती है।

प्रतिकारक प्लेट (Compensating Plate)—P′ चित्र 10·20 में हम देखते हैं कि M_2 से परावर्तित होने वाली किरण 3 बार प्लेट P_1 में से गुजरती है जब कि M_1 से परावर्तित होते वाली किरण केवल एक बार इससे प्रकाशीय पथ में अन्तर होगा। एक वर्णी प्रकाश में तो M_2 की स्थिति को नियन्त्रित कर दोनों के पथों में फिर भी इच्छानुसार अन्तर रखा जा सकता है और पथान्तर शून्य भी किया जा सकता है, परन्तु यदि श्वेत प्रकाश (white light) प्रयुक्त किया जाय, तो यह पथान्तर अलग अलग तरंग दैर्ध्य के लिये अलग अलग होगा। अत एक प्रतिकारक प्लेट P′ चित्र के अनुसार रखने पर किरण 1 भी (जो दर्पण M_1 से परावर्तित होती है) काँच की प्लेट में से तीन बार गुजरेगी, अत काँच की प्लेट में से पथ दोनों किरणों के लिए, सभी रंगों के लिए एक-समान होगे।

इसका एक अन्य उपयोग यह है कि यदि थोड़ा सा पथ अन्तर (Very small path diffrenc) प्रयुक्त करना हो तो P′ को थोड़ा घुमाकर किया जा सकता है।]

प्रश्न

(1) तरंगों के अध्यारोपण सिद्धान्त का आवेदन कीजिये तथा विस्तार से समझाइये।

(2) व्यतिकरण का अभिप्राय समझाइये। दो समान आवृत्ति की ध्वनि तरंगें जो एक ही दिशा में जा रही हो, के व्यतिकरण का गणितीय विश्लेषण कीजिये।

(3) दो ध्वनि तरंगे जिनकी आवृत्ति में थोड़ा ही अन्तर है, एक ही दिशा में गतिशील हैं, उनके व्यतिकरण का परिणाम किस प्रकार का होता है? गणितीय विश्लेषण द्वारा सिद्ध करिये कि विस्पन्द की आवृत्ति दोनों की आवृत्ति के अन्तर के बराबर होती है।

(4) उपर्युक्त ध्वनि तरंगो की परिणामि तरग तरगो के चित्र बनाकर प्राप्त कीजिये।

(5) तरग समीकरण प्राप्त करिये। वेग, आवृत्ति तथा तरग-दैर्ध्य की परिभाषा बताइये तथा इनमे सम्बन्ध स्थापित करिये।

(6) गणितीय विश्लेषण द्वारा दो सर्वथा एक समान तरगो का परिणामित प्रभाव ज्ञात करिये जो परस्पर विपरीत दिशाओं में गति कर रही हों। सर्वाधिक आयाम वाले दो निकटतम बिन्दुओं की दूरी भी ज्ञात करिये।

(7, ग्राफ-विधि से अप्रगामी तरंगों की उत्पत्ति समझाइये प्रगामी और अप्रगामी तरंगों की तुलना कीजिये ।

(8) लिसाजु आकृतियाँ कब बनती हैं ? गणितीय विधि एवं ग्राफ-विधि से समान आवृत्ति के दो परस्पर लम्बवत कम्पनों का परिणमित वक्र ज्ञात करिये जब उनमें कलान्तर $\pi/4$ हो ।

(9) गणितीय विधि से दो परस्पर लम्बवत कम्पनों की परिणमित आकृति ज्ञात करिये जब 'y' दिशा के कम्पन की आवृत्ति दुगुनी हो (x-कम्पन से) । जब उनमें कलान्तर $\pi/2$ हो, तब परिणमित आकृति का समीकरण क्या होगा ।

(10) ग्राफ विधि से दो परस्पर लम्बवत कम्पनों की परिणमित आकृति ज्ञात करिये जब y कम्पन की आवृत्ति x कम्पन से दुगुनी हो और कला में $5\pi/4$ आगे हो ।

(11) लिसाजु-आकृतियाँ प्राप्त करने की किसी एक प्रायोगिक विधि का वर्णन करिये । यदि दोनों की आवृत्ति में थोड़ा अन्तर हो तब क्या होगा ?

(12) प्रकाश-तरंगों का स्थायी व्यतिकरण प्रभाव प्राप्त करने के लिये आवश्यक और ऐच्छिक प्रतिबन्धों का वर्णन करिये । कला-सम्बद्ध स्रोत का तात्पर्य समझाइये ।

(13) कला-सम्बद्ध स्रोत प्राप्त करने के लिये प्रयुक्त दो प्रमुख सिद्धान्तों का वर्णन करिये तथा प्रत्येक के लिए उदाहरण दीजिये ।

(14) फ्रेज्नल बाइ-प्रिज्म प्रयोग का वर्णन करिये । इसकी सहायता से तरंग-दर्ध्य ज्ञात करने के लिए कौन कौन सी राशि का मापन किस प्रकार किया जाता है, स्पष्ट करिये ।

(15) फ्रेज्नल-बाइ प्रिज्म में व्यतिकरण किस प्रकार होता है, स्वच्छ प्रकाशीय चित्र बनाकर समझाइये । फ्रिन्ज का लम्बवत विस्थापन (lateral shift) किस प्रकार दूर किया जाता है, यह भी चित्र बनाकर समझाइये ।

(16) माइकलसन इन्टरफेरोमीटर का प्रकाशीय चित्र (Optical diagram) बनाइये । इसके द्वारा वृत्तीय फ्रिन्ज बनने का स्पष्टीकरण करिये ।

(17) माइकलसन इन्टरफेरोमीटर की सहायता से प्रयुक्त प्रकाश की तरंग-दैर्ध्य किस प्रकार ज्ञात की जा सकती है ? इसमें और बाइ-प्रिज्म के प्रयोग में किसमें यथार्थता (accuracy) अधिक होगी ? स्पष्ट करिये ।

इसके एक प्रयोग में वृत्तीय फ्रिन्ज प्राप्त की गई । अब दर्पण M_2 को प्लेट P_1 की ओर धीरे धीरे सरकाते हुए केन्द्र में विलुप्त होने वाली फ्रिन्जों की संख्या गिनी गई । इस प्रकार 100 फ्रिन्ज विलुप्त करने के लिये दर्पण कितना सरकाया गया होगा ?

उत्तर : 0·00299 सेमी०

(18) निम्न दो कम्पनों के परिणामी कम्पन का आयाम ज्ञात करिये और उसके लिए समीकरण लिखिये।

$y_1 = 4 \sin (20 \pi t)$

$y_2 = 6 \sin (20\pi t + \pi/2)$

उत्तर : आयाम $= \sqrt{52} = 7 \cdot 21$।

समीकरण $y = \sqrt{52} \sin (20\pi t + 56 \cdot 4^\circ$

(19) निम्न दो कम्पनो के व्यतिकरण के कारण बनने वाले विस्पन्दों की आवृत्ति क्या होगी ?

$y_1 = 10 \sin 400\pi t$

$y_2 = 12 \sin 406 \pi t$ उत्तर : 3 प्रति सैकण्ड

(20) एक स्वरित्र 'A' की आवृत्ति 256 कम्पन/सैकण्ड है। इसको एक अन्य स्वरित्र 'B' के साथ बजाने पर 4 विस्पन्द प्रति सैकण्ड सुने जाते हैं। जब 'B' पर कुछ मोम लगा दिया जाता है, तो विस्पन्दो की सख्या 6 प्रति सैकण्ड हो जाती है। मोम की मात्रा कम करने पर पुनः विस्पन्दो की सख्या 4 प्रति सैकण्ड हो जाती है। 'B' की आवृत्ति ज्ञात करो। (राजस्थान वि० वि० 1968)

उत्तर 260 प्रति सैकण्ड

(21) समान व्यास की दो आर्गन नलियों की लम्बाई क्रमश 2.5 फीट और 5·2 फीट है। इनमे प्रथम एक सिरे पर खुली हुई है और द्वितीय दोनों सिरों पर। यदि दोनों को एक साथ ध्वनित किया जाय तो चार विस्पन्द प्रति सैकण्ड सुनाई देते हैं। ध्वनि वेग ज्ञात करो। (राजस्थान वि० वि० 1971)

(22) 56 स्वरित्र द्विभुज एक श्रेणी-क्रम मे इस प्रकार रखे गये हैं कि प्रत्येक स्वरित्र अपने से पहले स्वरित्र के साथ 4 विस्पन्द बनाता है। अन्तिम स्वरित्र की आवृत्ति प्रथम स्वरित्र की आवृत्ति की तिगुनी है। प्रथम स्वरित्र की आवृत्ति ज्ञात करो। [(राजस्थान वि० वि० 1972) उत्तर · 110 कम्पन/सैकण्ड]

(23) निम्न तरंग समीकरण की सहायता से v, ν और λ ज्ञात करिये।

$$y = 4 \sin 200\, \pi \left(t - \frac{x}{33500} \right)$$

उत्तर · v=33500 सेमी०/सैकण्ड

ν=100 कम्पन/सैकण्ड

λ=335 सेमी०

(24) बाइ-प्रिज्म के प्रयोग मे जब नेत्रिका की स्लिट से दूरी (D) 50 सेमी० हैं, तो फिन्ज-चौड़ाई 0·032 सेमी० आती है। सब व्यवस्था उसी प्रकार रखते हुए यदि नेत्रिका को 75 सेमी० दूर रखा जाय तो फिन्ज-चौड़ाई क्या होगी ?

यदि दोनों आभासी स्रोतों के बीच की दूरी (2d) 0·092 सेमी० हों तो तरंग दैर्घ्य की गणना करो। [उत्तर 0·048 सेमी०; $\lambda = 5890 \times 10^{-8}$ सेमी० लगभग]

(25) एक बाइ-प्रिज्म का प्रिज्म कोण 1/2 डिग्री है और उसके पदार्थ का अपवर्तनांक 1·52 है। यदि स्लिट से बाइ-प्रिज्म की दूरी 8 सेमी० हो और बाइ-प्रिज्म से पर्दे की 72 सेमी० हो तो फ्रिन्ज चौड़ाई की गणना करो। प्रकाश का तरंग दैर्घ्य=5890 A°। [उत्तर 0·0648 सेमी०]

(26) एक बाइ-प्रिज्म के द्वारा बने हुए फ्रिन्ज माइक्रोस्कोप की सहायता से देखे जाते हैं जिसका फोकस-तल स्लिट से 100 सेमी० दूरी पर है। बाइ प्रिज्म और माइक्रोस्कोप के बीच उत्तल लैन्स रखने पर दो स्थितियों में स्रोतों के प्रतिबिम्ब बनते हैं जिनकी दूरियाँ 0·405 सेमी० और 0·29 सेमी० आती हैं। यदि प्रकाश का तरंग दैर्घ्य 5890 A° हो तो फ्रिन्ज चौड़ाई ज्ञात करो।

संकेत : $2d = \sqrt{d_1 d_2} = \sqrt{0 \cdot 405 \times 0 \cdot 29}$

$$\beta = \frac{D\lambda}{2d} = \frac{100 \times 5890 \times 10^{-8}}{\sqrt{0 \cdot 405 \times 0 \cdot 29}}$$

[उत्तर β=0·017 सेमी० लगभग]

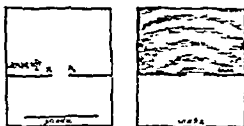
11

विवर्त्तन
(Diffraction)

सभी प्रकार की तरंगें उस व्यवहार का प्रदर्शन करती हैं जिसको विवर्त्तन का नाम दिया गया है। तरंगों में विभिन्न प्रभाव देखने के लिये पानी में उत्पन्न हुई तरंगें बहुत ही उपयुक्त हैं जिनमें कि ये प्रभाव आसानी से मात्र आँखों द्वारा देखे जा सकते हैं, अन्य किसी उपकरण की सहायता की आवश्यकता नहीं होती। अतः पहले हम विवर्त्तन को समझने के लिये पानी की तरंगों के साथ प्रयोग कर सकते हैं।

11·1. पानी की तरंगों में विवर्त्तन—

माना कि हम एक तरंग ताल (ripple tank) में एक सीधा तरंग उत्पादक प्रयुक्त कर सीधी तरंगें (straight or plane waves) उत्पन्न करते हैं और तरंग

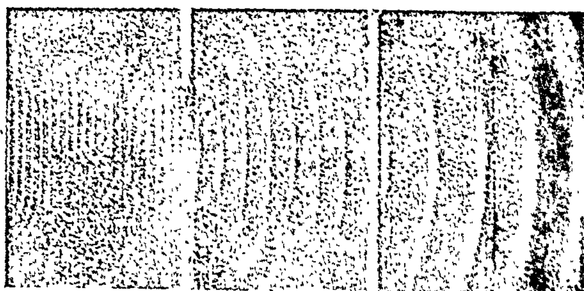


चित्र—11·1

उत्पादक के सामने कुछ दूरी पर दो सीधे रोधक (barrier) उसके समान्तर रख देते हैं जिससे कि उनके बीच कुछ रिक्त स्थान रह जाता है। देखिये चित्र 11·1 (अ)।

उपर्युक्त व्यवस्था में तरंगें उत्पन्न कर देखने पर चित्र 11·1 (ब) के अनुसार तरंगें दिखाई पड़ेंगी, जिसमें दोनों रोधकों के आगे का भाग प्रदर्शित किया गया है। हम देखते हैं कि तरंगों का सामने का भाग लगभग सीधा ही है, परन्तु उसके दोनों ओर तरंगें वृत्ताकार दिखाई देती हैं जैसे कि रोधक के सिरों B_1 और B_2 से वृत्ताकार तरंगें प्रसारित हो रही हों इस प्रकार हम देखते हैं कि रिक्त स्थान B_1B_2 से से गुजरने से बाद तरंग पृष्ठ पूर्णतः अपनी मूल दिशा में अग्रसर नहीं होता, वरन् उसके दोनों किनारों के अंश झुक जाते हैं और वहाँ तरंग की दिशा मूल दिशा से मुड़ जाती है। यही विवर्त्तन है।

यदि रिक्त स्थान B_1B_2 बढ़ाया जाय यह मुड़ने का प्रभाव कम होता है इसी प्रकार यदि तरंगों की तरंग दैर्ध्य कम किया जाय तो भी तरंगों के मुड़ने का प्रभाव कम होता है। चित्र 11·2 में तरंगदैर्ध्य क्रमशः कम करने पर पानी की तरंगों में विवर्त्तन प्रभाव का कम होना प्रदर्शित किया गया है। तरंग के बीच की दूरी (चम-



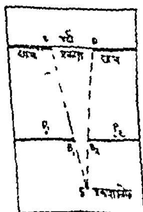
चित्र—11·2

कीली पट्टियों की दूरी) से किया जा सकता है। 11·2 A में तरंग दैर्ध्य लगभग B_1B_2 की चौड़ाई (d) का $\frac{6}{10}$ भाग के बराबर है, चित्र B में 3d/10 और चित्र C में d/10 है। चित्र से यह स्पष्ट है कि विवर्त्तन का प्रभाव तरंग दैर्ध्य (λ) के कम होने से कम होता है और द्वारक (aperture) B_1B_2 के बढ़ने से भी कम होता है। वस्तुतः विवर्त्तन के प्रभाव दोनों के अनुपात अर्थात λ/d, पर निर्भर करते हैं।

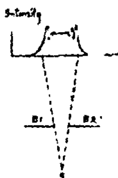
11·2. प्रकाश का विवर्त्तन

सामान्यतः प्रकाश तरंगों के अभिगमन में उपर्युक्त प्रकार का व्यवहार दृष्टिगत नहीं होता, वरन् हम यह मानते रहे हैं कि प्रकाश किरणें सीधी होती हैं; प्रकाश सीधी रेखाओं मे चलता है और बाधाओं (obstacles) की छाया बनाता है। ज्यामितीय प्रकाशिकी (geometrical optics), प्रकाश के अपवर्तन और परावर्तन के नियम आदि सब मूल रूप से इसी बात पर आधारित हैं। तब क्या प्रकाश में

विवर्तन प्रभाव उत्पन्न नहीं होते ? इसका उत्तर यही है कि सामान्य परिस्थितियों में (जब बाधाओं और द्वारकों का आकार और प्रकाश स्रोत का आकार बड़ा होता है) विवर्तन प्रभाव दृष्टिगत नहीं होते और चित्र 11·3 (अ) के अनुसार स्पष्ट छाया बनती है। परन्तु उपयुक्त परिस्थितियों में प्रकाश का विवर्तन होता है और उसका प्रायोगिक प्रदर्शन किया जा सकता है इस दृष्टि से ज्यामितीय प्रकाशिकी अथवा प्रकाश किरण की धारणा (ray optics) सामान्य अवस्थाओं में घटनाओं की व्याख्या करने की एक स्थूल विधि (Approximate method) ही



(a)



(b)

चित्र—11·3

समझी जानी चाहिये। इन धारणाओं के अनुसार ही चित्र 11·3 (अ) में द्वारक B_1 B_2 की स्पष्ट छाया b_1b_2 बनना चाहिए और इसके दोनों ओर एक समान अंधकार होना चाहिए। परन्तु जब प्रकाश स्रोत एक बारीक रेखाछिद्र हो, और उसके सामने कम चौड़ाई और तीखी किनारों वाला समान्तर द्वारक (parallel rectengular aperture) हो तब चित्र 11·3 (अ) के अनुसार सुस्पष्ट छाया नहीं बनती वरन् छाया के किनारों पर कुछ दूरी तक प्रकाश की तीव्रता धीरे धीरे कम होकर लुप्त होती है और प्रकाशित क्षेत्र में प्रकाश तीव्रता एक समान न होकर, किनारों के पास, परिवर्तित होती है ; चमकीले और अपेक्षाकृत काले फ्रिन्ज बनते हैं चित्र 11 3 (ब) में प्रकाश की तीव्रता का परिवर्तन वक्र के द्वारा प्रदर्शित किया गया है। CD द्वारक की ज्यामितीय छाया है। इस प्रकार की घटना जब प्रकाश का वितरण ज्यामितीय प्रकाशिकी की अपेक्षाओं के अनुसार नहीं होता विवर्तन कहलाती है हम यह भी कह सकते हैं कि बाधा के किनारों पर प्रकाश का मुड़ना विवर्तन है। इसी अध्याय में आगे चलकर हम एक अन्य प्रकार से भी विवर्तन को परिभाषित करने का प्रयास करेंगे।

11·3. प्रकाश व ध्वनि तरंगों में विवर्त्तन का तुलनात्मक अध्ययन

ध्वनि में विवर्त्तन के प्रभाव सामान्य परिस्थियों में तथा बहुत आसानी से अनुभव किये जा सकते हैं। सामान्य अनुभव से हम जानते हैं कि दीवार के एक ओर की ध्वनि दूसरी ओर सुनाई देती है अथवा कमरे के अन्दर की ध्वनि केवल खुले हुए दरवाजे की सीध में ही नहीं, वरन् उसके दोनों ओर भी सुनाई देती है। यदि चित्र 11·3 (अ) में S पर एक ध्वनि स्रोत हो, तो बाधक पट्टियों के दोनों ओर काफी दूरी तक (उदाहरणार्थ विन्दु P_1 और P_2 तक) भी ध्वनि सुनाई देगी। प्रकाश के विवर्त्तन का प्रभाव इतनी दूरी तक नहीं होता और विवर्त्तन होता भी विशिष्ट परिस्थितियों से ही है। इस प्रकार हमदेखते हैं कि ध्वनि और प्रकाश दोनों तरंग रूप होने पर भी उनके विवर्त्तन में बहुत अन्तर है।

इसका कारण समझना कठिन नहीं है। चित्र 11 2 के द्वारा हम देख चुके हैं कि विवर्त्तन प्रभाव λ/d पर निर्भर करते हैं। प्रकाश तरंगों की तरंग दैर्ध्य बहुत कम (10^{-5} से० मी० क्रम की) होने के कारण ही सामान्य आकार के बाधक या द्वारक विवर्त्तन प्रभाव उत्पन्न नहीं कर पाते। जब कि ध्वनि तरंगों की तरंग दैर्ध्य वायु में सामान्यत: 10 सेमी० से 100 सेमी० के क्रम की होती है। इसलिये लगभग एक ही आकार के बाधक होने पर प्रकाश का विवर्त्तन 10^{-6} गुना कम होना स्वाभाविक ही है इसी कारण सामान्यत: प्रकाश के सीधी रेखा में गमन करने की धारणा मान्य है।

अत: प्रकाश का विवर्त्तन प्राप्त करने के लिये निम्न प्रतिबन्ध आवश्यक है :--

(1) स्रोत एक बारीक रेखा छिद्र या विन्दु स्रोत हो। अन्यथा वृहत स्रोत होने पर वह कई बारीक स्रोतों के तुल्य होगा और उनके विवर्त्तन प्रभावों का अतिव्यापन हो जाने के कारण ये प्रभाव दृष्टिगत नहीं होंगे।

(2) बाधक (Obstacle) या द्वारक (aperture) का आकार छोटा होना चाहिए जैसा कि पहले ही स्पष्ट किया जा चुका है।

(3) बाधक या द्वारक के किनारे बारीक होने चाहिए, अन्यथा मोटी किनार, कई बारीक किनारों के तुल्य होगी और उनके अलग अलग विवर्त्तन प्रभावों का अतिव्यापन होगा।

11·4. प्रकाश का विवर्त्तन प्रदर्शित करने के कुछ सरल उदाहरण

(i) एक बारीक कपड़े के रूमाल में से कुछ दूरी पर स्थित बारीक बिन्दु स्रोत की ओर देखिये (बिन्दु स्रोत के लिये एक बारीक छिद्र को सोडियम लैम्प से प्रकाशित किया जा सकता है)। बारीक कपड़े में आड़े और खड़े बारीक धागे होने के कारण कई बारीक छिद्र निशिचित क्रम में होते हैं, जिनमें से विवर्त्तन के कारण कई बिन्दु स्रोत दिखाई देते हैं। ये परस्पर लम्बवत रेखाओं पर स्थित होते हैं और इनमें प्रकाश तीव्रता कम होती जाती है। यदि रूमाल को देखने की अक्ष के परित:

घुमाया जाय तो उपर्युक्त प्रकाशित बिन्दुओं का ढांचा (Pattern) भी घूमता है तथा स्रोत से रूमाल की दूरी बढ़ाई जाय, तो प्रकाशित बिन्दुओं के बीच दूरी भी बढ़ती है।

(ii) एक काली की हुई कांच की प्लेट पर रेजर ब्लेड से बारीक रेखा बनायें, यह एक बारीक द्वारक का कार्य करती है। आंख को इसके बिल्कुल पास रखकर इसमें से कुछ दूरी पर स्थित एक लैम्प की ओर देखें जिसका तल सीधा, और उपर्युक्त द्वारक के समान्तर हो। तब बीच में अधिकतम तीव्रता और उसके दोनों ओर क्रमशः घटती हुई तीव्रता के तन्तु दिखलाई देंगे। लैम्प से अपनी दूरी बढ़ने पर इन तन्तुओं की आपसी दूरी भी बढ़ती है।

(iii) चित्र 18 3 (ब) में किनार C और D के आस पास जिस प्रकार का तीव्रता का वितरण दिखाया गया है, वह भी प्रयोगशाला में प्राप्त किया जा सकता है। इस हेतु हम एक बारीक रेखाछिद्र को सोडियम लैम्प से प्रकाशित करते हैं और उससे कुछ दूरी पर (लगभग 1 मीटर) रेजर ब्लेड की किनार रखते हैं और रेजर ब्लेड से आगे कुछ दूरी पर एक पर्दे पर या एक नेत्रिका के द्वारा विवर्तन-प्रभाव देखते हैं।

11·5. फ्रेजनल के अर्द्ध-आवर्तन-काल जोन (Half-Period Zones)

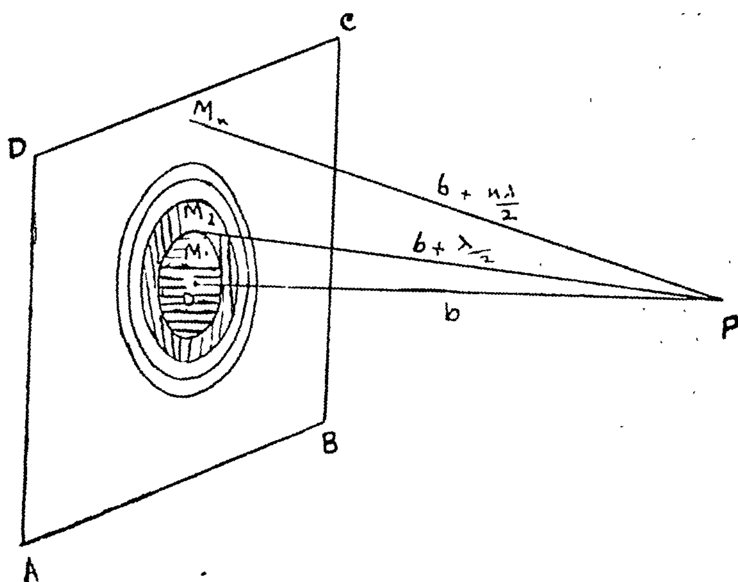
विभिन्न प्रकार के विवर्तन प्रभावों की सैद्धान्तिक व्याख्या फ्रेजनल के अर्द्ध-आवर्तन-काल जोन की रचना के द्वारा की। इस विधि में एक दिये हुए तरंग पृष्ठ को अथवा तरंग गति के सम्बद्ध किसी पृष्ठ को ऐसे क्षेत्रों में बांटा जाता है जिनसे निकलने वाले द्वितीयक तरंगांश गतव्य बिन्दु पर अर्द्ध आवर्तन काल $\left(\frac{T}{2}\right)$ के अन्तर से पहुंचते हैं।

इस विधि को समझाने के लिये सर्वप्रथम हम एक समतल तरंग पृष्ठ ABCD पर विचार करते हैं; चित्र 11·4 जब तरंग पृष्ठ किसी कारण से सीमित हो जाय (लघु आकार के द्वारक के कारण) तब उसके सामने किसी बिन्दु पर क्या प्रकाशीय प्रभाव होगा ? इसकी गणना के लिए अर्थात विवर्तन के प्रभाव ज्ञात करने के लिये ही फ्रेजनल ने यह विधि प्रयुक्त की। बिन्दु P से तरंग पृष्ठ पर अभिलम्ब PO खीचिये, माना दूरी PO=b अब तरंग पृष्ठ में बिन्दु M_1, M_2 M_n इस प्रकार लिये कि—

$$PM_1 = b + \frac{\lambda}{2},\ PM_2 = b + \frac{2\lambda}{2}, \ldots\ldots PM_n = b + \frac{n\lambda}{2}$$

इसके बाद O को केन्द्र लेकर और क्रमशः अर्द्धव्यास OM_1, OM_2 .... OM_n के बराबर लेकर वृत्त खींचिये। क्रमिक वृत्तों के बीच

काल जोन कहलाते हैं। क्योंकि किसी भी जोन के किसी भाग से द्वितीयक तरंगे उसके पास के जोन के सम्बन्धित भाग से $\frac{\lambda}{2}$ पथान्तर अथवा $\frac{T}{2}$ कलान्तर से P पर पहुँचती हैं।



चित्र—11·4

किसी भी जोन के बिन्दुओं से प्रारम्भ होने वाले द्वितीयक तरंगांश P बिन्दु पर थोड़े थोड़े कालान्तर से पहुँचेगे और जोन के चरम बिन्दुओं (extreme points) के तरंगांशों में इस कलान्तर का चरम मान $\frac{T}{2}$ होगा अर्थात पथान्तर $\frac{\lambda}{2}$ होगा। परन्तु यह पथान्तर उत्तरोत्तर बिन्दुओं में क्रमशः बढ़ता है, अतः किसी एक जोन का सम्मिलित प्रभाव उसके मध्य बिन्दु से लिया जा सकता है।

स्पष्ट ही जितना किसी जोन का क्षेत्रफल अधिक होगा उतने ही अधिक द्वितीयक तरंगाग्र होंगे अतः उसका प्रभाव उतना ही अधिक होगा। इसके अतिरिक्त किसी जोन के प्रभाव का आयाम PM_n के PO के साथ कोण के कोसाइन (Cosine) पर तथा दूरी के व्युत्क्रम (reciprocal) पर भी निर्भर करता है। तरंग पृष्ठों के लघु क्षेत्र पर ही विचार करते समय हम इन दोनों कारणों की उपेक्षा कर सकते हैं। हम यह भी सिद्ध कर सकते हैं कि विभिन्न जोनों का क्षेत्रफल लगभग एक समान ही होगा।

[क्रमांक n के जोन का क्षेत्रफल

$$S_n = \pi\, OM_n^2 - \pi\, OM_{n-1}^2$$

$$= \pi \left[\left\{ \left(b + \frac{n\lambda}{2}\right)^2 - b^2 \right\} - \left\{ \left(b + \frac{(n-1)\lambda}{2} \right) - b^2 \right\} \right]$$

$$= \pi \left[\left(bn\lambda + \frac{n^2\lambda^2}{4} \right) - \left(b(n-1)\lambda + \frac{(n-1)^2\lambda^2}{4} \right) \right]$$

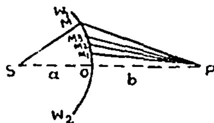
यदि λ^2 के पद छोड़े जा सकें, तो यह क्षेत्रफल होगा :—

$S_n = \pi b \lambda$ जो कि d पर निर्भर नहीं करता]

अतः विभिन्न जोनों के कारण आयाम लगभग एक समान हैं, तथापि यथार्थ में आयाम जोन के क्रम के साथ थोड़ा-थोड़ा घटता है। यदि प्रथम, द्वितीय,''' आदि जोन के आयाम $R_1, R_2 .. R_n$ से व्यक्त किये जाँय, तो क्रमशः $\lambda/2$ पथान्तर के कारण P बिन्दु पर परिणमित प्रभाव होगा--

$$R = R_1 - R_2 + R_3 - R_4 + ... \infty \qquad \cdots(11 \cdot 1)$$

जब पूरा तरंग पृष्ठ प्रभावी हो, अन्यथा R_n तक इसी प्रकार गोलाकार तरंग पृष्ठ के लिये भी अर्द्ध आवर्तनकाल जोन बनाये जा सकते हैं। चित्र 11·5 में दिखाया गया है। S बिन्दु स्रोत है जिससे गोलाकार तरंग प्रसारित होती हैं। W_1 W_2 एक गोलाकार तरंग पृष्ठ है। P बिन्दु पर प्रभाव ज्ञात करना है। PS रेखा बनाओ, यह तरंग पृष्ठ को O बिन्दु पर काटती है। P की अपेक्षा से O तरंग पृष्ठ का ध्रुव (Pole) कहलाता है।



चित्र—11·5

अब तरंग पृष्ठ पर $M_1, M_2 ... M_n$ बिन्दु इस प्रकार लिये कि

$$M_nP - OP = n\lambda/2 \qquad \cdots(11 \cdot 2)$$

$$n = 1, 2, \text{ आदि}$$

अब यदि चित्र को SP अक्ष पर घुमाया जाय, तो बिन्दु $M_1, M_2,$ आदि वृत्त बनायेंगे। क्रमिक वृत्तों के बीच के क्षेत्र ही अर्द्धआवर्तनकाल जोन हैं। इनके लिये भी हम सिद्ध कर सकते हैं कि विभिन्न क्रम के जोन का क्षेत्रफल लगभग एक समान होता है। अतः गोलाकार तरंग पृष्ठ का परिणमित प्रभाव भी समीकरण (11·1) के समान ही लिखा जा सकता है।

P बिन्दु पर परिणमित प्रभाव—

जब काफी अधिक संख्या में जोन P पर प्रभावी हो, तब परिणमित प्रभाव लगभग प्रथम जोन के प्रभाव के आधे के बराबर होगा। परिणमित आयाम R को समीकरण (11·1) के द्वारा दो प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$R = R_1/2 + (R_1/2 - R_2 + R_3/2) + (R_3/2 - R_4 + R_5/2) + \cdots \quad (11{\cdot}3)$$

अथवा $$R = (R_1 - R_2/2) - (R_2/2 - R_3 + R_4/2) + (R_4/2 - R_5 + R_6/2) + \cdots \quad (11{\cdot}4)$$

अब यदि आयाम R_1...आदि इस प्रकार हों कि प्रत्येक अपने आसपास के दोनों आयामों के मध्यमान से अधिक हो, तो तीन अंकों के कोष्ठक की राशियाँ ऋणात्मक होंगी। अत:

$$R < R_1/2 \text{ तथा } R > (R_1 - R_2/2)$$

इसके बजाय यदि आयाम R_1...आदि इस प्रकार हों कि प्रत्येक अपने आसपास के दोनों आयामों के मध्यमान से कम हो, तब तीन अंकों के कोष्ठक की राशि धनात्मक होगी। अतः

$$R > R_1/2 \text{ तथा } R < (R_1 - R_2/2)$$

दोनों ही अवस्थाओ में R का मान $R_1/2$ और $(R_1 - R_2/2)$ की सीमाओं में होगा और क्योंकि R_2 भी लगभग R_1 के बराबर ही है, **अत: P पर परिणमित आयाम लगभग $R_1/2$ ही होगा।**

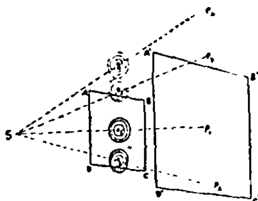
बेलनाकार तरंग पृष्ठ भी इस प्रकार जोन बनाये जा सकते हैं।

11·6 प्रकाश के ऋजुरेखीय गमन का स्पष्टीकरण

अर्द्ध आवर्त्तकाल जोन की विधि से फ्रेज्नल ने सैद्धान्ति रूप से सिद्ध किया कि प्रकाश का गमन लगभग ऋजुरेखीय होगा। चित्र 11·5 में हमने एक समतल तरंग पृष्ठ दिखाया है अत: ज्यामितीय प्रकाशिकी के अनुसार किरणें OP के समान्तर बायीं ओर से दायीं ओर को होंगी। अब यदि तरंग पृष्ठ के ध्रुव O के सामने **कोई छोटी अपारदर्शक वस्तु रख दी जाय, तो वह भी प्रारम्भ के कई 'जोन' ढक लेगी** (क्योंकि जोन का क्षेत्रफल जो चित्र में काफी बड़ा दिखाया गया है, वास्तव में बहुत कम होता है, देखिये उदाहरण (11·1)। अत: सामने पर्दे पर P बिन्दु पर प्रकाश तीव्रता अत्यन्त कम होगी, क्योंकि यदि प्रथम 50 या 100 जोन भी ढक जाँय, तो बाकी उच्च क्रम के जोनों के कारण आयाम लगभग बराबर तथा परस्पर विपरीत कला में होने के कारण परिणमित आयाम बहुत कम होगा और वस्तु की "ज्यामितीय छाया" के क्षेत्र में प्रकाश तीव्रता अत्यन्त कम होगी। इस प्रकार सामान्य आकार की वस्तुओं के लिये प्रकाश के लिये ऋजुरेखीय गमन के कारण छाया बनना स्पष्ट होता है। परन्तु यदि वस्तु बहुत छोटे आकार की हो जिससे कि प्रारम्भ के 2,5 जोन ही ढके, तब छाया के क्षेत्र में भी प्रकाश की तीव्रता पर्याप्त होगी। **यही विवर्त्तन है।**

इसी प्रकार एक बड़े द्वारक में से गुजरने वाले प्रकाश का पर्दे पर किस प्रकार विस्तार होगा, इस पर भी विचार किया जा सकता है। माना कि S एक बिन्दु

स्रोत है और ABCD एक आयताकार द्वारक है। इसकी ज्यामितीय छाया A'B'C'D' है जिसमें लगभग एक समान प्रकाश तीव्रता होना चाहिये और इसके बाहर प्रकाश तीव्रता शून्य होना चाहिए, चित्र 11·6। हम फ्रेनल जोन विधि से प्रकाश तीव्रता का वितरण चार बिन्दुओं P_1, P_2, P_3 और P_4 पर ज्ञात करते हैं। P_1 बिन्दु की अपेक्षा ध्रुव O_1 होगा, स्पष्ट ही इसके चारों ओर बनाये गये जोन सभी P_1 पर प्रभावी होंगे अतः वहाँ पर परिणमित आयाम होगा $A_1 = 1/2R$ लगभग



चित्र—11 6

अत. तीव्रता $I_1 \propto \frac{1}{2}R_1^2$ अब छाया के किनारे के पास के बिन्दु P_2 की अपेक्षा ध्रुव O_2 होगा, चित्र से स्पष्ट है कि कई जोनों का एक तरफ का भाग CD द्वारा काट दिया जाता है और प्रभावी नहीं होता। P_2 पर प्रकाश तीव्रता ज्ञात करने के लिये हम जोनों के ऊपरी अर्द्ध भाग और नीचे के अर्द्ध भागों पर विचार कर सकते हैं। ऊपरी अर्द्ध भाग सब प्रभावी हैं अत उनका परिणमित आयाम होगा—

$$A'_2 = \frac{1}{2}(R_1 - R_2 + R_3 \cdots \infty) = \frac{1}{4}R_1$$

नीचे के अर्द्ध भागों का परिणमित आयाम ज्ञात करने के लिये माना m क्रम के जोन तक प्रभावी हैं, उसके बाद कट गये हैं। अत

$$A''_2 = \frac{1}{2}(R_1 - R_2 + R_3 \cdots \pm R_n)$$

$$= \frac{1}{2}[(R_1 - R_2 + \cdots \infty) - (\mp R_{m+1} \pm R_{m+2} \cdots \infty)]$$

इसमें + चिन्ह जब m विषम (odd) हो और − चिन्ह जब सम (even) हो। स्पष्ट ही —

$$A''_2 = \frac{1}{4}(R_1 \pm R_{m+1})$$

अत P_2 पर कुल आयाम A_2 होगा —

$$A_2 = \frac{1}{4}R_1 + \frac{1}{4}(R_1 \pm R_{m+1})$$

जब $m=0$, $A=\frac{1}{4}R_1$ तथा $I=I_1/4$

जब $m=1$, $A=\frac{3}{4}R_1$ तथा $I=9I_1/4$

जब $m=2$, $A=\frac{1}{4}R_1$ तथा $I=I_1/4$

इस प्रकार P_2 को P_1 की ओर ले जाने पर प्रकाश तीव्रता एकान्तर से बढ़ती और कम होती हैं। जब P_2 बिल्कुल किनारे पर होता है ($m=0$) तब तीव्रता P_1 पर तीव्रता का एक चौथाई होती है ($I_1/4$)

किनारे से कुछ दूर का बिन्दु P_3 लेने पर ध्रुव O_3 होगा। इस स्थिति जोनों का एक अर्द्ध भाग तो पूरा ही कट जाता है, दूसरे अर्द्ध भाग में से कुछ पूर्ण रूप से प्रभावी हैं, कुछ आंशिक रूप से। इस स्थिति में भी हम आसानी से सिद्ध कर सकते हैं कि तीव्रता काफी कम होगी और जैसे-जैसे बिन्दु P_3 किनारे से दूर लेंगे, तीव्रता कम होती जायगी। P_4 जैसे बिन्दु के लिये प्रारम्भ के काफी जोन कट जायेंगे अतः तीव्रता नगण्य होगी। इस प्रकार किनारों के पास के कुछ भाग (जैसे P_2 और P_3) जो कि बहुत सूक्ष्म होगा, के अतिरिक्त प्रकाश तीव्रता छाया के क्षेत्र में नगण्य रहती है। अतः (λ कम होने के कारण) ऋजुरेखीय गमन का उल्लंघन अत्यन्त छोटे क्षेत्र तक सीमित है और सामान्यतः इसको मान्य समझा जाना चाहिए।

11·7. एक लघु वृत्तीय चकत्ती (disc) की छाया

यदि एक बिन्दु-स्रोत S के सामने लघु आकार की वृत्तीय चकत्ती रखी जाय, तब कुछ दूरी पर स्थित पर्दे पर किस प्रकार की छाया दिखाई देगी? चित्र 11·7 में AB चकत्ती का काट-क्षेत्र है (चकत्ती कागज के तल के लम्बवत है) और P बिन्दु पर्दे पर उसकी छाया का केन्द्र बताता है। इस व्यवस्था में विवर्तन का प्रभाव ज्ञात करने के लिए हम चकत्ती को छूते हुये गोलीय तरंग पृष्ठ पर फ्रेज्नल जोन बना सकते हैं (या ऊर्ध्वाधर समतल AB में जोन बना सकते हैं) जिनका ध्रुव (Pole) O होगा। चित्र से स्पष्ट है कि चकत्ती इन जोनों में से प्रारम्भ के कुछ जोन ढक लेगी। अतः P बिन्दु पर बाकी आगे के जोनों का प्रभाव पड़ेगा। इसलिये यदि चकत्ती का आकार अधिक न हो और वह केवल थोड़े ही जोन ढकती हो, तो P बिन्दु पर प्रकाश की काफी तीव्रता होगी।

यदि केवल प्रथम जोन ही ढकता है तो P पर आयाम होगा—

$$A_1=R_2-R_3+R_4\ldots\ldots\infty$$

$$=\frac{R_2}{2} \text{ लगभग}$$

अतः तीव्रता $I_1 \propto \dfrac{R_2^2}{4}$

यदि पहले दो जोन ढकतें हैं, तब आयाम



चित्र—11·7

$$A_2 = R_3 - R_4 + R_5 \quad \ldots \infty$$
$$= \frac{R_3}{2} \text{ लगभग}$$

अत: तीव्रता $I_2 \propto \frac{R_3^2}{4}$

यदि पहले m जोन ढकते हैं, तो तीव्रता होगी

$$I \propto \frac{R^2_{m+1}}{4}$$

अत यह स्पष्ट है कि P बिन्दु सदैव चमकीला (bright) होगा, इस प्रकार वृत्तीय चकती की छाया का केन्द्र बिन्दु सदैव चमकीला होगा, जब तक कि चकती काफी बड़े आकार की न हो।

जोन की धारणा से परिचित होने के बाद हम कह सकते हैं कि विवर्तन एक ही तरंग पृष्ठ के विभिन्न बिन्दुओं से चलने वाले द्वितीयक तरंगों (secondary wavelets) के व्यतिकरण का परिणाम है।

उदाहरण 11·1—चित्र 11·4 में यदि OP = 50 से०मी० हो और $\lambda = 6 \times 10^{-5}$ से०मी० हो, तो प्रत्येक जोन का क्षेत्रफल क्या होगा ?

जैसी कि गणना की जा चुकी है, जोन का क्षेत्रफल

$= \pi b\lambda$ लगभग

$= 3·14 \times 50 \times 6 \times 10^{-5}$

$= 0·009526$ वर्ग से०मी॰ उत्तर

ध्यान दें कि जोन का क्षेत्रफल कितना कम है ?

उदाहरण 11·2—चित्र 11·7 में यदि SO = OP = 50 से०मी० और $\lambda = 6 \times 10^{-5}$ से०मी० हो, तो चकती कितने जोन ढकती है ?

चकती का अर्द्धव्यास OA = 0·5 से०मी०

यदि A बिन्दु तक m क्रम का जोन आता है, तो समतल AB में जोन इस प्रकार बनाये जाते हैं कि

$$(SA + AP) - (SO + OP) = \frac{m\lambda}{2}$$

$$SA^2 = (SO^2 + OA^2)$$

$$\therefore \quad SA=(SO^2+OA^2)^{\frac{1}{2}}=SO\left(1+\frac{1}{2}\frac{OA^2}{SO^2}\right) \text{ लगभग}$$

$$=SO+\frac{1}{2}\frac{OA^2}{SO}=50+\frac{1}{2}\frac{0\cdot25}{50}=50+0\cdot00\ 5$$

इसी प्रकार $AP=50+0\cdot0025$

$\therefore$ समीकरण (i) से $50+0\cdot0025+50+0\cdot0025 \quad 50+50=\frac{m\lambda}{2}$

या $\quad 0\cdot005=m\frac{6\times10^{-5}}{2}$

$$\therefore \quad m=\frac{2\times0\cdot005}{6\times10^{-5}}=\frac{2\times0\cdot005\times10^5}{6}$$

$$=\frac{1000}{6}=166 \text{ जोन लगभग;} \qquad \text{उत्तर}$$

प्रश्न

(1) तरंगों के विवर्त्तन का तात्पर्य समझाइये। प्रकाश तरंगों में विवर्त्तन प्रभाव सामान्यतः क्यों नहीं दिखाई पड़ते ?

(2) ध्वनि व प्रकाश तरंगों के विवर्त्तन की तुलना करिये।

(3) अर्द्ध-आवर्त्तन-काल जोन क्या है ? फ्रेज्नल ने किस प्रकार प्रकाश के ऋजुरेखीय गमन का स्पष्टीकरण किया ?

(4) जोन की धारणा की सहायता से सिद्ध कीजिये कि एक लघु वृत्तीय चकत्ती की छाया का केन्द्र सदैव चमकीला होगा।

(5) यदि चकत्ती का अर्द्ध-व्यास 0·3 से०मी० हो, उसकी स्रोत से दूरी 40 से०मी० हो तथा पर्दे से दूरी 60 से०मी० हो, तो गणना करिये कि चकत्ती कितने जोन ढक लेगी ? $\lambda \quad 6\times10^{-5}$ से०मी०। [उत्तर : लगभग 62 जोन

12 प्रकाश का ध्रुवण

12·1. प्रकाश का ध्रुवण

अध्याय 9 में प्रकाश की प्रकृति के विषय में हमने पढ़ा है कि प्रकाश को विद्युत चुम्बकीय तरंगो के रूप में माना जाता है। ये अनुप्रस्थ तरंगें हैं जिनमें विद्युत क्षेत्र वेक्टर और चुम्बकीय क्षेत्र वेक्टर परस्पर लम्बवत तथा तरंग-गति की दिशा के लम्बवत होते हैं। परस्परानुसार विद्युत क्षेत्र वेक्टर द्वारा प्रकाश तरंगों को निरूपित किया जाता है।

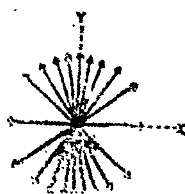
अधिकाश अनुप्रस्थ तरंगो मे (जैसे सोनोमीटर के तार में, अथवा जल में) कम्पन की कोई एक निश्चित दिशा रहती है, अत तरंग गति की दिशा की अपेक्षा इनमें असममिति (asymmetry) रहती है (तरंग गति की दिशा के लम्बवत किसी एक दिशा में ही कम्पन होते हैं, अन्य दिशाओं में नहीं)। तथापि सामान्य प्रकाश में ऐसी कोई असममिति नहीं पायी जाती। इसका तात्पर्य यह है कि तरंग-गति की दिशा के लम्ब रूप सभी दिशाओं मे विद्युत वैक्टर विद्यमान होता है। उदाहरण के लिये चित्र 12·1 (अ) मे यदि तरंग गति की दिशा कागज के तल के लम्बवत है, तो विद्युत वैक्टर कागज के तल में होगा और सामान्य प्रकाश में यह कागज के तल में सभी सम्भव दिशाओं में होगा, तरंग की दिशा O बिन्दु पर कागज के लम्बवत है। जब यह सममिति (symmerty) नष्ट हो जाती है और प्रकाश का विद्युत वेक्टर किसी एक दिशा में ही होता है तब प्रकाश



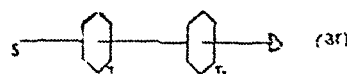


चित्र—21·1

पूर्णतः समतल-ध्रुवित (plane polarised) होता है। जैसे चित्र 12·1 (ब) में। इस प्रकार प्रकाश का ध्रुवण आंशिक भी हो सकता है, जब विद्युत वैक्टर का दिशाओं में वितरण चित्र 22·2 के अनुसार हो, तो उसके दो लम्बवत दिशाओं, x और y में घटक असमान आयेंगे (चित्र 2·2 में y-दिशा में घटक का मान अधिक होगा)। अतः ऐसी स्थिति में भी पूर्ण सममिति नहीं है और न ही किसी दिशा में वैक्टर का घटक शून्य है; इस प्रकार का प्रकाश आंशिक रूप से ध्रुवित (partially plane-polarised) कहलाता है। पूर्ण रूप से ध्रुवित प्रकाश में विद्युत-वैक्टर केवल एक ही दिशा में रह जाता है। प्रकाश का ध्रुवण तथा उसके फलस्वरूप उत्पन्न असममिति किसी भी ध्रुवक (polariser) की सहायता से प्रदर्शित की जा सकती है, उदाहरण के लिये एक टूरमेलीन क्रिस्टल की सहायता से। इस क्रिस्टल में से गुजरने पर प्रकाश समतल ध्रुवित हो जाता है, अतः अब यदि इसको दूसरे क्रिस्टल में से देखा जाय और दूसरे क्रिस्टल को प्रकाश की गति की दिशा के परितः घुमाया जाय, तो प्रकाश की तीव्रता में परिवर्तन होता है। दूसरे क्रिस्टल को प्रथम के समान्तर स्थिति में घुमाना प्रारम्भ करें, तब प्रकाश तीव्रता कम होने लगती है और जब वह प्रथम के लम्बवत स्थिति में (90° घूमकर) आ जाता है, प्रकाश तीव्रता शून्य हो जाती है, चित्र 12·3 (ब)। इसके बाद वापस बढ़ने लगती है और 180° से घूम जाने पर अधिकतम हो जाती है। इसके आगे 90° घुमाने पर (शुरू की स्थिति से 270°) तीव्रता पुनः शून्य हो जाती है तथा एक चक्कर पूरा हो जाने पर (360° घूम जाने पर) पुनः अधिकतम हो जाती हैं। इस प्रकार प्रथम क्रिस्टल T_1 में से निकलने वाला प्रकाश असममिति प्रदर्शित करता है; स्पष्ट ही यह समतल ध्रुवित प्रकाश होता है।



चित्र—12·2





चित्र—12·3

12·2. परावर्तन और अपवर्तन द्वारा समतल ध्रुवित प्रकाश की उत्पत्ति

सामान्य काँच की प्लेट पर प्रकाश आपतित होने पर उसका कुछ अंश परावर्तित होता है, अधिक अंश अपवर्तित होता है (तथा बहुत थोड़ा अंश अवशोषित भी होता है)। यदि इससे परावर्तित प्रकाश का किसी ध्रुवक (जैसे टूरमेलीन) द्वारा अध्ययन किया जाय तो उसको प्रकाश तरंग की गति की दिशा के परितः घुमाने पर उसकी तीव्रता में परिवर्तन होता है; परावर्तित प्रकाश आंशिक-समतल ध्रुवित पाया जाता है। इसी प्रकार अपवर्तित प्रकाश भी आंशिक ध्रुवित पाया जाता है। चित्र 12·4 (अ)।

यदि आपतन कोण परिवर्तित किया जाय, तो परावर्तित किरण में ध्रुवण का अंश भी परिवर्तित होता है। यह पाया गया है कि एक दिये हुए माध्यम के लिए किसी एक विशेष आपतन कोण के लिये परावर्तित किरण पूर्णतः ध्रुवित हो जाती है जैसा कि चित्र 12·4 (ब) में दिखलाया गया है। यह आपतन कोण केवल माध्यम पर निर्भर करता है जिसके तल पर परावर्तन और अपवर्तन की क्रिया हो रही है। इस को **ध्रुवण कोण (Polarising angle)** या **ब्रूस्टर कोण (Breuster's angle)** कहते हैं। इसको चित्र में i_p से प्रदर्शित किया गया है।

ब्रूस्टर ने विभिन्न पदार्थों के लिये ध्रुवण कोण का मान ज्ञात किया तथा उनके अपवर्तनांक और इस कोण में निम्न सम्बन्ध स्थापित किया :—

$$\boxed{\tan i_p = \mu} \qquad (12\cdot4)$$

अर्थात् ध्रुवण कोण का स्पर्शज्या (Tangent) प्रयुक्त प्रकाश के लिये उस माध्यम के अपवर्तनांक के बराबर होता है। यह ब्रूस्टर का नियम कहलाता है।

काँच के लिये $\mu = 1{\cdot}54, \quad i_p = 57^\circ$

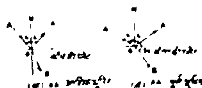
पानी के लिये $\mu = 1{\cdot}33, \quad i_p = 53^\circ$

उपर्युक्त नियम पर विचार किया जाय तो हम परावर्तित किरण और अपवर्तित किरण की दिशाओं के बारे में एक महत्त्वपूर्ण निष्कर्ष पर पहुँचेंगे। ध्रुवण कोण पर परावर्तन होने पर परावर्तित किरण तथा अपवर्तित किरण एक दूसरे के लम्बवत होती हैं जैसा कि चित्र 12·4 (ब) में दिखाया गया है, कोण $A'OB = 90^\circ$

जैसा कि हम जानते हैं अपवर्तन के नियम (स्नेल के नियम) से

$$\mu = \frac{\sin i}{\sin r}$$

परन्तु ध्रुवण कोण के लिए, $\mu = \dfrac{\sin i_p}{\sin r_p}$



चित्र—12·4

तथा ब्रूस्टर के नियम के अनुसार, $\mu = \dfrac{\sin i_p}{\cos i_p}$

अतः $\qquad \sin r_p = \cos i_p$

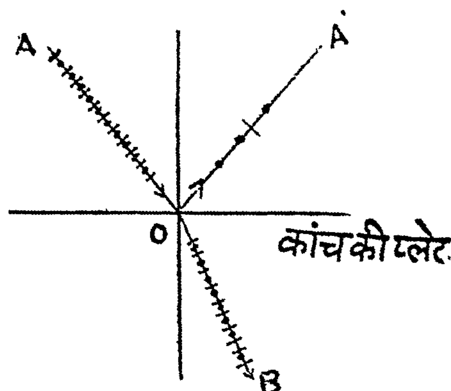
अतः $\qquad r_p = 90 - i_p$

चित्र 12·4 (ब) से स्पष्ट है कि $r_p = (90^\circ - i_p)$ तब ही होता जब कोण $A'OB = 90^\circ$ हो।

यदि आपतित प्रकाश साधारण (Ordinery) है जिसमें सब दिशाओं में विद्युत वेक्टर विद्यमान है। जब परावर्तित प्रकाश आंशिक या पूर्ण ध्रुवित होता, तो

सम्बन्धित अपवर्तित प्रकाश मे भी असममिति होगी, अतः वह भी आंशिक ध्रुवित होगा।

परावर्त्तन द्वारा ध्रुवण का विवेचन—फ्रेज्नल ने उपर्युक्त घटनाओं का सैद्धान्तिक विवेचन किया है। आपतित सामान्य प्रकाश में विद्युत वेक्टर को दो परस्पर लम्बवत घटकों में बांटा जा सकता है; एक आयतन तल में तथा दूसरा उसके लम्बवत तल में। चित्र 12·5 में आयतन तल (Plane of incidence) कागज का तल ही है अतः आपतित किरण AO में उसके लम्बवत छोटी रेखाओं द्वारा आपतन तल में विद्युत वेक्टर प्रदर्शित किया गया है और सुविधा के लिये ग्यारह (eleven) रेखायें ली गई हैं। इसी प्रकार कागज के तल के लम्बवत वेक्टर गोल विन्दुओं द्वारा प्रदर्शित किया गया है जिनकी संख्या भी ग्यारह ही है। यह अनुमान किया जा सकता है दोनों दिशाओं के वेक्टर का परावर्त्तन एक समान नहीं होगा; कागज के तल के लम्बवत वेक्टर तो सदैव एक जैसे ही परावर्तित होने चाहिए (क्योंकि किसी भी आपतन कोण के लिये, ये कागज के तल के लम्बवत ही हैं) परन्तु जो वेक्टर कागज के तल में है वह आपतन कोण बदलने पर माध्यम के तल पर अलग अलग कोण से आपतित होगा, अतः इसका परावर्त्तन एक सा नहीं होगा। अतः परावर्त्तित किरण में कागज के तल के लम्बवत वेक्टर की अधिकता होगी। इस धारणा को परावर्त्तित किरण OA′ में तीन गोल विन्दु व एक रेखा बनाकर व्यक्त किया गया है।



चित्र—12·5

इसका ही परिणाम होगा कि अपवर्तित किरण में रेखायें अधिक (10) और गोल विन्दु (8) कम होंगे, अतः इसमें भी असममिति होगी।

ध्रुवण-कोण पर परावर्त्तन होने पर परावर्त्तित किरण में केवल आपतन-तल

के लम्बवत वेक्टर ही होता है (गोल बिन्दु) अतः वह पूर्ण ध्रुवित होती है तथा अपवर्तित किरण में आपतन-तल के लम्बवत वेक्टर कम होता है, अतः वह आंशिक-ध्रुवित होती है।

पट्टिका पुंज (Pile of plates)—जैसा कि हम जानते हैं एक काँच की प्लेट से बहुत कम परावर्तन होता है, अतः परावर्तित प्रकाश की तीव्रता कम होगी। यदि एक के बाद एक कई प्लेट समान्तर रख दी जाय और प्रकाश ध्रुवण-कोण पर आपतित हो, तो प्रत्येक से उसका थोड़ा थोड़ा अंश परावर्तित होगा। अतः परावर्तित प्रकाश की तीव्रता भी बढ़ जायगी तथा अपवर्तित प्रकाश में आपतन तल के लम्बवत वेक्टर का अंश भी कम होता जायगा। अतः पर्याप्त संख्या में प्लेट लेने पर अपवर्तित प्रकाश भी लगभग पूर्णतः ध्रुवित होगा।

परिभाषायें—

ध्रुवण-तल (Plane of polarisation)—आंशिक अथवा पूर्ण ध्रुवित प्रकाश को काँच की प्लेट पर ध्रुवण-कोण पर परावर्तित कराया जाय तथा आपतन कोण स्थिर (ip) रखते हुए प्लेट को प्रकाश-किरण की अक्ष पर घुमाया जाय, तो आपतन तल परिवर्तित होगा तथा परावर्तित किरणों की तीव्रता परिवर्तित होगी। आपतन का वह तल जिसके लिये ध्रुवित प्रकाश-बण्ड (beam) का अधिकतम परावर्तन होता है, उस ध्रुवित प्रकाश का ध्रुवण-तल कहलाता है। यदि आपतित प्रकाश आंशिक ध्रुवित है, तो उसमें इस तल के लम्बवत विद्युत वेक्टर की अधिकता है तथा यदि पूर्णतः ध्रुवित है तब इसका अर्थ यह है कि विद्युत वेक्टर केवल इस तल के लम्बवत ही हैं, इस तल में विद्युत-वेक्टर का घटक शून्य है।

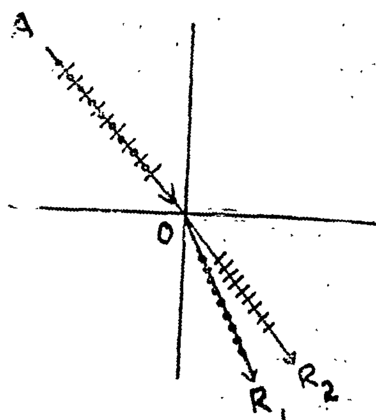
अतः पूर्णतः ध्रुवित प्रकाश में ध्रुवण-तल का आशय उस तल से है जिसमें विद्युत वेक्टर का घटक शून्य हो। कम्पन तल (Plane of vibration)

जिस तल में विद्युत वेक्टर होता है, वह कम्पन तल कहलाता है, स्पष्ट ही यह ध्रुवण तल के लम्बवत होता है।

12·3. द्विअपवर्त्तन द्वारा समतल ध्रुवित प्रकाश की उत्पत्ति : निकोल प्रिज्म

कुछ इस प्रकार के क्रिस्टल पाये जाते हैं जिनमें प्रकाश का सामान्य अपवर्तन नहीं होकर द्विअपवर्तन (double refraction) होता है, अर्थात प्रत्येक आपतित किरण के लिये दो अपवर्तित किरणें बनती हैं। इसके अतिरिक्त इस घटना में—दोनों अपवर्तित किरणें सामान्यतः आयतन तल में नहीं उनके लिये अपवर्तित कोण r_1 और r_2 आयतन कोण i के साथ इस प्रकार परिवर्तित होते हैं कि $\frac{\sin i}{\sin r_1}$ और $\frac{\sin i}{\sin r_2}$ स्थिरांक नहीं रहते

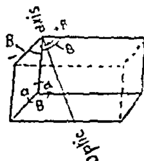
दोनों ही किरणें समतल-ध्रुवित होती है और उनके ध्रुवण-तल परस्पर लम्बवत होते हैं, चित्र 12·6 यह घटना **द्वि-अपवर्त्तन** कहलाती है और जिन क्रिस्टल में यह घटना होती है वे प्रकाशीय रूप से विषमदैशिक (anisotropic) कहलाते है।



चित्र—12·6

इनमें से कुछ क्रिस्टल ऐसे होते हैं जिनमें दो अपवर्त्तित किरणें तो वनती हैं, परन्तु एक अपवर्त्तित किरण अपवर्त्तन के सामान्य नियमों का पालन करती है (अर्थात आपतन तल में ही होती है और sin i/sin r = स्थिरांक (μ) होता है) और दूसरी अपवर्त्तित किरण इन नियमों का पालन नहीं करती। ऐसे क्रिस्टल एक-अक्षीय (uniaxial) कहलाते हैं। जो किरण सामान्य नियमों का पालन करती है वह सामान्य किरण (ordinary ray) कहलाती है तथा दूसरी जो पालन नहीं करती असामान्य किरण (extraordinary ray) कहलाती है। पहले जिन क्रिस्टल के वारे में लिखा गया है (जिनमें दोनों किरणें अपवर्त्तन के नियमों का पालन नहीं करती) वे द्वि-अक्षीय (biaxial) कहलाते हैं। यहाँ हम केवल एक-अक्षीय क्रिस्टल पर विचार करेंगे। सामान्य किरण के लिए sin i/sin r स्थिरांक होता है, इसे हम μ_0 से व्यक्त करते हैं। असामान्य किरण के लिये यह अनुपात क्रिस्टल में किरण की दिशा के साथ वदलता है। **जव क्रिस्टल में किरण एक विशेष दिशा में होती है, तब असामान्य किरण के लिये μ'_e (=sin i/sin r) μ_0 के वरावर होता है, यह दिशा क्रिस्टल की प्रकाशीय-अक्ष (optic axis) कहलाती है।** अर्थात प्रत्येक एक-अक्षीय क्रिस्टल में एक विशेष दिशा ऐसी है, जिसमें दोनों किरणों का वेग एक समान है, अतः इस दिशा में दो अपवर्त्तित किरणें नहीं वनती; द्वि-अपवर्त्तन नहीं होता।

कैलसाइट क्रिस्टल एक अक्षीय द्वि-अपवर्त्तक क्रिस्टल है। इसमें प्रत्येक फलक समांतर चतुर्भुज आकार का होता है जिसमें दो भुजाओं के वीच कोण 78° 13′ और 102° 21′ होते हैं। प्रकाशीय अक्ष ज्ञात करने का तरीका यह है कि क्रिस्टल में दो कोने (Corners) ऐसे हैं जहाँ तीन अधिक कोण मिलते हैं; **ऐसे एक कोने से ऐसी दिशा जो वहाँ की तीनो किनारों (edges) से वरावर कोण पर हो** प्रकाशीय



चित्र—12·7

अक्ष की दिशा है, स्मरण रहे कि यह एक दिशा है, कोई रेखा विशेष नहीं। इस दिशा में दोनों प्रकार की तरंगों का वेग समान होता है। जैसे जैसे किरण की दिशा का प्रकाशीय अक्ष से कोण बढ़ता है μ'_e का मान बदलता है (तथापि यह परिवर्तन प्रकाशीय अक्ष के परितः सममिति में होता है) और प्रकाशीय अक्ष के लम्बवत दिशा में μ'_e का चरम मान होता है। कैलसाइट जैसे ऋण-क्रिस्टल (negative crystal) मे μ'_e का मान कम होता जाता है और प्रकाशीय अक्ष के लम्बवत दिशा मे न्यूनतम, 'μ_e' हो जाता है। क्वार्टज् जैसे धन-क्रिस्टल (Positive crystal) मे μ'_e का मान बढ़ता जाता है और प्रकाशीय-अक्ष के लम्बवत अधिकतम हो जाता है। μ'_e के ये चरम मान 'μ_e' ही असामान्य अपवर्त्तनांक अथवा असामान्य किरण के लिये अपवर्त्तनांक कहलाते हैं। वैज्ञानिक हयगन्स ने दो तरंग-पृष्ठ बनने की धारणा से द्वि-अपवर्तन की व्याख्या की है तथा उपर्युक्त सब बातों को समझाया है।

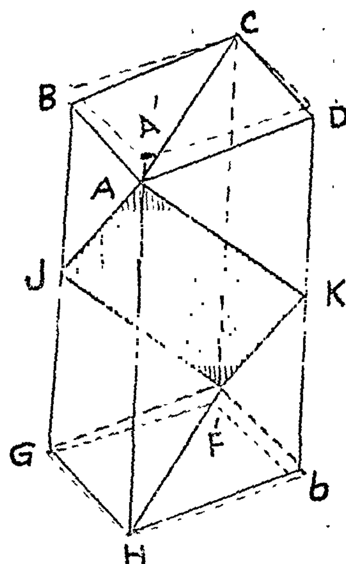
जैसा कि पहले लिखा जा चुका है, सामान्य किरण और असामान्य किरण दोनो ही समतल ध्रुवित होती हैं। अतः द्वि अपवर्त्तन की घटना की सहायता से समतल ध्रुवित प्रकाश प्राप्त किया जा सकता है। परन्तु जब तक ये दोनों किरणें विद्यमान रहेंगी, दोनो के परस्पर लम्बवत दिशा मे ध्रुवित होने के कारण प्रत्येक तल मे विद्युत वैक्टर का कुछ न कुछ घटक होगा और क्रिस्टल मे से गुजरा हुआ प्रकाश समतल ध्रुवित नहीं होगा। इस हेतु प्राकृतिक रूप से प्राप्त केलसाइट क्रिस्टल को एक विशेष ढंग से तैयार कर समतल ध्रुवित प्रकाश उत्पन्न करने योग्य बनाया जा सकता है। इस प्रकार बनाये गये क्रिस्टल को निकाल प्रिज्म कहते हैं।

निकाल प्रिज्म—सर्वप्रथम हम निकाल-प्रिज्म बनाने की विधि का वर्णन करेंगे, उसके बाद उसकी कार्य-विधि का कैलसाइट स्वभावतः जिस प्रकार के क्रिस्टल मे कटता अथवा विभक्त होता है वह चित्र 12·8 में दिखाया गया है इसका नीचे और ऊपर के फलक A'BCD और HGF'E एक जैसे समान्तर चतुर्भुज होते हैं जिनके दोनों कोण निश्चित होते हैं। निकाल बनाने के लिये इसकी भुजाओं का आकार इस प्रकार लिया जाता है—

GH=HE तथा HA'=3 (GH)

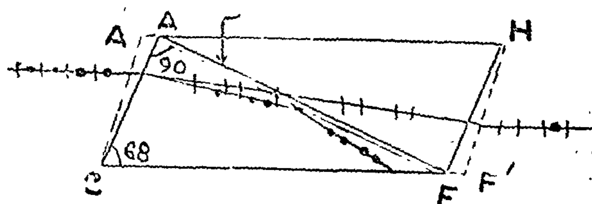
अर्थात ऊँचाई चौड़ाई से तीन गुना ली जाती है इसके दोनों फलकों A'BCD और HGF'E को इस प्रकार तराशा जाता है कि ये चित्र के अनुसार आकार AB CD और HGFE में आ जाय; जो कोण A'CF' तथा A'HF' प्राकृतिक क्रिस्टल

में 71° होते हैं, वे तराशनें के बाद 68° हो जायें। इन दोनों फलकों को फिर भली भाँति पालिश कर प्रकाशीय रूप से समतल वना दिया जाता है। इसके वाद क्रिस्टल



चित्र—12·8

को दो भागों में इस प्रकार काटा जाता है—A विन्दु से लघु कर्ण A C के लम्ववत् अर्थात तल ACFH के लम्ववत् तल द्वारा, जो कि चित्र 12·8 में AJFK (shaded) के द्वारा प्रदर्शित किया गया है। तल ACFH को चित्र 12·9 में अलग से प्रदर्शित



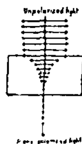
चित्र—12·9

किया गया है जिसमें तल HJFK एक रेखा AF के रूप में व्यक्त हुआ है। यदि हमने ऊँचाई HA = 3GH लिया है, तो तल AJFK दूसरे कोने F (blunt corner) से गुजरेगा। काटने के वाद दोनों कटे हुए फलकों को पालिश कर विल्कुल समतल वना लिया जाता है और फिर केनाडा वाल्साम (Canada Balsam) की पतली परत (एक सी मोटाई की) द्वारा वापस चिपका दिया जाता है।

कार्य विधि—उपर्युक्त वर्णित आकार मे क्रिस्टल तैयार करने पर यदि आपतित किरणें एक लघु कोन (Cone) मे आपतित होती हैं, तो सामान्य अपवर्तित किरण केनेडा-बालसम की परत पर क्रान्तिक कोण से अधिक कोण बनाते हुए आपतित होती है, अतः इस परत के द्वारा उसका पूर्ण आन्तरिक परावर्तन हो जाता है, यही चित्र 12·9 मे प्रदर्शित किया गया है। सोडियम-प्रकाश के लिए μ_o, μ_e तथा μ_c (कनाडा-बालसम के लिए) के मान क्रमश· 1·658, 1·486 और 1·552 हैं, अतः सामान्य किरण के लिए कनाडा बालसाम की परत विरल माध्यम का कार्य करती है। तथा प्रिज्म के दोनो फलको को तराशने और तीन गुना लम्बाई लेने पर सामान्य किरण इस परत पर क्रान्तिक कोण से अधिक कोण पर आपतित होती है जिससे पूर्ण आन्तरिक परावर्त्तन सम्भव होता है। अतः अब दूसरी ओर निर्गत प्रकाश मे केवल असामान्य किरण ही रह जाती है; इस प्रकार समतल ध्रुवित प्रकाश प्राप्त होता है। इसमे विद्युत वैक्टर लघु कर्ण A C के समान्तर होता है।

12·4 पोलेराइड, ध्रुवित प्रकाश के उपयोग

कुछ द्वि-अपवर्त्तक क्रिस्टलों मे द्वि-वर्णता (dichroism) भी पाई जाती है अर्थात् उनमे जो दो अपवर्तित किरणें बनती हैं, जैसे-जैसे वे क्रिस्टल मे से गुजरती हैं, उनमें से एक का अवशोषण अधिक होता है। अतः कुछ मोटाई मे से गुजरने के बाद एक किरण लगभग पूर्णतः अवशोषित हो जाती है और दूसरी ही अवशिष्ट रहती है जो कि समतल ध्रुवित होती है। टूरमेलीन भी इसी प्रकार का क्रिस्टल है। यह क्रिया चित्र 12·10 मे प्रदर्शित की गई है।



चित्र—12 10

इस गुण का उपयोग पर्याप्त आकार के ध्रुवक बनाने में किया गया है जिन्हें पोलेराइड कहते हैं। इस हेतु कुनेन के आइडोसल्फेट (Idosulphate of Quinine) जिसे हरपेथाइट कहते है, के क्रिस्टल प्रयुक्त किये गये हैं जिनमे द्वि-वर्णता का गुण होता है। इसके क्रिस्टल बहुत लघु होते हैं, अतः वृहत आकार का ध्रुवक प्राप्त करने के लिये, ऐसे कई क्रिस्टल उनकी प्रकाशीय अक्ष के समान्तर रखते हुए जमाने पड़ेंगे। इसके लिये एक विधि यह है कि नाइट्रोमेलुलोज मे इन क्रिस्टल के साथ 'पेस्ट' (paste) तैयार किया जाता है। इस पेस्ट को एक बारीक 'स्लिट' मे से निकाला जाता है तथा दूसरी ओर दो पतली कांच की पट्टिकाओ के बीच ग्रहण किया जाता है जहाँ नाइट्रोसेलुलोज के फौरन सूख जाने से वे उसी स्थिति मे बद्ध (fix) हो जाते है। हरपेथाइट का परमाणु लम्बा होता है, इसलिये जो स्लिट के अनुदिश होते [illegible] परमाणु निकल पाते हैं और इस प्रकार दोनो कांच की पट्टिकाओं के बी[illegible] [illegible]न्तर जम जातें हैं और फिर अव्यवस्थित नही हो सकते। यही पोलेर

अन्य प्रकार के पोलेराइड भी हो सकते हैं; जैसे "पोली विनाइल एल्कोहल" की 'फिल्म' को तनन (streching) द्वारा, उसके परमाणुओं की लम्बी अक्ष तनाव की दिशा में हो जाती है। इसके बाद इस फिल्म में कुछ आयोडीन का मिश्रण कर देने पर यह एक विशेष तल के कम्पनों का अवशोषण कर लेता है और उसके लम्बवत तल के कम्पनों को निकलने देता है। यह Hपोलेराइड कहलाता है।

ध्रुवित प्रकाश के उपयोग

समतल ध्रुवित प्रकाश का एक उपयोग त्रिविमीय फिल्मों के प्रदर्शन हेतु किया गया है। इस हेतु एक फिल्म के बजाय दो फिल्में तैयार की जाती है जो दो कैमरा को दो भिन्न स्थिति में रखकर (जैसे दोनों आँखों से थोड़े भिन्न कोण से वस्तु को देखा जाता है) ली जाती है। दर्शकों को दिखाते समय दो प्रोजेक्टर की सहायता से एक साथ फिल्म चलाई जाती हैं, परन्तु इनको दिखाने के लिए पोलेराइड की सहायता से समतल ध्रुवित प्रकाश प्रयुक्त किया जाता है। दोनों ओर लम्बवत स्थिति में पोलेराइड रखकर लम्बवत तलों में ध्रुवित प्रकाश द्वारा फिल्में 'प्रक्षेपित' की जाती हैं तथा दर्शकों को भी पोलेराइड लगे हुए चश्में दे दिये जाते हैं जिससे कि बाईं ओर से ली हुई फिल्म बाईं आँख द्वारा देखी जाय और दायीं ओर से ली हुई फिल्म दायीं आँख द्वारा देखी जाय।

सड़कों पर चलने वाले वाहनों यथा कार, ट्रक आदि की हैड लाइट के कारण उत्पन्न चका चौंध को कम करने के लिए उनकी खिड़कियों और "लाइट" के सामने पोलेराइड लगाये जा सकते हैं। जिससे कि एक पोलेराइड को घुमाकर प्रकाश तीव्रता कम की जा सके। इसी प्रकार वायुयानों की खिड़कियों में प्रवेश करने वाले प्रकाश की तीव्रता को नियन्त्रित करने भी पोलेराइड प्रयुक्त होते हैं।

धातुओं तथा क्रिस्टलों के प्रकाशीय गुणों के अध्ययन में भी समतल-ध्रुवित प्रकाश प्रयुक्त किया गया है।

कुछ ध्रुवण-घूर्णक (optically active) पदार्थ समतल ध्रुवित प्रकाश के ध्रुवण-तल का घूर्णन उत्पन्न कर देते हैं जिसका मापन कर पदार्थ के सम्बन्ध में जानकारी प्राप्त की जाती है। उदाहरण के लिये शक्कर के घोल द्वारा उत्पन्न घूर्णन का मापन कर उसके गाढ़ेपन (concentration) की गणना की जा सकती है।

प्रश्न

(1) सामान्य प्रकाश और समतल ध्रुवित प्रकाश का अन्तर समझाइये। यदि पूर्ण समतल ध्रुवित प्रकाश को एक ध्रुवक में से देखा जाय और ध्रुवक को

किरण की दिशा के परित: घुमाया जाय, तो प्रकाश तीव्रता में कैसा परिवर्तन होगा।

(2) उपर्युक्त क्रिया करने पर, आंशिक ध्रुवित प्रकाश के साथ, तीव्रता का परिवर्तन कैसा होगा?

(3) परिभाषा दीजिये :—

(अ) समतल ध्रुवित प्रकाश (ब) ब्रयूस्टर का नियम (स) ध्रुवण-तल

(4) एक-अक्षीय क्रिस्टल मे द्वि-अपवर्तन किस प्रकार होता है? इनमे प्रकाशीय-अक्ष की परिभाषा दीजिये तथा इससे सम्बन्धित गुण बतलाइये।

(5) समतल-ध्रुवित प्रकाश उत्पन्न करने हेतु निकाल-प्रिज्म किस प्रकार बनाया जाता है? चित्रों की सहायता से पूरी विधि समझाइये।

(6) पोलेराइड के बनाने की विधि और उसकी क्रिया का वर्णन करिये। ध्रुवित-प्रकाश के उपयोग बताइये।

---

13 तरंगों का संचरण
(Propagation of Waves)

13·1· समतल ज्यावक्रीय तरंग का समीकरण

माध्यम के तरंग के आगे बढ़ने वाले प्रक्रम को तरंग समीकरण द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। तरंग गति को समझने के लिये यह आवश्यक है कि हम माध्यम के प्रत्येक बिन्दु पर कण के कम्पन करने का आयाम तथा उसकी कला (Phase) को जानें, तथा इन दोनों में समय के साथ होने वाले परिवर्तन को भी जानें। यह सम्भव है, यदि हमें यह मालूम हो कि वस्तु किस नियमानुसार कम्पन कर रही है तथा इस कम्पन करती हुई वस्तु तथा मध्यम के मध्य किस प्रकार की अन्योन्य क्रिया है। परन्तु बहुधा हमें इस जानकारी की कोई आवश्यकता नहीं होती कि अमुक तरंग का स्रोत क्या है, अतः हमारी समस्या कुछ सरल है : माध्यम के विभिन्न बिन्दुओं की कंपन अवस्थाओं में आपस में क्या सम्बन्ध है जबकि कोई तरंग माध्यम में गतिमान हो।

चित्र 13·1 में कोई तरंग OX दिशा में (अर्थात् x के बढ़ने की दिशा में) आगे बढ़ रही है। मानाकि y उस राशि को प्रदर्शित करता है जो कि कम्पन कर रही है; उदाहरणार्थ y किसी गैस का दाब संपीडन या विरलन हो सकता है या किसी कण का अपनी मध्य स्थिति से विस्थापन इत्यादि। माना कि तरंग ज्यावक्रीय (Sinusoidal) है अर्थात् माध्यम के प्रत्येक बिन्दु पर y का समय के साथ परिवर्तन सरल आवर्तगति नियमानुसार

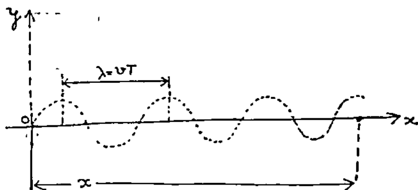
$$y = a \sin (\omega t + \phi) \text{ है}$$

माना कि समय t का शून्य (Origin) इस प्रकार से चुना गया है ताकि विन्दु O पर $t=0$ पर $y=0$

अतः $\phi=0$

अतः विन्दु O के कम्पन करने का समीकरण

$y=a \sin \omega t$ जहाँ पर a विन्दु O पर कण का आयाम है तथा ωt किसी विशेष क्षण t पर बिन्दु O के कम्पन की कला। हम निम्न प्रश्न के उत्तर को जानने के इच्छुक हैं · यदि बिन्दु O के कम्पन की किसी क्षण t पर कला



चित्र—13·1

ωt है तो इसी क्षण पर किसी अन्य बिन्दु A की कला क्या होगी जोकि बिन्दु O से x—दूरी पर है चूंकि बिन्दु A तरगगति की दशा मे है अतः किसी क्षण t पर A के कम्पन की कला वही होगी जोकि $(t-x/v)$ sec पर O की थी। यहाँ v तारंग की कला के आगे बढने का वेग (Phase velocity) है। अतः t समय पर A की कला $=\omega(t-x/v)$

अतः A के कम्पन का समीकरण

$$x=a \sin \omega (t-x/v)$$

यदि इसके विपरीत तरग A से O की तरफ (अर्थात् x के घटने की दिशा में) चल रही हो तो स्पष्ट है कि A पर तरग की एक निश्चित कला विन्दु O के सापेक्ष x/v Sec पहले पहुँचती है। अत यदि किसी समय t पर विन्दु O की कला ωt है तो उसी क्षण t पर विन्दु A की कला

$=\omega(t+x/v)$ होगी

अतः बिन्दु A पर कम्पन करने वाली राशि y का समीकरण

$y=a \sin \omega (t+x/v)$ होगा

इसलिये तरंग की गति का व्यापक समीकरण

$$y = a \text{ Sin } \omega \, [t \pm x/v]$$

यहाँ पर हमने यह कल्पना की है कि आयाम a का मान समय के साथ अपरिवर्तित रहता है तथा माध्यम समांगी (homogeneous) है (अर्थात् v का मान सर्वत्र समान है)। इन दोनों कल्पनाओं का यह अर्थ है कि उपर्युक्त समीकरण समतल प्रगामी तरंग (Plane progressive wave) के लिये है। यदि तरंग गोलीय (Spherical wave) है तो आयाम a, दूरी x के व्युत्क्रमानुपाती होता है अतः तरंग समीकरण

$$y = a/x \text{ Sin } \omega \, (t - x/v)$$ गोलीय तरंग को प्रदर्शित करेगा।

13·2 अप्रगामी तरंग :

जब दो सर्वथा एक समान प्रगामी तरंगे जो कि विपरीत दिशाओं से आ रही हों, में व्यतिकरण होता है तो इसके फलस्वरूप अप्रगामी तरंग' बनती है।

माना कि समान आवृत्ति एवम् आयाम की दो ज्यावक्रीय समतल प्रगामी तरंगों के समीकरण, जोकि एक दूसरे की विपरीत दिशाओं से आते हुये अध्यारोपित हों, निम्न हैं :

$$y_1 = a \text{ Sin } \omega \, (t - x/v)$$

तथा $$y_2 = a \text{ Sin } \omega \, (t + x/v)$$

उपर्युक्त समीकरणों से स्पष्ट है कि किसी भी समय t पर x=O विन्दु पर दोनों तरंगों द्वारा उत्पन्न कम्पन समान कला में हैं। अध्यारोपण सिद्धान्त द्वारा माध्यम के किसी विन्दु x पर परिणामी तरंग

$$y = y_1 + y_2$$

$$= a \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + a \text{ Sin } \omega \left(t + \frac{x}{v} \right)$$

$$= a \left\{ \text{Sin} \left(\omega t - \frac{\omega x}{v} \right) + \text{Sin} \left(\omega t + \frac{\omega x}{v} \right) \right\}$$

सूत्र $\text{Sin } C + \text{Sin } D = 2 \text{ Sin } \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$ का उपयोग करते हुये

$$y = 2a \cos \frac{\omega x}{v} \text{ Sin } \omega t \qquad \ldots\ldots(13 \cdot 1)$$

समीकरण (13·1) एक अप्रगामी तरंग के समीकरण को निरूपित करता है।

समीकरण (13·1) से स्पष्ट है कि विपरीत दिशाओं से आती हुई दो समानतरंगो के अध्यारोपण के किसी निश्चित बिन्दु x पर कम्पन सरल आवर्ती हैं जिनकी आवृत्ति ω है तथा जिनका आयाम

$$A = 2a \cos \frac{\omega x}{v} \text{ है} \qquad \cdots\cdots(13 \cdot 2)$$

समीकरण (13·2) से स्पष्ट है कि x के भिन्न भिन्न मानों पर A का परिणाम भी भिन्न भिन्न है ।

न्यूनतम A—x के निम्न मानो पर $A=0$, अर्थात् इन बिन्दुओ पर कोई कम्पन नही होता जिन पर

$$\cos \frac{\omega x}{v} = 0$$

$$\text{या } \frac{\omega x}{v} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2},$$

$$\text{या } \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\ldots\ldots$$

$$\left[\because \frac{\omega x}{v} = \frac{2\pi n x}{\lambda} = \frac{2\pi x}{\lambda} \right]$$

$$\text{अतः } x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots\ldots\ldots$$

इत्यादि बिन्दुओं पर शून्य कम्पन होंगे । इन बिन्दुओं को निस्पन्द (Vibration nodes) कहते हैं । चित्र [13·2] में यह क्रमशः $N_1, N_2, \cdots$ इत्यादि बिन्दुओं से दिखाया गया है ।

अधिकतम A—

$$A = 2a \cos \frac{\omega x}{v} = 2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$$

अधिकतम है यदि

$$\cos \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1$$

$$\text{अथवा} \qquad \frac{2\pi x}{\lambda} = 0, \pi, 2\pi \ldots\ldots\ldots\ldots$$

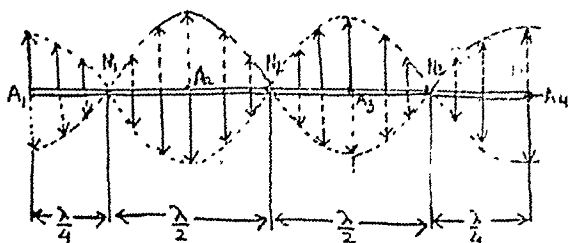
अतः $x=0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}$.........

इत्यादि विन्दुओं पर A अधिकतम है तथा इसका परिणाम 2a है। इन बिन्दुओं को प्रस्पंद (Antinodes) कहते हैं। स्पष्ट है कि दो निस्पंदों के या प्रस्पंदों के बीच की दूरी $\frac{\lambda}{2}$ है तथा एक निस्पंद तथा प्रस्पंद के मध्य की दूरी $\frac{\lambda}{4}$ है।

समीकरण $y=2a \cos \frac{\omega x}{v} \sin \omega t$ में यदि $x=\frac{\lambda}{2}$ प्रतिस्थापित किया जाये

तो $\cos \frac{\omega x}{v}=\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$ का मान चिन्ह बदल देता है ($\because \cos \pi=-1$)।

अतः स्पष्ट है कि दो निस्पंदों के सभी बिन्दुओं पर कणों का विस्थापन यदि किसी एक दिशा में है तो अगले दोनों निस्पंदों के बीच विस्थापन विपरीत दिशा में होगा। यह चित्र (13·2) में प्रदर्शित किया गया है। चित्र में N_1 तथा N_2 के मध्य सभी



चित्र—13·2

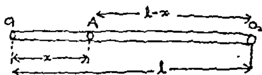
कणों का विस्थापन यदि तीर की दिशा में है तो N_2 तथा N_3 के मध्य सभी कणों का विस्थापन इसके विपरीत होगा। अप्रगामी तरंगों का विस्तृत वर्णन आप पहले अध्याय 10 में भी पढ़ चुके हैं।

13·3 छड़ अथवा डोरी के कम्पन की विधा (Mode of Vibrations of a rod or of a string)—

विपरीत दिशाओं में चलती हुई दो प्रगामी तरंगों का अध्यारोपण छड़ अथवा डोरे के कम्पन या किसी वायु स्तम्भ के कम्पनों द्वारा आसानी से प्रदर्शित किया जा सकता है। यदि किसी छड़ के माध्यम में एक तरंग आगे बढ़ रही हो तो वह छड़ के सिरों से परावर्तित होकर प्रारम्भिक तरंग से अध्यारोपित होगी तथा अप्रगामी तरंग बनायेंगी। अतः किसी बाह्य स्रोत के द्वारा छड़ में उत्पन्न हुई तरंग तथा छड़ के सिरों से परावर्तित तरंग में निरन्तर छड़ के ही माध्यम से व्यतिकरण होता रहता है।

माना कि किसी बाह्य स्रोत के द्वारा छड़ अथवा डोरी में ω आवृत्ति के कम्पन

बिन्दु O_1 पर उत्पन्न किये गये हैं, a कम्पनों का आयाम है अर्थात् O_1 बिन्दु का विस्थापन समीकरण $y=a \sin \omega t$ के अनुसार है। यही तरंग छड़ के दूसरे सिरे O_2 से परावर्तित होती है तथा विपरीत दिशा मे गमन करती है। हम छड़ के किसी विन्दु A पर जो O_1 से x दूरी पर है। इन दोनों तरंगों के व्यतिकरण को परिणामी प्रभाव जानना चाहते हैं। यहां पर हम यह कल्पना करते हैं कि डोरी अथवा छड़ मे किसी भी प्रकार की ऊर्जा अवशोपण नहीं है अर्थात् सीधी तथा परावर्तित तरंगों का आयाम समान है।



चित्र—13 3

चूँकि O_1 बिन्दु पर विस्थापन किसी क्षण t पर $y=a \sin \omega t$ है। अतः इसी क्षण पर A बिन्दु पर विस्थापन इसी सीधी तरग के द्वारा

$$y_1=a \sin \omega \left(t-\frac{x}{v}\right) \text{ होना चाहिये।}$$

परावर्तित तरग द्वारा इसी विन्दु A पर विस्थापन y_2 जानने के लिये यह आवश्यक है कि हम उस समय को जानें जिसमे तरग O_1 से O_2 तथा O_2 पुनः A विन्दु तक आने मे लेती है।

चित्र से स्पष्ट है :

$$O_1 O_2+O_2A=l+l-x=2l-x$$

∴ O_1 से O_2 तक जाने मे तथा O_2 A तक आने मे लगा आवश्यक समय $\triangle t=\frac{2l-x}{v}$

∴ A बिन्दु पर परावर्तित तरंग द्वारा उत्पन्न विस्थापन (t क्षण पर)

$$y_2=a \sin \omega \left(t-\frac{2l-x}{v}\right)$$

यहाँ पर हमने यह माना है कि छड के सिरो पर अन्य किसी प्रकार की कला हानि (phase loss) नहीं है।

अत. छड के अन्दर बनी अप्रगामी तरगो का समीकरण

$$y=y_1+y_2=a \sin \omega \left(t-\frac{x}{v}\right)+a \sin \omega \left(t-\frac{2l-x}{v}\right)$$

$$=a\left\{\sin\left(\omega t-\frac{\omega x}{v}\right)+\sin\left(\omega t-\frac{\omega(2l-x)}{v}\right)\right\} \qquad ......(13\cdot3)$$

$$=2a\cos\omega\frac{l-x}{v}\sin\omega\left(t-\frac{l}{v}\right) \qquad ......(13\cdot4)$$

$$=R\sin(\omega t-\phi)$$

जहाँ पर $\phi=\frac{\omega l}{v}=\frac{2\pi l}{\lambda}$ एक स्थिर कला है जिसका मान x पर निर्भर हीं करता। $R=2a\cos\omega\left(\frac{l-x}{v}\right)$ कम्पन का विन्दु A पर आयाम है। स्पष्ट है कि R का मान x पर निर्भर करता है। अर्थात् छड़ अथवा डोरी के भिन्न-भिन्न विन्दुओं पर इसका मान भी भिन्न-भिन्न है।

चूँकि $R=2a\cos\frac{\omega(l-x)}{v}$

अतः R अधिकतम है यदि

$$\cos\frac{\omega(l-x)}{v}=\pm1$$

या $\frac{\omega(l-x)}{v}=0, \pi, 2\pi, 3\pi, ...$

$$\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}=0, \pi, 2\pi, 3\pi ....$$

$$x=l, l-\frac{\lambda}{2}, l-\frac{2\lambda}{2}, l-\frac{3\lambda}{2}, ...$$

तथा x के निम्न मानों पर R न्यूनतम है यदि

$$\cos\frac{\omega(l-x)}{v}=\cos\frac{2\pi(l-x)}{v}=\cos\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}=0$$

या $\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}=\frac{\lambda}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, ...$

$$x=l-\frac{\lambda}{4}, l-\frac{3\lambda}{4}, ...$$

R के अधिकतम तथा न्यूनतम की शर्त को निम्न सूत्र से भी प्रदर्शित ते हैं।

यदि $x=l-k\ \lambda/4$ मे यदि $k=0, 2, 4$........ हो R अधिकतम होगा तथा यदि $k=1, 3, 5$,......इत्यादि होगा तो R न्यूनतम होगा। अतः $x=l-k\ \lambda/4$ में दोनों शर्तें शामिल हैं।

हमने सूत्र (13·3) को निकालने में केवल दो तरंगो के ही अध्यारोपण को ध्यान मे रखा है, एक तो सीधी तरंग तथा दूसरी छड़ के दूसरे सिरे से परावर्तित तरंग। परन्तु छड के सिरे O_2 से चलने वाली तरंग पुनः छड़ के O_1 सिरे से भी परावर्तित होगी। अतः परिणामी आयाम का मान निकालने के लिये हमको सीधी तथा परावर्तित तरगो के कई युग्मो (pairs) को जोड लेना चाहिए। उदाहरणार्थ डोरी को कम्पन कराने वाला स्रोत यदि T sec तक डोरी को कम्पायमान रखता हो तो इतने समय मे डोरी के दोनो सिरो से कुल परावर्तन लगभग $N=T/l/v$ होंगे। अत. N/2 तरगें सीधी दिशा में होंगी तथा N/2 विपरीत दिशा में।

माना कि एक सीधी तरग तथा एक विपरीत दिशा मे चलती हुई तरग के युग्म से व्यतिकरण द्वारा किसी बिन्दु A का विस्थापन y होता है। हम यह शर्त जानना चाहते हैं कि प्रत्येक तरग युग्म (सीधी एव परावर्तित) के द्वारा A बिन्दु पर विस्थापन एक ही दिशा मे हो। अत A पर विस्थापन सभी तरग युग्म के विस्थापनों का योग हो। इसके लिये यह आवश्यक है कि प्रत्येक तरग युग्म के द्वारा उत्पन्न A के कम्पनो की कला तथा अगली तरग युग्म के द्वारा A के कम्पनों की कला मे अन्तर 2π या इसका कोई सरल गुणा हो। परन्तु प्रत्येक तरग बिन्दु A पर पुनः उसी दिशा मे $2l/v$ sec बाद आती है अतः दोनो तरगो मे कलान्तर

$$=\omega\times\frac{2l}{v}=\frac{4\pi l}{\lambda}$$

स्पष्ट है कि यह कलान्तर $\frac{4\pi l}{\lambda}$ यदि $2\pi n$ के बराबर हो तो सभी विस्थापन एक ही दिशा में होंगे।

$$\frac{4\pi l}{\lambda}=2\pi n \qquad (n=1, 2, 3......)$$

$$\boxed{l=\frac{n\lambda}{2}} \qquad ......(13\cdot5)$$

(जबकि $n=1, 2, 3$,.......)

अर्थात् $\lambda/2$ का कोई सरल गुणा डोरी की लम्बाई l के बराबर होना चाहिये। यदि यह शर्त पूरी हो तो सभी तरगों के द्वारा विस्थापन एक ही दिशा में होगा अतः आयाम बढ जायेगा। जैसा कि हम पहले देख चुके हैं कि छड के अनुदिश प्रस्पंद अथवा निस्पंद निम्न सूत्र द्वारा दिये जाते हैं :

$x = l - k\ \lambda/4 = n\ \lambda/2 - k\ \lambda/4$

$= \lambda/4\ (2n - k)$ (....13·6)

जहां पर $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ इत्यादि। निस्पन्दों की स्थिति के लिये $k = 1, 3, 5, \ldots\ldots\ldots$

अतः $x = \lambda/4\ (2-1) = \lambda/4$

या $x = \lambda/4\ (2 \times 2 - 1) = 3\lambda/3$

या $x = 5\lambda/4,\ 7\lambda/4,$ इत्यादि सब निस्पन्दों की स्थितियां हैं।

यदि $k = 0, 2, 4, \ldots$ तो समीकरण (13·6) से हम प्रस्पन्दों की स्थितियां मालूम कर सकते हैं।

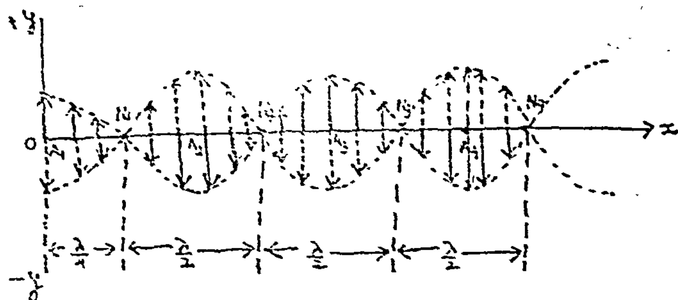
$\because\ x = \lambda/4\ (2n - k)$

यदि $n = 1, k = 0$ $\qquad x = \lambda/4\ (2 - 0) = \lambda/2$

$n = 1, k = 2$ $\qquad x = 0$

$n = 2, k = 0$ $\qquad x = \lambda$

अतः $x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, 2\lambda, 5\lambda/2, 3\pi, \ldots\ldots$ इत्यादि प्रस्पन्दों की स्थितियां हैं। यह चित्र (13·4) में दिखाया गया है। चित्र में छड़ की लम्बाई



चित्र—13·4

$l = 3\lambda/2$ ली गई है तथा A_1, A_2, A_3 प्रस्पन्दों की स्थितियां हैं तथा N_1, N_2, N_3 निस्पन्दों की स्थितियां हैं।

चूंकि सम्बन्ध $l = n\ \lambda/2$ केवल एक ही तरंग दैर्घ्य के लिये सत्य नहीं है अपितु उन सभी तरंग दैर्घ्य $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots\ldots$ इत्यादि के लिये सत्य है जो निम्न शर्त पूरी करती है—

$$l = n_1\ \lambda_1/2 = n_2\ \lambda_2/2 = n_3\ \lambda_3/4$$

जहां पर $n_1, n_1, \ldots\ldots$ इत्यादि पूर्णाङ्क संख्या हैं। अतः डोरी की l लम्बाई पर केवल एक ही आवृत्ति की अग्रगामी तरंग नहीं बनतीं बल्कि कई आवृत्तियों की

अप्रगामी तरंग सम्भव हैं। उदाहरणार्थ यदि हम $n_1=1, n_2=2, n_3=3$ लें तो स्पष्ट है

$$n_1 \lambda_1/2 = n_2 \lambda_2/2$$

या $\lambda_1/\lambda_2 = n_2/n_1 = 2/1$

$\therefore \quad \lambda_1 = 2\lambda_2 \qquad$ या $\lambda_2 = \frac{1}{2} \lambda_1$

ठीक इसी प्रकार $\lambda_2 = 3\lambda_3 \qquad \lambda_3 = \frac{1}{3} \lambda_1$

अर्थात् तरग दैर्घ्य एक दूसरे के सरल गुणनफल हैं। इसी प्रकार आवृत्तियाँ

$$\omega_1 = 2\pi \frac{v}{\lambda_1}, \quad \omega_2 = 2\pi \frac{v}{\lambda_2} = 2\left(\frac{2\pi v}{\lambda_1} \right) = 2\omega_1$$

$$\omega_3 = \frac{2\pi v}{\lambda_3} = 3\left[\frac{2\pi v}{\lambda_1} \right] = 3\omega_1 \text{ इत्यादि}$$

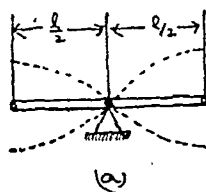
अर्थात् डोरी अथवा छड़ के अन्दर कई आवृत्तियों की अप्रगामी तरग बनती हैं। न्यूनतम आवृत्ति तधिकतम तरग दैर्घ्य $(n_1=1, \lambda_1=2l)$ के लिये है इसका मान

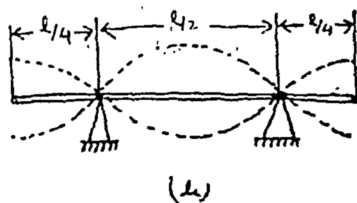
$$\omega_2 = \frac{2\pi v}{\lambda_1} = \frac{2\pi v}{2l} = \frac{\pi v}{l} \text{ है।}$$

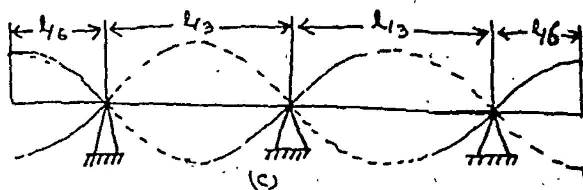
न्यूनतम आवृत्ति को मूल आवृत्ति कहते हैं। अन्य आवृत्तियाँ $\omega_2=2\omega_1$ तथा $\omega_3=3\omega_1$ इत्यादि भी सम्भव हैं। इन आवृत्तियों को अधिस्वरक (overtone) या सनादी (harmonics) कहते है। अतः डोरी के कम्पनो मे मूल स्वर के अतिरिक्त कई संनादी ($\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_3=3\omega_1$) इत्यादि सम्भव हैं। इन्हें डोरी के कम्पनो का स्पेक्ट्रमी विश्लेषण कहते है।

अभी तक हमने छड तथा डोरी के कम्पनो के अध्ययन में यह माना कि छड के दोनों सिरे मुक्त (free ends) हैं, परन्तु साधारणतया डोरी या छडो के कम्पनों मे छड का एक या दोनो सिरे बद्ध (fixed) होते हैं इन बद्ध सिरो पर कण कम्पन नही कर सकता, स्पष्टतया ये बिन्दु निस्पद होने चाहिये। उदाहरणार्थ यदि हम एक ऐसी छड के कम्पनों का अध्ययन करें जोकि कई बिन्दुओं पर बद्ध है तो ऐसी छड़ मे यदि अप्रगामी तरगें उत्पन्न करनी हैं तो इस छड़ को चाहे किन्ही बिन्दुओ पर बद्ध नही किया जा सकता बल्कि इन बिन्दुओ की ऐसी स्थिति होनी चाहिये ताकि ये अप्रगामी तरंगों के निस्पन्दों मे सन्निपाती हों। यह चित्र 13·5 मे स्पष्ट दिखाया गया है। चित्र [13·5 (a)] मे छड़ मध्य बिन्दु पर बद्ध है अत यह बिन्दु निस्पन्द होगा तथा छड के दोनों सिरे प्रस्पन्द होंगे। अतः इस प्रकार के छड़ के कम्पन को दिशा में केवल वही तरगें सम्भव हैं जिनकी तरग दैर्घ्य $\lambda/2=l$ ... सम्भव है अर्थात् $\lambda=2l$ की तरंग ही छड़ पर सम्भव है। चित्र (13·5 b) मे

दो बिन्दुओं पर वद्ध है अतः छड़ पर सम्भावित तरंगें सूत्र $2\lambda/2=l$ से दो जायेंगी इत्यादि। एक निश्चित लम्बाई की छड़ में कई आवृत्तियों की अप्रगामी तरंगें सम्भव







चित्र—13·5

है जिनमें मूल आवृत्ति ω_1 तथा इसकी संनादी ($2\omega_1$, $3\omega_1$........इत्यादि) सम्भव हैं।

यहाँ पर यह संकेत करना आवश्यक है कि छड़ के कम्पन करने की आवृत्ति केवल छड़ के ही गुणों पर निर्भर करती हैं। यदि छड़ की प्राकृत आवृत्ति तथा वाह्य स्रोत की आवृत्ति यदि समान है तो अनुनाद की उत्पत्ति होती है। उदाहरणार्थ सुरमापी के तार की प्राकृत आवृत्ति

$$n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$ होती है। यदि स्वरित्र, जो कि सुरमापी को कम्पन करने

के लिये अणेदित करता है, की आवृत्ति n के वरावर हो तो यह अनुनाद की अवस्था

है तथा $N=n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$ से स्वरित्र की आवृत्ति ज्ञात की जा सकती है।

यह वात भी ध्यान में रखी जानी चाहिए कि छड़ों में अनुदैर्घ्य तथा अनुप्रस्थ दोनों प्रकार के कम्पन हो सकते हैं, अतः दोनों प्रकार की अप्रगामी तरंग बन सकती है जिनमें उपर्युक्त वर्णन के अनुसार स्वतन्त्र सिरे पर प्रस्पन्द बनेंगे और वद्ध सिरे पर निस्पन्द। उपर्युक्त वर्णन में सुरमापी के तार के कम्पनों के स्वरित्र से अनुनाद की स्थिति प्राप्त कर आवृत्ति ज्ञात करने में अनुप्रस्थ कम्पनों हेतु सूत्र दिया गया है।

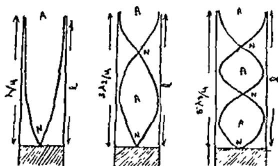
13 4 वायु स्तम्भ के कम्पन करने की विधा

वायु स्तम्भ में कोई तरंग उत्पन्न होने पर, उसका भी वायु स्तम्भ के सिरो पर परावर्तन होता है और जिस प्रकार छडो मे अप्रगामी तरंग बनती हैं, उसी प्रकार प्रारम्भिक तरंग तथा परावर्तित तरंग के व्यतिकरण के फलस्वरूप इसमे भी अप्रगामी तरंग बनती हैं। तथापि वायु स्तम्भ के विषय में एक अन्तर यह है कि इसमें अनुदैर्घ्य तरंग बढ़ती हैं। इसके अन्तर्गत हम दो प्रकार के वायु स्तम्भ पर विचार करेंगे :—

(1) बन्द वायु-स्तम्भ (Closed air-Colnmn)

(2) खुला वायु-स्तम्भ (OPen alr Column)

बन्द वायु स्तम्भ—जिसका एक सिरा बन्द हो जैसे अनुनाद नली मे नीचे की ओर पानी की सतह बन्द सिरे का कार्य करती है। इस प्रकार के वायु स्तम्भ मे कौनसी अप्रगामी तरंगे उत्पन्न हो सकती है ? निश्चय ही इसके बन्द सिरे पर कम्पन बन्द सिरे पर कम्पन नहीं हो सकते अत. वह निस्पन्द होगा और खुला सिरा प्रस्पन्द होगा। अतः बन्द वायु-स्तम्भ के कम्पनों को विभिन्न विधाओ मे एक, मूल-आवृत्ति



चित्र—13·6

की विधा चित्र 13·6 a के अनुसार होगी बन्द सिरे पर सदेव निस्पन्द और खुले सिरे पर प्रस्पन्द रहते हुए अगली अन्य दो विधायें चित्र 13·6 (b) और (c) मे प्रदर्शित की गई हैं। माना कि चित्र की तीनो विधाओ मे तरग दैर्घ्य क्रमश λ_1, λ_2 और λ^3 है। चित्र (a) से स्पष्ट है कि, $l=\lambda_1/4$ (प्रस्पन्द और निस्पन्द की दूरी)

$\therefore$ $\lambda_1=4l$

अत: इस विधा मे कम्पन की आवृति,

$$n_1=V/\lambda_1=V/4l$$

चित्र (b) से $l=3\lambda_2/4$

$\therefore$ $\lambda_2=4l/3$

अतः इस विधा में कम्पन की आवृति,

$$n_2 = V/\lambda_2 = 3V/4l$$

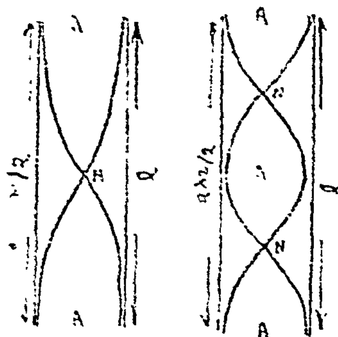
चित्र (c) से, $l = 5\lambda_3/4,\ \lambda_3 = 4l/5$

तथा आवृति, $n_3 = V/\lambda_3 = 5V/4l$

यहाँ 'V' वायु में इन अनुदैर्घ्य तरंगों का वेग है तथा l वायु स्तम्भ की लम्बाई है। इसी प्रकार आगे की विधाओं की आवृतियाँ $7V/4l$, $9V/4l$...आदि होंगी। अतः बन्द वायु स्तम्भ के कम्पनों की आवृतियाँ मूल आवृति की तीन-गुनी, पाँच-गुनी...आदि होती हैं : $n_1 : n_2 : n_3 \ldots\ldots$

$$= 1 : 3 : 5 \ldots\ldots$$

खुला वायु स्तम्भ—खुले सिरे पर भी परावर्तन होता है, अतः खुले हुए सिरों वाले वायु स्तम्भ में भी अप्रगामी तरंग बनती है। स्पष्ट ही दोनों खुले सिरे प्रस्पन्द होंगे और उनके बीच एक निस्पन्द होना आवश्यक है अतः मूल कम्पन की विधा चित्र 13·7 a के अनुसार होगी।



चित्र—13·7

चित्र (a) से, $l = \lambda_1/2$

$\therefore$ $\lambda_1 = 2l$

तथा आवृति, $n_1 = V/2l$

चित्र (b) से, $l = \lambda_2$

तथा आवृति $n_2 = V/l$ या $2V/2l$

चित्र (c) से, $l = 3\lambda_3/2$

$\lambda_3 = 2l/3$

तथा आवृति, $n_3 = 3V/2l$

इसी प्रकार अगली विधाओं की आवृत्तियाँ $4V/2l$, $5V/2l$···आदि होंगी। अतः खुले सिरों वाले वायु-स्तम्भ में विभिन्न विधाओं की आवृतियाँ मूल आवृति की दो-गुनी, तीन-गुनी, चार-गुनी···आदि होती हैं, अर्थात

$$n_1 : n_2 : n_3 \ldots\ldots$$
$$= 1 : 2 : 3 \ldots\ldots$$

इस प्रकार खुले वायु स्तम्भ के कम्पनों में सभी सनादी (harmonics) होते हैं, जब कि बन्द वायु स्तम्भ के कम्पनों मे विषम सनादी (odd harnomics) ही होते है।

13·5 प्रकाश का वेग ज्ञात करने के लिये माइकल्सन-विधि

प्रकाश का वेग मापने की विधियो मे माइकल्सन विधि एक अच्छी विधि है जिसके द्वारा पर्याप्त यथार्थता युक्त परिणाम प्राप्त हो सकता है।

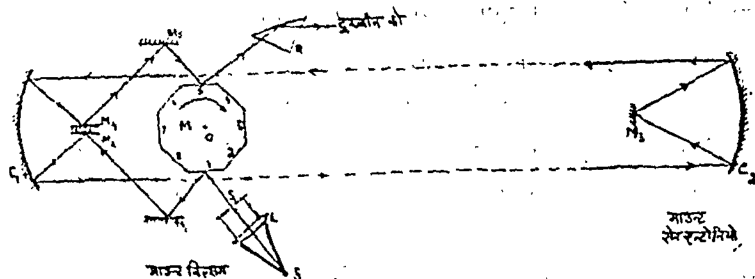
सिद्धान्त—इसमे बहुभुजी दर्पण का प्रयोग किया जाता है जिसके एक फलक से परावर्तित होकर प्रकाश किरण पुन्ज अन्य दर्पणो से परावर्तित होता हुआ एक बड़े अवतल दर्पण से परावर्तित होकर समान्तर किरण पुन्ज के रूप में चलकर, अत्यधिक दूरी पर स्थित एक अन्य अवतल दर्पण से परावर्तित होकर वापस आता है। बहुभुजी दर्पण की उसके अक्ष के परितः घूर्णन गति इस प्रकार समजित की जाती है कि उसके किसी अन्य फलक से यह किरण पुन्ज परावर्तित होकर प्रकाश स्रोत का प्रतिबिम्ब अपनी स्थिर स्थित मे ही बनावे जहाँ दर्पण के न घूमने पर बनता हो। दर्पण की घूर्णन गति, दोनों स्थानो की दूरी तथा बहुभुजी दर्पण में दर्पणो की संख्या की सहायता से प्रकाश-वेग की गणना की जा सकती है।

यह एक अविक्षेप विधि है, अतः लघु विस्थापनो के मापन की अशुद्धियो का इसमें समावेश नही होता और मापन की यथार्थता काफी अधिक अपेक्षित होती है :

उपकरण तथा कार्य-विधि—माइकल्सन ने प्रकाश वेग ज्ञात करने सम्बन्धी अपने प्रयोग सन् 1878 मे प्रारम्भ किये थे तथा लगभग 50 वर्षों तक की अवधि में तक करते रहे थे। अपने एक प्रयोग मे जो उन्होने लगभग सन् 1924 के आसपास किया, उन्होंने एक अष्टफल की दर्पण (octagonal mirror) प्रयुक्त किया जिसका सेक्शन चित्र मे M से प्रदर्शित किया गया है। यह दर्पण उसके केन्द्र O से कागज के तल के लम्बवत अक्ष के परितः घूर्णन कर सकता है। यह एक विद्युत मोटर के 'शाफ्ट' पर लगा रहता है जिसकी घूर्णन गति परिवर्तित की जा सकती है।

एक शक्तिशाली स्रोत S के प्रकाश को उत्तल लेन्स L द्वारा सघनित कर एक स्लिट S_1 में से गुजार कर बारीक किरण पुन्ज प्राप्त किया जाता है। यह अष्टफली दर्पण के किसी एक फलक, माना फलक 1 से परावर्तित होकर एक समतः

M_1 से परावर्तित होती है और फिर एक अन्य समतल दर्पण M_2 से परावर्तित होकर एक बड़े अवतल दर्पण C_1 से परावर्तित होती है। दर्पण M_2 के दर्पण C_1 के फोकस



चित्र—13·8

पर होने के कारण किरण पुन्ज अक्ष के समान्तर होकर चित्र में प्रदर्शित दिशा में बढ़ता है। यह सब दर्पण-व्यवस्था उन्होंने माउन्ट विलसन पर की थी तथा अवतल दर्पण C_1 से परावर्तित होकर चलने वाला किरण-पुन्ज काफी अधिक दूरी पर स्थित माउन्ट सैन एन्टोनियो पर स्थित अवतल दर्पण C_2 पर पड़ता था इन दोनों के बीच दूरी का सही-सही मापन किया गया था तथा यह लगभग 22 मील थी। दर्पण C_2 से परावर्तित होकर किरण पुन्ज, उसके फोकस पर स्थित दर्पण M_3 द्वारा पुनः C_2 की ओर परावर्तित होता है और उसके द्वारा वापस समान्तर किरण पुन्ज के रूप में पहले स्थान पर स्थित दर्पण C_1 की ओर परावर्तित कर दिया जाता है। चित्र अनुसार, यह पुनः C_1 के फोकस पर ही स्थित समतल दर्पण M_4 से दर्पण M_5 की ओर भेज दिया जाता है और इस दर्पण से अष्टफलकी दर्पण के सामने के फलक 5 की ओर 1 इस फलक से परावर्तित होकर किरण-पुन्ज एक प्रिज्म P द्वारा परावर्तित होकर टेलिस्कोप की ओर जाता है, जिसमें से प्रेक्षक स्रोत का प्रतिबिम्ब देखता है। प्रतिबिम्ब को टेलीस्कोप के नैत्रिका के क्रास तार पर फोकस कर लिया जाता है और प्रतिबिम्ब की यह स्थिति नेत्रिका के साथ सम्बन्धित सूक्ष्ममापी पेच पर पढ़ जाती है।

जब अष्टफलकी दर्पण को घुमाना प्रारम्भ करते तब यह टेलीस्कोप में यह प्रतिबिम्ब विस्थापित हो जाता है। दर्पण की घूर्णन गति को धीरे-धीरे बढ़ाया जाता है और इस प्रकार समंजित किया जाता है कि स्रोत का प्रतिबिम्ब पुनः पपनी पूर्व-स्थिति में टेलीस्कोप में दिखाई देने लगे। यह समंजन तब सम्भव होगा जब प्रकाश-किरण पुन्ज के फलक-1 से परावर्तित होकर पुनः सामने के फलक पर आने तक के समय में अष्टफलकी दर्पण 1/8 घूर्णन करले और फलक-5 के स्थान पर फलक-6 आ जाय। तब फलक-6 से पहले की तरह परावर्तित होकर किरण पुनः टेलीस्कोप में पूर्व-स्थान पर प्रतिबिम्ब बना सकेगा। इस स्थिति में पुनः फलक 2 से परावर्तित

होकर प्रकाश किरण पुन्ज 22 मील की दोहरी यात्रा कर, फलक-7 से परावर्तित होकर टेलीस्कोप मे वही पर प्रतिबिम्ब बनायेगा। इस प्रकार प्रतिबिम्ब लगातार उसी स्थिति में बनता रहेगा। अतः इस विधि में केवल दर्पण की घूर्णन गति समंजित कर प्रतिबिम्ब की पूर्वावस्था प्राप्त की जाती है और फोको-विधि की तरह प्रतिबिम्ब के विस्थापन की माप नहीं करनी पड़ती, इसीलिए यह अविक्षेप विधि कहलाती है। यह भी सहज ही स्पष्ट है कि इस गति से दुगुनी या तिगुनी गति कर देने पर भी प्रतिबिम्ब की पूर्व-स्थिति प्राप्त हो सकेगी।

प्रकाश-वेग की गणना—दोनो स्थानों के बीच की दूरी को D से व्यक्त किया। प्रकाश किरण पुन्ज जितने समय मे D दूरी तक जाकर वापस आता है अर्थात कुल 2D दूरी तय करता है, उतने समय मे अष्टफलकी दर्पण $\frac{1}{8}$ घूर्णन पूरा करता है। माना कि दर्पण की घूर्णन गति n चक्कर/सैकण्ड है।

$$\therefore \text{ एक चक्कर मे लगा समय} = \frac{1}{n} \text{ सैकण्ड}$$

$$\text{तथा } \frac{1}{8} \text{ चक्कर मे लगा समय } t = \frac{1}{8n} \text{ सैकण्ड}$$

$$\therefore \text{ प्रकाश का वेग} = \frac{2D}{t} = \frac{2D}{\frac{1}{8n}} = 16\ nD$$

इस प्रकार प्रकाश का वेग $C = 16\ nD$ ...(13 7)

स्पष्ट ही यदि 8 फलक के स्थान पर m फलक वाला दर्पण हो,

तो, $C = 2\ mnD$ ...(13·8)

माइकलसन विधि की विशिष्टतायें—

(1) जैसा कि ऊपर लिखा जा चुका है, यह अविक्षेप विधि है अत लघु विस्थापन मापने की अशुद्धि का समावेश नही होता।

(2) इसमे दर्पण की घूर्णन गति का उचित नियन्त्रण तथा मापन किया जा सका था।

(3) दोनो स्थानो के बीच की दूरी पर्याप्त शुद्धता से नापी गई थी।

(4) प्रतिबिम्ब की तीव्रता पर्याप्त थी।

उदाहरण 13·1. प्रकाश का वेग निकालने की माइकलसन विधि मे दोनो स्थानों की दूरी 15 कि० मी० है। यदि प्रकाश का वेग 3×10^{10} से० मी०/सैकण्ड हो तो प्रतिबिम्ब की अचर स्थिति के लिये अष्टफलकी दर्पण की न्यूनतम घूर्णन गति ज्ञात करिये। (राजस्थान वि० वि० 1972)

न्यूनतम गति होने पर; दर्पण, प्रकाश किरण के वापस आने में लिये गये समय में $\frac{1}{16}$ चक्कर पूर्ण करता है, अतः

$$C = 16\ nD$$

$$\therefore \quad n = \frac{C}{16\ D} = \frac{3 \times 10^{10}}{16 \times 15 \times 10^{5}}$$

अतः n = 1250 चक्कर/सैकण्ड

उदाहरण 13·2. 32·4 से० मी० लम्बाई के बंद आर्गन पाइप से उत्पन्न मूल स्वर का तारत्व (Pitch) क्या होगा, यदि वायु में ध्वनि का वेग 330 मीटर प्रति सेकण्ड हैं।

बंद आर्गन पाइप से उत्पन्न मूल स्वर की आवृत्ति

$$n = \frac{V}{4l}$$

यहाँ V ध्वनि का वेग और l आर्गन पाइप (अथवा वायु स्तम्भ) की लम्बाई है।

दिया हुआ V = 330 मीटर प्रति सेकण्ड

= 300 × 100 से० मी० प्रति सेकण्ड

और l = 32·4 से० मी०

$$\therefore \quad n = \frac{330 \times 100}{4 \times 32 \cdot 4}$$

अतः n = 259·6 अर्थात लगभग 255 कम्पन प्रति सेकण्ड

उदाहरण 13·3. दो समरूप डोरियां स्वरमेल (Unision) में है। उनकी लम्बाई क्रमशः 50 और 60 से० मी० है। यदि पहली डोरी 100 ग्राम भार से तान दी गई हो तो दूसरी कितने भार से तानी गई है ?

तार की आवृत्ति

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

क्योंकि दोनों डोरियां स्वरमेल में है अतः

$$n = \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T_1}{m}} = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{T_2}{m}}$$

[समरूप होने के कारण m का मान समान होगा]

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{T_1}}{l_1} = \frac{\sqrt{T_2}}{l_2}$$

या $$\sqrt{T_2}=\frac{l_2}{l_1}\sqrt{T_1}$$

$$\therefore \quad T_2=\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 T_1$$

दिया हुआ $l_1=50$ से० मी० $T_1=100$ ग्राम-भार
$l_2=60$ से० मी० $T_2=?$

$$\therefore \quad T_2=\left(\frac{60}{50}\right)^2\times 100$$

या $$T_2=\frac{36}{25}\times 100$$

$$\therefore \quad T_2=144 \text{ ग्राम-भार}$$

प्रश्न

(1) प्रगामी तथा अप्रगामी तरंगों में क्या अन्तर है। प्रगामी तथा अप्रगामी तरंग के समीकरण स्थापित करो।

(2) छड़ अथवा डोरी के कम्पनों की व्याख्या करो तथा यदि छड़ के दोनों सिरे यदि मुक्त हो तो सिद्ध करो कि छड़ के कम्पन करते की विधा के लिये आवश्यक शर्त

$$l=n\frac{\lambda}{2}$$

(3) छड़ के कम्पनो मे अप्रगामी तरगो के बनने की व्याख्या करो तथा छड़ के लम्बाई के अनुदिश निस्पंद तथा प्रस्पद के बनने का सूत्र

$$x=l-k\frac{\lambda}{4} \text{ स्थापित करो}$$

जहाँ पर $k=1, 3, 5, \ldots\ldots$ निस्पंदो के लिये
तथा $k=0, 2, 4, \ldots\ldots$ प्रस्पदो के लिये।

(4) बन्द नली में वायु स्तम्भ के कम्पनो के लिये सिद्ध करो कि
$n_1 : n_2 : n_3 \;: 1 . 3 \cdot 5 : \ldots\ldots$

(5) खुली नली में वायु स्तम्भ के कम्पनो के लिये सिद्ध करो कि
$n_1 : n_2 : n_3 \cdot\cdot 1 : 2 : 3 : \ldots\ldots$

(6) यदि दो आर्गन पाइप एक साथ ध्वनित कराने पर 3 विस्पंद (Beats) प्रति सेकण्ड उत्पन्न करे तो उनकी आवृत्तियों की गणना करो। आर्गन पाइप की लम्बाइयाँ क्रमशः 33 और 33·5 सेमी० है। उत्तर : 201 और 198

(7) दो स्वरित्र X तथा Y 6 विस्पंद प्रति सेकण्ड उत्पन्न करते हैं। X एक 15 से० मी० लम्बाई के बंद वायु स्तम्भ से तथा Y एक 30·5 से० मी० लम्बाई के खुले वायु स्तम्भ से अनुनादी ध्वनि उत्पन्न करते हैं। स्वरित्र X और Y की आवृत्तियों की गणना कीजिये। उत्तर : 366 और 360

(8) तीन समान लम्बाई की डोरियां जो भिन्न भिन्न तनाव से तान दी जाती हैं, कम्पित होती हैं। यदि उनकी संहति प्रति इकाई लम्बाई 1 : 2 : 3 के अनुपात में हों और आवृत्तियां समान हों तो तीनों के तनाव के अनुपात ज्ञात करो।

उत्तर : 1 : 2 : 3

(9) एक स्वरित्र एक 100 से० मी० लम्बाई की डोरी से 4 विस्पंद प्रति सेकण्ड उत्पन्न करता है। तनाव को अपरिवर्तित रखकर डोरी की लम्बाई कम की जाती है जब तक कि वह स्वरित्र के साथ स्वरमेल में न आ जावे। यदि इस अवस्था में डोरी की लम्बाई 99 से० मी० हो तो स्वरित्र की आवृत्ति ज्ञात करो।

उत्तर : 400 कम्पन/से०

(10) खुली हुई नली की कम से कम लम्बाई ज्ञात कीजिये जो कि 384 कम्पन/सिकन्ड आवृत्ति के स्वरित्र के साथ अनुनाद करे। (हवा में ध्वनि का वेग 1120 फीट प्रति सेकण्ड तथा अंत संशोधन उपेक्षणीय है) उत्तर : 1·46 फीट

(11) समान व्यास की दो आर्गन नलियों की लम्बाई क्रमशः 2·5 फीट और 5·2 फीट है। इनमें प्रथम पाइप का एक सिरा बंद है और द्वितीय के दोनों सिरे खुले हैं। यदि दोनों को एक साथ ध्वनित किया जाय तो 4 विस्पंद प्रति सेकण्ड सुनाई देते हैं। ध्वनि का वेग ज्ञात करो। (राज० वि वि० 1971)

उत्तर : 1040 फीट/से०

(12) माइकल्सन के प्रयोग में दोनों स्थिर अवतल दर्पणों के बीच की दूरी 37·5 किलोमीटर है। यदि प्रकाश का वेग 3×10^{10} से० मी०/सेकण्ड हो तो प्रतिबिम्ब की अचर स्थिति के लिए अष्टफलकी दर्पण द्वारा एक सेकण्ड में किये गये कम से कम चक्करों की संख्या ज्ञात करो। उत्तर : 500 चक्कर

14

डाप्लर प्रभाव
(Doppler Effect)

13·1 डाप्लर का प्रभाव

जब एक ध्वनि-स्रोत एक स्थिर प्रेक्षक की ओर गति करता है तो प्रेक्षक द्वारा सुनी गई ध्वनि का तारत्व या आवृति (Pitch) ध्वनि स्रोत की वास्तविक आवृति की अपेक्षा अधिक होता है। यदि ध्वनि स्रोत प्रेक्षक से दूर जाता है तो ध्वनि की *आवृत्ति में कमी हो जाती है। ध्वनि-स्रोत की आवृति मे उस समय भी परिवर्तन* अनुभव होता है जबकि प्रेक्षक स्थिर स्रोत की ओर या उससे दूर गति करता है। अत जब कभी भी ध्वनि स्रोत स्थिर प्रेक्षक की ओर गति करता है या प्रेक्षक स्थिर ध्वनि स्रोत की ओर गति करता है या प्रेक्षक और ध्वनि स्रोत के बीच आपेक्षिक गति (Relative Motion) होती है तो प्रेक्षक द्वारा प्राप्त ध्वनि की आवृति, ध्वनि स्रोत की वास्तविक आवृति से भिन्न होती है और इस आवृति को आभासी आवृति (Apparant Frequency) कहते हैं। प्रेक्षक तथा स्रोत के मध्य दूरी बढने पर आवृति में कमी और दूरी कम होने पर आवृति मे वृद्धि होती हैं।

यदि ध्वनि स्रोत तथा प्रेक्षक दोनो स्थिर हो या दोनो समान वेग से एक ही दिशा मे गति करे [इस स्थिति मे आपेक्षिक गति शून्य होगी] तो आभासी आवृत्ति ध्वनि स्रोत की वास्तविक आवृति के बराबर होगी। इस स्थिति मे प्रेक्षक प्रति सेकण्ड उतनी ही तरंगें प्राप्त करता है जितनी कि स्रोत एक सेकण्ड मे पैदा करता है।

ध्वनि-स्रोत तथा प्रेक्षक के बीच आपेक्षिक गति के कारण ध्वनि स्रोत की आवृति या तारत्व में होने वाले आभासी परिवर्तन (Apparant Change) को

डाप्लर का प्रभाव कहते हैं। *C. J. Doppler* ने सर्वप्रथम इस प्रभाव का अध्ययन किया।

जब एक रेल इंजन सीटी देता हुआ, तेजगति से, प्लेटफार्म पर खड़े एक व्यक्ति की ओर गति करता है तो उस व्यक्ति को सीटी की आवृति में वृद्धि का आभास होता है। परन्तु ज्योंही इंजन उस व्यक्ति के पास से गुजर एक दूर जाने लगता है तो सीटी की आवृत्ति में गिरावट (कमी) होती प्रतीत होती है।

डाप्लर का प्रभाव साधारणतया सभी तरग गतियों के लिए सत्य है। प्रकाश तरंगो में भी डाप्लर का प्रभाव देखा गया है। किसी दीप्त वस्तु (Luminous body) द्वारा उत्सर्जित प्रकाशतरंग की तरंग दैर्घ्य (wave length) उस वस्तु एवं प्रेक्षक के बीच आपेक्षिक गति के कारण परावर्तित हो जाती है। इस अध्याय में हम डाप्लर के प्रभाव से ध्वनि एवं प्रकाश तरंगों में होने वाले परिवर्तन का अध्ययन करेंगे।

14·2 ध्वनि तरंगों में डाप्लर प्रभाव

ध्वनि स्रोत तथा प्रेक्षक के बीच आपेक्षिक गति के कारण ध्वनि स्रोत की आभासी आवृत्ति की गणना विशेष परिस्थितियों में निम्न प्रकार की जाती हैं।

जब केवल ध्वनि स्रोत गति में है

इस अवस्था में प्रेक्षक तथा माध्यम दोंनों ही स्थिर है। केवल ध्वनि स्रोत प्रेक्षक की ओर तरंग गति की दिशा में गति कर रहा है।

माना कि O एक प्रेक्षक (Observer) है जो स्थिर है तथा स्थिर माध्यम में माने गये एक स्थिर निर्देश फ्रेम में स्थित है। S एक ध्वनि स्रोत है जो v_s वेग से प्रेक्षक की ओर गति कर रहा है। माना कि स्रोत की वास्तविक आवृत्ति ν है। यदि स्रोत तथा प्रेक्षक दोनों ही स्थिर हो तो प्रेक्षक द्वारा प्रति सेकण्ड प्राप्त कम्पनों की संख्या स्रोत की वास्तविक आवृति ν के बराबर होगी। इस स्थिति में

$$v = \nu \times \lambda \qquad \ldots\ldots(14{\cdot}1)$$

यहाँ v = ध्वनि का वेग

तथा λ = तरंग दैर्घ्य

$$\text{अत: } \nu = \frac{v}{\lambda} \qquad \ldots\ldots(14{\cdot}2)$$

अब कम्पित स्रोत S, प्रेक्षक O की ओर v_s वेग से t समय तक गति करता है। इसलिए t समय में तय की गई दूरी $v_s t$ होगी और कम्पित स्रोत S′ पर पहुँच जावेगा। यदि t समय में स्रोत N कम्पन करे तो अपने स्वयं के निर्देशफ्रेम में स्रोत की आवृति

$\nu = N/t$ होगी।

t समय में पहली तरंग माध्यम में vt दूरी तय कर लेगी जबकि N वी तरंग स्रोत के पास से चलना आरम्भ कर रही होगी । इसलिए

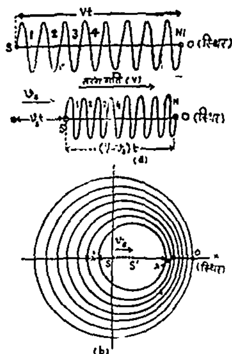
पहली तथा N वी तरंग के मध्य दूरी $=(vt-v_s)\,t$

$=(v-v_s)\,t$

क्योंकि $(v-v_s)t$ दूरी मे N तरगें हैं अत:

$$\text{तरग दैर्घ्य } \lambda' = \frac{(v-v_s)t}{N} \qquad \cdots\cdots(14{\cdot}4)$$

अत: तरगे सम्पीडित हो जाती है । निम्न चित्र यह स्थिति वृत एवं अनुदैर्ध्य तरगों के रूप मे स्पष्ट की गई है । वृत तरंगाग्र (wavefront) को प्रदर्शित करते हैं तथा दो तरंगाग्र के मध्य दूरी तरग दैर्घ्य के बराबर हैं ।]



चित्र—14 1

समीकरण (14·4) $\frac{N}{t}=v$ रखने पर

प्रेक्षक द्वारा प्राप्त तरंग की तरगदैर्ध्य (अभासी तरगदै

या $$\lambda'=\left(\frac{v-v_s}{v}\right)\lambda \quad ...(14\cdot5)$$

अतः अभासी आवृत्ति $\nu'=\frac{v}{\lambda'}$

या $$=\frac{v}{v-v_s}\cdot\frac{v}{\lambda}$$

$$\therefore \quad \boxed{\nu'=\left(\frac{v}{v-v_s}\right)\nu} \quad ...(14\cdot6)$$

इस प्रकार स्रोत के स्थिर प्रेक्षक की ओर गति करने के कारण प्रेक्षक द्वारा प्राप्त आवृति (आभासी आवृति) स्रोत की वास्तविक आवृति से अधिक होगी।

यदि स्रोत ध्वनि तरंगों के गमन की दिशा के विपरीत गति करे और इस प्रकार प्रेक्षक से दूर होता जावे तो v_s का मान ऋणात्मक होगा तथा आभासी आवृति

$$\boxed{\nu'=\left(\frac{v}{v+v_s}\right)\nu} \text{ होगा} \quad ...(14\cdot7)$$

इस अवस्था में आभासी आवृति वास्तविक आवृति से कम होगी और तरंगदैर्घ्य का मान होगा $\lambda'=\left(\frac{v+v_s}{v}\right)\lambda$ ...(1·48)

अतः स्रोत की गति के कारण आभासी आवृति को संयुक्त रूप से निम्न प्रकार दिया जाता है,

$$\boxed{\nu'=\left(\frac{v}{v\mp v_s}\right)\nu} \quad ...(1\cdot49)$$

जब केवल प्रेक्षक गति में है :—इस स्थिति में स्रोत और माध्यम दोनों स्थिर हैं। केवल प्रेक्षक कम्पित स्रोत की ओर गति कर रहा है।

मानाकि v_0 प्रेक्षक का वेग है। क्योंकि प्रेक्षक तरंगगति की दिशा के विपरीत दिशा में गति कर रहा है अतः v_0 ऋणात्मक होगी।

[$\therefore$ प्रेक्षक का वेग $=-v_0$] स्रोत स्थिर माध्यम में माने गये एक स्थिर निर्देशफ्रेम में स्थिर है।

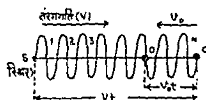
प्रेक्षक की गति के कारण, ध्वनि तरंगों का प्रेक्षक सापेक्ष वेग $=v+v_0$

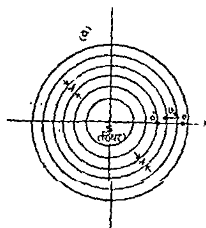
माना कि स्रोत t समय N तरंगें बनाता है। पहली तरंग t समय में vt दूरी तय कर लेती है जबकि N वी तरंग स्रोत के पास से आगे बढ़ने लगती है। अतः ये N तरंगें Vt दूरी में फैल जाती हैं जिससे $\nu=\frac{N}{t}$ तथा $\nu=\frac{v}{\lambda}$

क्योंकि प्रेक्षक या ध्वनि तरंगों का आपेक्षिक वेग $v+v_0$ है अतः N तरंगों को प्राप्त करने में प्रेक्षक द्वारा लिया गया समय $t'=\frac{vt}{v+v_0}$

$\therefore$ एक सेकण्ड मे तरंगो की संख्या $\nu'=\frac{N}{t'}$

t' का मान रखने पर $\nu'=\frac{N}{\frac{vt}{v+v_0}}$





(b)

चित्र 14·2

$$\nu'=\left(\frac{v+v_0}{v}\right)\nu \qquad *...(14{\cdot}10)$$

अर्थात् जब कोई प्रेक्षक स्रोत की ओर गति करता है तो अभासी आवृति
क आवृति से अधिक होती है। परन्तु यदि प्रेक्षक स्रोत से दूर जा रहा हो
मासी आवृति निम्न सूत्र से दी जावेगी।

$$\nu'=\left(\frac{v-v_0}{v}\right)\nu \qquad ...(14{\cdot}11)$$

अतः प्रेक्षक की गति के कारण आभासी आवृति को संयुक्त रूप से निम्न
कार दिया जाता है।

$$\nu'=\left(\frac{v\pm v_0}{v}\right)\nu \qquad ...(14{\cdot}13)$$

जब प्रेक्षक और ध्वनि स्रोत दोनों ही गति में है :—इस स्थिति में प्राप्त आभासी आवृति की गणना (अ) तथा (ब) परिस्थितियों के परिणामों की सहायता से की जा सकती है।

माना कि स्रोत तथा प्रेक्षक दोनों हो तरंगगति की दिशा में क्रमशः v_s और v_0 वेग से गति कर रहे हैं। इसलिए v_s और v_0 का मान धनात्मक होगा।

यदि आरम्भ में प्रेक्षप को स्थिर माना जावे, तो स्रोत की गति के कारण आभासी आवृति

---

*प्रेक्षक के गति में होने पर आभासी आवृति अन्य विधि से निकाली जा सकती है।

यदि प्रेक्षक व स्रोत दोनों ही स्थिर हो तो t सेकण्ड में प्रेक्षक द्वारा प्राप्त तरंगों की संख्या $=\frac{vt}{\lambda}$ (λ=तरंगदैर्घ्य)। लेकिन प्रेक्षक का v_0 वेग से स्रोत की ओर गति करने के कारण प्रेक्षक, t समय में, v_0t दूरी में व्याप्त तरंगों को भी सु
लेता है।

v_0t दूरी में व्याप्त तरंगों की संख्या $=\frac{v_0t}{\lambda}$

t समय में प्राप्त होने वाली तरंगों की संख्या $=\frac{vt}{\lambda}$

$\therefore$ अभासी आवृति = एक सेकण्ड में प्राप्त होने वाली तरंगों की

$$\therefore \quad \nu'=\left(\frac{vt}{\lambda}+\frac{v_0t}{\lambda}\right)\Big/ t=\nu+\frac{v_0}{v}\,\nu=\left(\frac{v+v_0}{v}\right)\nu$$

$$\nu'=\frac{v}{v-v_s}\cdot\nu$$

अब यदि प्रेक्षक भी गति करने लगें तो आभासी आवृति

$$\nu''=\frac{v-v_0}{v}\cdot\nu'$$

ν' का मान रखने पर

$$\nu''=\frac{v-v_0}{v+v_s}\,\nu \qquad \ldots(14{\cdot}13\ a)$$

यदि प्रेक्षक और स्रोत दोनों ही तरंगगति की दिशा के विपरीत गति कर रहे हो तो

$$\nu''=\frac{v+v_0}{v+v_s}\,\nu \qquad \ldots(14{\cdot}13\ b)$$

(द) जब प्रेक्षक, ध्वनि-स्रोत तथा माध्यम, तीनों गति में है—यदि माध्यम तरग गति की दिशा मे W वेग से गति करे तो ध्वनि तरंग का वेग $(v+W)$ हो जायेगा। अतः समीकरण (14·13) मे v को स्थान पर $(v+W)$ रखने पर, आभासी आवृति

$$\nu''=\frac{v+W-v_o}{v+W-v_s}\nu \qquad \ldots(14{\cdot}14)$$

यदि माध्यम तरग गति के विपरीत दिशा मे गति करे तो ध्वनि तरंग का वेग $(V-W)$ होगा और आभासी आवृति

$$\nu''=\frac{v-W-v_o}{v-W-v_s}\nu \qquad \ldots(14{\cdot}15)$$

उपरोक्त सूत्र मे यदि $v_s=v_o$ हो, तो

$$\nu''=\nu$$

आभासी आवृति=वास्तविक आवृति

14·3. प्रकाश तरंगों में डाप्लर प्रभाव

डाप्लर का प्रभाव ध्वनि तरगो के समान, प्रकाश तरगो के लिए भी प्रभावी होता है। लेकिन प्रकाश के वेग के बहुत अधिक होने के कारण दूरस्थ तारों, खगोलीय पिण्डो या गैलेक्सी द्वारा उत्सर्जित प्रकाश तरगदैर्घ्य या आवृति में परिवर्तन साधारण तथा अनुभव नही होता। दूरस्थ तारों या गैलेक्सी से आने वाले प्रकाश तरंगो के स्पेक्ट्रमी विश्लेषण (Spectroscopic Analysis) से ज्ञात होता है कि कुछ स्पेक्ट्रमी रेखाओं (Spectral lines) की तरगदैर्घ्य मे विस्थापन (Shift) हो जाता है।

यह विस्थापन डाप्लर; विस्थापन (Doppler Shift) कहलाता है तथा उस दूरस्थ तारे या गैलेक्सी की पृथ्वी की ओर या उससे दूर गति करने के कारण होता है। डाप्लर विस्थापन का मान दूरस्थ तारों या गैलेक्सी से प्राप्त स्पेक्ट्रमीरेखाओं की तरंगदैर्ध्य तथा पृथ्वी पर उन्ही पदार्थो से प्राप्त स्पेक्ट्रम में वैसा ही स्पेक्ट्रमीरेखाओं कीं तरंगदैर्ध्य की तुलना कर ज्ञात किया जाता है।

जब दूरस्थतारा या गैलेक्सी पृथ्वी से दूर गति करता है तो स्पेक्ट्रमी रेखा स्पेक्ट्रम के लाल सिरे (Red end of the Spectrum) की ओर विस्थापित होती (इस स्थिति में तरंगदैर्ध्य से वृद्धि होगी) और यदि गति पृथ्वी की ओर हो तो स्पेक्ट्रमीरेखा स्पेक्ट्रम के बैंगनी सिरे (Voilet end of the Spectrum) की ओर विस्थापित होती है (इस स्थिति में तरंगदैर्ध्य में कमी होगी)।

प्रकाश स्रोत की गति के कारण तरंग दैर्ध्य में होने वाले परिवर्तन की गणना

माना कि

दूरस्थ तारे या गैलेक्सी आदि से प्राप्त स्पेक्ट्रमी रेखा की वास्तविक तरंग दैर्ध्य $= \lambda$

दूरस्थ तारे या गैलेक्सी आदि से प्राप्त स्पेक्ट्रमी रेखा की परिवर्तित तरंग दैर्ध्य $= \lambda'$

पृथ्वी की ओर गति कर रहे प्रकाश स्रोत (दूरस्थ तारा या गैलेक्सी आदि) का वेग $= v$

प्रकाश का वेग $= c$

समीकरण (14·5) के द्वारा, आभासी तरंग दैर्ध्य

$$\lambda' = c - v/\lambda/c \quad \text{(स्रोत के समीप आने पर)}$$

या $\lambda'/\lambda = 1 - v/c$

या $\lambda' - \lambda/\lambda = -v/c$ [यदि $\lambda' - \lambda = \Delta\lambda$)

(डाप्लर विस्थापन)

$$\therefore \quad \Delta\lambda/\lambda = -v/c \quad \cdots(14\cdot16)$$

इसी प्रकार स्रोत के पृथ्वी से दूर जाने पर

$$\Delta\lambda/\lambda = +v/c \quad \cdots(14\cdot17)$$

समीकरण (14·16) और (14·17) को संयुक्त रूप से लिखने पर, तरंग दैर्ध्य में परिवर्तन

$$\boxed{\Delta\lambda/\lambda = \pm v/c} \quad \cdots(14\cdot18)$$

स्पेक्ट्रमी रेखाओं के लिए $\Delta\lambda$ का मापन फोटो की प्लेट (Photographic

plate) की सहायता से किया जाता है । $\Delta\lambda$, λ तथा c का मान ज्ञात होने पर 'v' प्रकाश स्रोत का वेग उक्त समीकरण द्वारा निकाला जा सकता है ।

यहाँ यह बता देना उपयुक्त होगा कि प्रकाश स्रोत के प्रेक्षक की ओर गति प्रेक्षक की प्रकाश स्रोत की ओर गति करने के कारण प्रकाश तरंग मे होने वाले परिवर्तन मे कोई अन्तर नही होता । यह पृथ्वी एव अन्य ग्रह अथवा गैलेक्सी, दूरस्थ तारों आदि के बीच किसी भी माध्यम के न होने के कारण है जिसकी पुष्टि सापेक्ष वाद के सिद्धान्त (Theory of Relativity) के द्वारा कर दी गई है । ध्वनि तरंगों के लिए इन दोनो परिस्थितियो में प्राप्त आभासी आवृत्ति या तरंग दैर्घ्य में अन्तर माध्यम के होने के कारण है ।

H.E. IVES तथा G.R. STILWELL नामक वैज्ञानिकों ने हाइड्रोजन गैस का प्रयोग करते हुए इन परिणामो की यथार्थता को सिद्ध कर दिया है ।

सापेक्षवाद के सिद्धान्त (Theory of Relativity) के आधार पर प्राप्त प्रकाश स्रोत की आभासी आवृत्ति का मान निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है ।

$\nu' = (1 - v/c)\nu\sqrt{1-(v/c)^2}$ (प्रेक्षक एव प्रकाश स्रोत दूर जा रहे हैं)

तरंग दैर्घ्य के रूप में सूत्र

$\lambda' = \lambda\sqrt{1-(v/c)^2/1-v/c}$

$\therefore \quad \lambda' = \lambda\sqrt{(1+v/c)(1-v/c)}$

v/c का मान कम होने के कारण, v/c की उच्चघातों को छोड़ने पर

$\Rightarrow \lambda' = (1+v/c)\lambda$

उक्त समीकरण का मान समीकरण (14·17) के समान ही है

---

14 4 डाप्लर के प्रभाव का महत्व

खगोल भौतिकी (Astrophysics) मे डाप्लर के प्रभाव का बहुत महत्व है । डाप्लर विस्थापन को ज्ञात कर यह पता लगा लिया जाता है कि कोई खगोलीय पिण्ड किस वेग से पृथ्वी की ओर या पृथ्वी से दूर जा रहा है । विभिन्न गैलेक्सी के लिए किये गये प्रेक्षणों से ज्ञात हुआ है कि ये हमसे दूर भाग रही हैं तथा इनका दूर हटने का वेग अधिक दूरी पर स्थित गैलेक्सी के लिए अधिक है । वास्तव मे ये प्रेक्षण ही प्रसारी विश्व धारणा (Expanding Universe Concept) के आधार है । डाप्लर का प्रभाव सूर्य के घूर्णन का वेग (Rotation of the Sun) ज्ञात करने मे भी अनुप्रयोग होता है ।

संख्यात्मक प्रश्न

उदाहरण 14·1 सिद्ध करो कि किसी स्थिर प्रेक्षक की ओर गति करने वाले स्रोत के स्वर का आभासी तारत्व (Apprant pitch) उस स्रोत को स्थिर रख, प्रेक्षक के स्रोत के वेग से स्रोत की ओर गति करने पर प्राप्त तारत्व की अपेक्षा अधिक होता है।

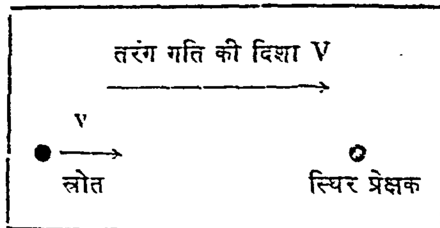
यदि प्रेक्षक और स्रोत दोनों ही तरंगगति की दिशा में क्रमशः v_o और v_s वेग से गति करें तो आभासी आवृत्ति

$$\nu''=(V-v_o)\nu/V-v_s$$

यहाँ $V=$ध्वनि का वेग

$\nu=$स्रोत की वास्तविक आवृत्ति

प्रथम स्थिति में—



$v_o=0$ तथा स्रोत तरंगगति की दिशा में गमन करता है

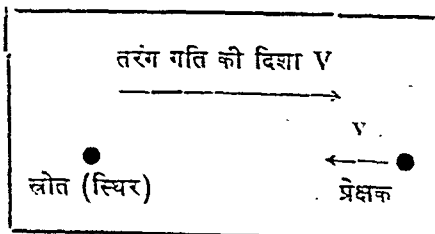
माना कि स्रोत का वेग $=v$

तथा यह धनात्मक है।

$$\therefore \qquad \nu'=\frac{V}{V-v}\nu \qquad \cdots(1)$$

$\nu'=$आभासी आवृत्ति

द्वितीय स्थिति में—



$v_s=0$ तथा प्रेक्षक तरंगगति के विपरीत दिशा में गमन करता है।

प्रेक्षक का वेग$=v=$स्रोत का वेग तथा यह ऋणात्मक है।

अतः आभासी आवृत्ति ν'' का मान

$$\nu''=\frac{V+v}{V}\nu \qquad \cdots(2)$$

यदि ν' का मान ν'' से अधिक है तो

$$\nu'-\nu''=(+) \text{ धनात्मक होना चाहिए}$$

समीकरण (1) व (2) की सहायता से

$$\nu'-\nu''=\left[\frac{V}{V-v}-\frac{V+v}{V}\right]\nu$$

या
$$=\frac{v^2}{V(V-v)}\nu$$

$\therefore$ $\nu'-\nu''=$ धनात्मक है (v का मान V से कम होने पर)

$$\boxed{\nu'>\nu''}$$

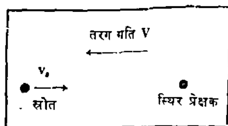
अत: प्रथम स्थिति मे आभासी आवृति द्वितीय स्थिति की आभासी आवृति अधिक है।

उदाहरण 14·2. एक इजन की सीटी का तारत्व उसके प्रारम्भिक मान 5/6 गिरता हुआ प्रतीत होता है जबकि इजन स्थिर प्रेक्षक को पार करता है। जन के वेग की गणना करो। (ध्वनि का वेग=1100 फीट/सेकण्ड)

आभासी आवृति या तारत्व का मान जबकि स्रोत और प्रेक्षक दोनो तरग ति की दिशा मे गमन करते हैं—

$$\nu''=\frac{V-v_0}{V-v_s}\nu$$

प्रथम स्थिति मे—



प्रेक्षक स्थिर है अत. $v_0=0$ और माना कि इजन v_s वेग से प्रेक्षक की ओर गति कर रहा है (v_s धनात्मक है)

V=1100 फीट प्रति सेकण्ड

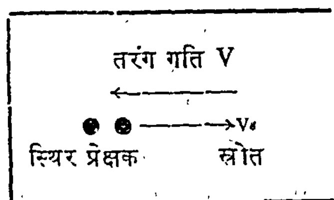
अत. आभासी आवृत्ति ν' का मान

$$\nu'=\frac{V}{V-v_s}\nu$$

V का मान रखने पर

$$\nu' = \frac{1100}{1100 - v_s} . \nu \qquad ...(1)$$

द्वितीय स्थिति में—



v_s का मान ऋणात्मक होगा

अतः आपसी-आवृत्ति ν'' का मान $\nu'' = \frac{V}{V + v_s} \nu$, V का मान रखने पर

$$\nu'' = \frac{1100}{1100 + v_s} \nu \qquad ...(2)$$

समीकरण (2) को (1) से भाग देने पर

$$\frac{\nu''}{\nu'} = \frac{1100 - v_s}{1100 + v_s}$$

$$\text{लेकिन } \frac{\nu''}{\nu'} = \frac{5}{6} \text{ (दिया हुआ)}$$

अतः $$\frac{5}{6} = \frac{1100 - v_s}{1100 + v_s}$$

या $5500 + 5v_s = 6600 - 6v_s$

या $5v_s + 6v_s = 6600 - 5500$

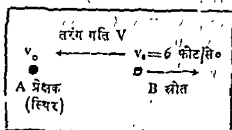
या $11v_s = 1100$

$\therefore$ $v_s = 100$ फीट/सेकण्ड

अतः इंजन का वेग 100 फीट प्रति सेकण्ड है ।

उदाहरण 14·3. दो प्रेक्षक A तथा B दोनों के पास 500 आवृत्ति के स्रोत हैं। A स्थिर है और B इससे दूर 6 फीट/सेकण्ड के वेग से गति करता है। A तथा B के द्वारा कितने विस्पंद प्रति सेकण्ड सुनाई देंगे ? ध्वनि का वेग 1100 फीट/सेकण्ड है।

प्रथम स्थिति मे—



माना कि A प्रेक्षक है और B का स्रोत ध्वनि उत्पन्न करता है।
आभासी आवृत्ति के लिए सूत्र

$$\nu'' = \frac{V - v_0}{V - v_s} \nu$$

(जब प्रेक्षक और स्रोत दोनो ही तरंग गति की दिशा मे गति करते हैं)
इस स्थिति मे $v_0 = 0$ तथा v_s का मान ऋणात्मक है।

∴ $v_s = +6$ फीट/सिकण्ड
$V = 1100$ फीट/सिकण्ड
$\nu = 500$ कम्पन/सिकण्ड

अत: आभासी आवृत्ति ν'' का मान

$$\nu'' = \frac{V}{V + v_s} \nu$$

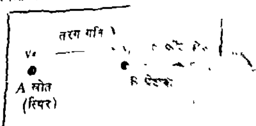
या $\nu'' = \frac{1100}{1100 + 6} \times 500$

या $\nu'' = \frac{550000}{1106} = 497\ 3$

अत: A के द्वारा B की सुनी हुई आवृत्ति 49[illegible]
स्वयं की आवृत्ति $\nu = 500$ कम्पन/सेकण्ड

∴ A द्वारा सुने गये विस्पद $= 500 - 49$[illegible]
$= 2$[illegible]

द्वितीय स्थिति मे—



माना कि प्रेक्षक B है और A का स्रोत ध्वनि उत्पन्न करता है ।

इस स्थिति में $v_0=6$ फीट/से० (धनात्मक)

तथा $v_s=0$

अतः $$\nu''=\frac{V-v_0}{V}\nu$$

या $$\nu''=\frac{1100-6}{1100}\times 500$$

या $$=\frac{1094\times 500}{1100}$$

$$\nu''=\frac{5470}{11}=497\cdot 3$$

∴ B द्वारा प्राप्त प्रति सेकण्ड विस्पंद $=500-497\cdot 3$
$=2\cdot 7$

अतः A और B दोनों को ही 2·7 या 3 विस्पंद (Approximate) प्रति सेकण्ड प्राप्त होंगे ।

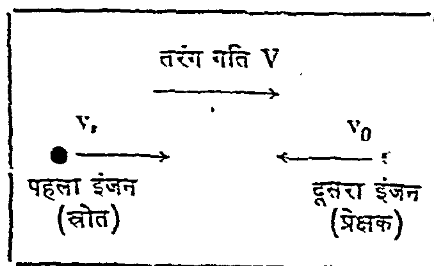
14·4 उदाहरण—विपरीत दिशा में दो इंजन एक दूसरे की तरफ 30 मील प्रति घण्टे के समान वेग से आ रहे हैं । एक इंजन 540 कम्पन । से की आवृत्ति की सीटी बजाता है । दूसरे इंजन का ड्राइवर, एक दूसरे के पास से गुजरने से पहले और बाद में कौन सी आवृत्ति की सीटी सुनेगा ?

[हवा में ध्वनि का वेग=1144 फीट/सेकण्ड] (राज० 1972)

आभासी आवृत्ति का मान जबकि स्रोत एवं प्रेक्षक दोनों तरंग गति की दिशा में गमन करते है

$$\nu''=\frac{V-v_0}{V-v_s}\nu$$

प्रथम स्थिति में—



इस स्थिति मे प्रेक्षक (दूसरे इंजन का ड्राइवर) तरग गति के विपरीत दिशा में गमन कर रहा है अतः v_0 का मान ऋणात्मक होगा।

$\therefore$ आभासी आवृत्ति $\nu' = \frac{V+v_0}{V-v_s}\,\nu$ दिया हुआ

$V=1144$ फीट/सि०

$v_0 = v_s = 30$/घं०

$\therefore \quad v_s = v_0 = \frac{30\times 22}{51} = 44$ फीट/सि०

और $\nu = 540$ कम्पन/सि०

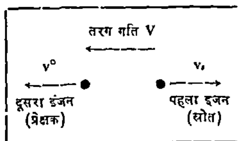
$$\therefore \quad \nu' = \left(\frac{1144+44}{1144-44}\right) 540$$

$$\text{या} \quad \nu' = \frac{1188}{1100} \times 540$$

$$\text{या} \quad \nu' = \frac{2916}{5}$$

$\therefore \quad \nu' = 583{\cdot}2$ कम्पन प्रति सेकण्ड

द्वितीय स्थिति मे—



इस स्थिति में स्रोत के वेग v_s का मान ऋणात्मक होगा। अतः आभासी

आवृति $\nu'' = \frac{V-v_0}{V+v_s}\,\nu$

V, v_s, v_0 तथा ν का मान रखने पर

$$\nu'' = \left(\frac{1144-44}{1144+44}\right) \times 540$$

या $\nu'' = \frac{1100}{1188} \times 540$

या $\nu'' = 500$ कम्पन/सेकण्ड

अतः दूसरे इंजन के ड्राइवर को सीटी की आवृत्ति

(a) एक दूसरे के पास से गुजरने के पहले 583·2 कम्पन/सेकण्ड

(b) एक दूसरे के पास से गुजरने के बाद 500 कंपन/सेकण्ड सुनाई देगी।

प्रश्न

सैद्धान्तिक प्रश्न

(1) डाप्लर का प्रभाव क्या है ? यदि ध्वनि-स्रोत तथा स्रोता दोनों एक ही दिशा में एक ही गति से चल रहे हों तब डाप्लर प्रभाव होगा या नहीं ?

(2) ध्वनि-तरंगों में डाप्लर प्रभाव के कारण आभासी आवृत्ति के लिए समीकरण प्राप्त करिये जब स्रोत तथा श्रोता दोनों गति शील हों।

(3) प्रकाश-तरंगों में डाप्लर प्रभाव का वर्णन करिये तथा प्रकाश स्रोत की गति के कारण तरंग दैर्ध्य में होने वाले परिवर्त्तन की गणना करिये। खगोल भौतिकी में डाप्लर के प्रभाव का महत्त्व बताइये।

संख्यात्मक प्रश्न

(4) 30 मील/घंटा की गति के इंजन की सीटी, 15 मील/घंटा की गति कर रही मोटर में बैठा एक व्यक्ति सुनता है जिसे इसकी आवृत्ति 500 प्रतीत होती है। लगभग पूर्ण संख्या में सीटी की वास्तविक आवृति क्या होनी चाहिए :

(अ) दोनों विपरीत दिशाओं में गति करते हो परन्तु एक दूसरे की ओर अग्रसर होते हों,

(ब) दोनों विपरीत दिशाओं में गति करते हो परन्तु एक दूसरे से दूर,

(स) दोनों एक ही दिशा में गति करते हो परन्तु मोटर इंजन के पीछे हैं,

(द) दोनों एक ही दिशा में गति करते हो परन्तु मोटर इंजन के आगे हो।

(ध्वनि का वेग = 1200 फीट/सेकण्ड)

उत्तर : [(अ) 474 कम्पन/से०
(ब) 528 कम्पन/से०
(स) 509 कम्पन/से०
(द) 491 कम्पन/से०]

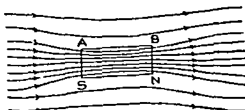
भाग 2

पदार्थों के चुम्बकीय गुण	स्थिर विद्युतिकी	धारा-विद्युत
ताप-विद्युत	प्रत्यावर्त्ती-धारा	परमाणु-भौतिकी
द्रव्य-तरंग	रेडियो एक्टिवता	इलेक्ट्रॉनिकी

1 पदार्थों के चुम्बकीय गुण
(MAGNETIC PROPERTIES OF MATERIALS)

1·1. चुम्बकन की तीव्रता
1·2. चुम्बकीय प्रवृत्ति
1·3. चुम्बकशीलता
1·4. B, H और I में सम्बन्ध
1·5. B–H वक्र और चुम्बकीय शैथिल्य या हिस्टेरेसिस
1·6. अनुचुम्बकीय पदार्थ
1·7. प्रतिचुम्बकीय पदार्थ
1·8. लोहे-चुम्बकीय पदार्थ
1·9. क्यूरी का नियम और क्यूरी ताप
1·10. इलेक्ट्रान सिद्धान्त पर चुम्बकत्व का स्पष्टीकरण

यह प्रायः देखा जाता है कि जब लोहे की एक अचुम्बकित छड़ को चुम्बकीय क्षेत्र में रखा जाता है तो चुम्बकीय प्रेरण (Magnetic Induction) के कारण



चित्र 1·1

वह चुम्बकित हो जाती है। यदि एक समान चुम्बकीय क्षेत्र (uniform magnetic field) में लोहे की एक छड़ (Rod) A B को चित्र (1 1) के अनुसार रखा जाये

तो वह चुम्बकित हो जाती है। छड़ का A सिरा, जिसमें से बल रेखायें छड़ में प्रवेश कर रही हैं दक्षिणी ध्रुव 'S'(South pole) बनता है जबकि B सिरा उत्तरी ध्रुव 'N' (North pole)। इस प्रकार छड़ में चुम्बकीय बल रेखायें उत्पन्न हो जाती हैं और A से B की ओर क्षेत्र की दिशा में होती हैं। ये रेखायें छड़ में बहुत पास-पास होती हैं। जिससे इसमें बल रेखाओं का संकेन्द्रण (Concentration) बढ़ जाता है। छड़ के अन्दर उत्पन्न हुई इन रेखाओं को प्रेरण रेखायें (Lines of Induction) कहते हैं। चुम्बकित छड़ के अन्दर किसी भी बिन्दु पर परिणमित क्षेत्र को प्रायः B से प्रदर्शित करते हैं जिसे चुम्बकीय फ्लक्स घनत्व (Magnetic flux density) या चुम्बकीय प्रेरण (Magnetic Induction) कहते हैं।

चुम्बकीय पदार्थ के इकाई क्षेत्र में से लम्बवत गुजरने वाली प्रेरण रेखाओं की संख्या चुम्बकीय फ्लक्स घनत्व कहलाती है। M. K. S पद्धति में चुम्बकीय फ्लक्स घनत्व की इकाई (unit) वेबर मीटर$^{-2}$ है।

[C. G. S. पद्धति में चुम्बकीय फ्लक्स घनत्व की इकाई गॉस (Gauss) है]

और $\quad$ 1 वेबर मीटर$^{-2}$ = 10^4 गॉस

चुम्बकीय पदार्थ के किसी क्षेत्र में से लम्बवत गुजरने वाली प्रेरण रेखाओं की संख्या उस क्षेत्र का चुम्बकीय फ्लक्स (Magnetic flux) कहलाता है। M. K. S. पद्धति में इसकी इकाई वेबर है।

[C. G. S. पद्धति में चुम्बकीय फ्लक्स की इकाई मैक्सवेल (Maxwell) है]

और $\quad$ वेबर = 10^8 मैक्सवेल

1·1. चुम्बकन की तीव्रता (Intensity of Magnetisation)

किसी चुम्बकित पदार्थ (Magnetised material) के प्रति इकाई आयतन चुम्बकीय-आघूर्ण (Magnetic moment) को उस चुम्बकित पदार्थ की चुम्बकन की तीव्रता (Intensity of magnetisation) कहते हैं। इसे प्रायः I से प्रदर्शित करते हैं। अतः

$$\text{चुम्बकन की तीव्रता (I)} = \frac{\text{चुम्बकीय आघूर्ण (M)}}{\text{आयतन (V)}} \quad \ldots(1{\cdot}1)$$

यदि चुम्बकित पदार्थ एक छड़ के रूप में है जिसकी लम्बाई l तथा अनुप्रस्थ काट-क्षेत्र (Area of cross section) A है तो छड़ का आयतन

$$V = l \times A$$

यदि m = ध्रुव-प्राबल्य तो

$$M = ml$$

अतः समीकरण (1·1) द्वारा,

$$I = \frac{ml}{lA}$$

$$I = \frac{m}{A} = \frac{\text{ध्रुव-प्राबल्य}}{\text{अनुप्रस्थ क्षेत्रफल}} \quad ....(1·2)$$

इसलिए चुम्बकन की तीव्रता की परिभाषा निम्न प्रकार भी दी जा सकती है : किसी चुम्बकित पदार्थ के लिए चुम्बकन की तीव्रता उसके प्रति इकाई अनुप्रस्थ *क्षेत्रफल के ध्रुव-प्राबल्य के बराबर होती है।*

एक समान रूप से चुम्बकित लम्बी एवं पतली छड़ के लिए

I = प्रति इकाई अनुप्रस्थ क्षेत्र का ध्रुव-प्राबल्य

या I = प्रति इकाई अनुप्रस्थ क्षेत्र का चुम्बकीय फ्लक्स

I = छड़ में चुम्बकीय-फ्लक्स-घनत्व (B)

अतः I की इकाई B की इकाई के समान ही है।

1·2. चुम्बकीय प्रवृत्ति (Magnetic Susceptibility)

किसी चुम्बकीय पदार्थ में उत्पन्न चुम्बकन की तीव्रता (I) उस पदार्थ पर आरोपित चुम्बकन क्षेत्र की तीव्रता (H) के समानुपाती होती है अर्थात

$$I \propto H$$

या $$I = k\,H \quad ....(1·3)$$

M. K. S. पद्धति में,

$$I = k\mu_0 H$$

अतः $$k = \frac{I}{\mu_0 H} \quad ...(1·4)$$

यहाँ k एक नियतांक है और इसे चुम्बकीय पदार्थ की चुम्बकीय प्रवृत्ति कहते हैं। μ_0 रिक्त-स्थान (Free space) की परम चुम्बकशीलता है। क्योंकि I और $\mu_0 H$ की विमायें समान ही हैं अतः k एक संख्यात्मक नियतांक है जिसका मान विभिन्न चुम्बकीय पदार्थों के लिए भिन्न-भिन्न होता है।

अतः किसी चुम्बकीय पदार्थ की चुम्बकीय प्रवृत्ति, उसमें उत्पन्न चुम्बकन की तीव्रता और उसे उत्पन्न कर रहे चुम्बकन क्षेत्र की तीव्रता के अनुपात के बराबर होती है।

1·3 चुम्बकशीलता (Magnetic Permeability)

यह पहले ही बताया जा चुका है कि किसी लोहे की छड़ को, जब क्षेत्र (Magnetising field) में रखा जाता है तो उसमें से गुजरने वाली बल

बहुत पास-पास हो जाती हैं। इस कारण छड़ में बल रेखाओं का सकेन्द्रण (Concentration) बढ़ जाता है और निर्वात (Vacuum) की अपेक्षा उसमें से गुजरने वाली बल रेखाओं की संख्या अधिक होती है।

किसी चुम्बकीय पदार्थ में उसके इकाई क्षेत्र से लम्बवत् गुजरने वाली बल रेखाओं की संख्या और चुम्बकन क्षेत्र के कारण निर्वात में उसके इकाई क्षेत्र से लम्बवत् गुजरने वाली बल रेखाओं के अनुपात को उस पदार्थ की चुम्बकशीलता (Magnetic Permeability) कहते हैं। चुम्बकशीलता को निम्न प्रकार भी परिभाषित किया जाता है।

किसी चुम्बकीय पदार्थ या माध्यम (Medium) में किसी बिन्दु पर चुम्बकीय फलक्स-घनत्व (B) और चुम्बकन क्षेत्र (H) के अनुपात को उस बिन्दु पर पदार्थ या माध्यम की परम चुम्बकशीलता (Absolute Permeability) कहते हैं। परम चुम्बकशीलता को प्रायः μ से प्रदर्शित करते हैं और इसका मान पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करता है। अतः

$$\mu = \frac{B}{H} \qquad ....(1\cdot5)$$

क्योंकि $\mu = \mu_o \mu_r$ ....(1·6)

यहाँ μ_o = रिक्त स्थान (Free space) की परम चुम्बकशीलता
$= 4\pi \times 10^{-7}$ वेबर-एम्पियर$^{-1}$—मीटर$^{-1}$ या
हैनरी-मीटर$^{-1}$ (M.K.S. पद्धति में)

μ_r = चुम्बकीय पदार्थ या माध्यम की आपेक्षिक चुम्बकशीलता (Relative permeability)

और μ = चुम्बकीय पदार्थ या माध्यम की परम-चुम्बकशीलता

अतः $$\mu = \mu_o \mu_r = \frac{B}{H} \qquad ....(1\cdot7)$$

[C. G. S. पद्धति में $\mu_o = 1$, $\therefore \mu = \mu_r = \frac{B}{H}$]

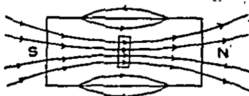
1·4 B, H और I में सम्बन्ध

B, H और I तथा μ_r और k में सम्बन्ध निम्न प्रकार स्थापित किया जा सकता है :

चित्र (1·2) के अनुसार एक चुम्बकित पदार्थ में क्षेत्र की दिशा के लम्बरूप अत्यन्त सूक्ष्म मोटाई (Infinitesimal thickness) के एक खाँचे (Slot) की कल्पना कीजिये। इस खाँचे में चुम्बकीय-फलक्स-घनत्व दो कारणों से होगा।

(1) खांचे के दोनों ओर चुम्बकित पदार्थ के कारण। इस कारण खांचे के प्रति इकाई क्षेत्र में से लम्बरूप निकलने वाला चुम्बकीय फ्लक्स अर्थात् चुम्बकीय-फ्लक्स-घनत्व (B) का मान चुम्बकन की तीव्रता (I) के बराबर है।

(2) चुम्बकित पदार्थ के दूर वाले भागों और चुम्बकन क्षेत्र के कारण। इस कारण चुम्बकीय-फ्लक्स-घनत्व $\mu_o H$ के बराबर है।



चित्र 1·2

अतः चुम्बकीय-फ्लक्स-घनत्व (B) का मान

$$B = \mu_o H + I \qquad ....(1 \cdot 8)$$

एक बन्द लूप (Closed loop) के रूप में लिए गए स्थायी चुम्बक के लिए

$$B = I \qquad ....(1 \cdot 9)$$

क्योंकि यहाँ चुम्बकन क्षेत्र नहीं है जिससे $H = O$

समीकरण (1·8), (1·4) व (1·7) की सहायता से-

$$B = \mu_o H + I$$

या $\mu_o \mu_r H = \mu_o H + k \mu_o H$

$$\therefore \quad \mu_r = 1 + k \qquad ....(1 \cdot 10)$$

अर्थात् आपेक्षिक चुम्बकशीलता = 1 + चुम्बकीय प्रवृत्ति

लोह-चुम्बकीय पदार्थों (Ferro magnetic materials) के लिए $k >> 1$ जिससे μ_r का मान भी k की कोटि का ही होता है। कुछ चुम्बकीय पदार्थों के लिए k का मान 1 के सापेक्ष बहुत कम होता है। इस कारण μ_r का मान 1 के ही लगभग होता है। हवा के लिए $\mu_r = 1 \cdot 0000004$ अर्थात $k = 4 \times 10^{-7}$.

C. G. S. पद्धति में समीकरण (1·8) को निम्न रूप में लिखा जावेगा :

$$\boxed{B = H + 4\pi I}$$

1·5. B H वक्र और चुम्बकीय शैथिल्य या हिस्टेरिसिस (Hysterisis)

किसी चुम्बकीय पदार्थ पर, चक्रीय रूप में परिवर्तित हो रहे चुम्ब (Magnetic field) के प्रभाव का अध्ययन सर्वप्रथम Sir J. A. Ewing ने

बहुत पास-पास हो जाती हैं। इस कारण छड़ में बल रेखाओं का सकेन्द्रण (Concentration) बढ़ जाता है और निर्वात (Vacuum) की अपेक्षा उसमें से गुजरने वाली बल रेखाओं की संख्या अधिक होती है।

किसी चुम्बकीय पदार्थ में उसके इकाई क्षेत्र से लम्बवत् गुजरने वाली बल रेखाओं की संख्या और चुम्बकन क्षेत्र के कारण निर्वात में उसके इकाई क्षेत्र से लम्बवत् गुजरने वाली बल रेखाओं के अनुपात को उस पदार्थ की चुम्बकशीलता (Magnetic Permeability) कहते हैं। चुम्बकशीलता को निम्न प्रकार भी परिभाषित किया जाता है।

किसी चुम्बकीय पदार्थ या माध्यम (Medium) में किसी विन्दु पर चुम्बकीय फ्लक्स-घनत्व (B) और चुम्बकन क्षेत्र (H) के अनुपात को उस विन्दु पर पदार्थ या माध्यम की परम चुम्बकशीलता (Absolute Permeability) कहते हैं। परम चुम्बकशीलता को प्रायः μ से प्रदर्शित करते हैं और इसका मान पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करता है। अतः

$$\mu = \frac{B}{H} \qquad \text{....(1·5)}$$

क्योंकि $\mu = \mu_o \mu_r$ ....(1·6)

यहाँ μ_o = रिक्त स्थान (Free space) की परम चुम्बकशीलता
$= 4\pi \times 10^{-7}$ वेबर-एम्पियर$^{-1}$—मीटर$^{-1}$ या
हैनरी-मीटर$^{-1}$ (M.K.S. पद्धति में)

μ_r = चुम्बकीय पदार्थ या माध्यम की आपेक्षिक चुम्बकशीलता (Relative permeability)

और μ = चुम्बकीय पदार्थ या माध्यम की परम-चुम्बकशीलता

अतः
$$\mu = \mu_o \mu_r = \frac{B}{H} \qquad \text{....(1·7)}$$

$$\left[\text{C. G. S. पद्धति में } \mu_o = 1, \quad \therefore \mu = \mu_r = \frac{B}{H} \right]$$

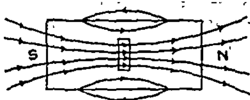
1·4 B, H और I में सम्बन्ध

B, H और I तथा μ_r और k में सम्बन्ध निम्न प्रकार स्थापित किया जा सकता है :

चित्र (1·2) के अनुसार एक चुम्बकित पदार्थ में क्षेत्र की दिशा के लम्बरूप अत्यन्त सूक्ष्म मोटाई (Infinitesimal thickness) के एक खाँचे (Slot) की कल्पना कीजिये। इस खाँचे में चुम्बकीय-फ्लक्स-घनत्व दो कारणों से होगा।

(1) खाँचे के दोनों ओर चुम्बकित पदार्थ के कारण। इस कारण खाँचे के प्रति इकाई क्षेत्र में से लम्बवत् निकलने वाला चुम्बकीय फ्लक्स अर्थात् चुम्बकीय-फ्लक्स-घनत्व (B) का मान चुम्बकन की तीव्रता (I) के बराबर है।

(2) चुम्बकित पदार्थ के दूर वाले भागों और चुम्बकन क्षेत्र के कारण। इस कारण चुम्बकीय-फ्लक्स-घनत्व $\mu_o H$ के बराबर है।



चित्र 1·2

अतः चुम्बकीय-फ्लक्स-घनत्व (B) का मान

$$B = \mu_o H + I \quad ....(1 \cdot 8)$$

एक बन्द लूप (Closed loop) के रूप में लिए गए स्थायी चुम्बक के लिए

$$B = I \quad ....(1 \cdot 9)$$

क्योंकि यहाँ चुम्बकन क्षेत्र नहीं है जिससे $H = O$

समीकरण (1·8), (1·4) व (1·7) की सहायता से-

$$B = \mu_o H + I$$

या $$\mu_o \mu_r H = \mu_o H + k \mu_o H$$

$$\therefore \quad \mu_r = 1 + k \quad ....(1 \cdot 10)$$

अर्थात् आपेक्षिक चुम्बकशीलता = 1 + चुम्बकीय प्रवृत्ति

लोह-चुम्बकीय पदार्थों (Ferro magnetic materials) के लिए $k >> 1$ जिससे μ_r का मान भी k की कोटि का ही होता है। कुछ चुम्बकीय पदार्थों के लिए k का मान 1 के सापेक्ष बहुत कम होता है। इस कारण μ_r का मान 1 के ही लगभग होता है। हवा के लिए $\mu_r = 1 \cdot 0000004$ अर्थात $k = 4 \times 10^{-7}$.

C. G. S. पद्धति मे समीकरण (1·8) को निम्न रूप मे लिखा जावेगा :

$$\boxed{B = H + 4\pi I}$$

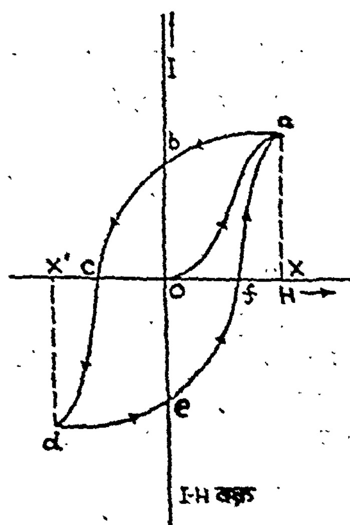
1·5. B·H वक्र और चुम्बकीय शैथिल्य या हिस्टेरिसिस (Hysterisis)

किसी चुम्बकीय पदार्थ पर, चक्रीय रूप मे परिवर्तित हो रहे चुम्बकीय क्षेत्र (Magnetic field) के प्रभाव का अध्ययन सर्वप्रथम Sir J. A. Ewing ने किया।

माना कि एक लोह चुम्बकीय पदार्थ को चुम्बकीय क्षेत्र में रखा गया है। प्रेरण के कारण पदार्थ चुम्बकित हो जाता है। चुम्बकन क्षेत्र (H) में परिवर्तन करने पर, चुम्बकीय पदार्थ में उत्पन्न चुम्बकन की तीव्रता (I) में होने वाले परिवर्तन का अध्ययन निम्न प्रकार करते हैं। चित्र (1·3) I और H के सम्बन्ध को प्रदर्शित करता है।

सर्वप्रथम चुम्बकन क्षेत्र H का मान शून्य से बढ़ाया जाता है। इस कारण चुम्बकन की तीव्रता (I) का मान भी बढ़ने लगता है। जब H का मान शून्य होता है तो I भी शून्य होगा। H के एक निश्चित मान OX पर I का मान अधिकतम हो जाता है और फिर H के बढ़ाने पर I के मान में वृद्धि नहीं होती। इस स्थिति में, जब I का मान अधिकतम हो जाता है, पदार्थ चुम्बकीय संतृप्ति (Magnetic saturation) की अवस्था में पहुँच जाता है। H के साथ I के इस परिवर्तन को चित्र (1·3) में वक्र *Oa* से प्रदर्शित किया गया है।

यदि अब चुम्बकन क्षेत्र H को धीरे-धीरे घटाया जावे तो I का मान भी धीरे-धीरे कम होता जाता है। परन्तु अब परिवर्तन वक्र *Oa* के साथ न होकर वक्र *ab* के अनुसार होता है। जब चुम्बकन क्षेत्र का मान शून्य हो जाता है, तो I का मान शून्य नहीं होता। इस अवस्था में उसका मान *Ob* के बराबर होता है। अतः स्पष्ट है कि चुम्बकन क्षेत्र का मान शून्य हो जाने पर भी चुम्बकीय पदार्थ में कुछ चुम्बकत्व मौजूद है। चुम्बकन की तीव्रता (I) के इस मान को, जब H = 0 (शून्य) कर दिया जावे, अवशिष्ट चुम्बकत्व (Residual magnetism) या धारणशीलता (Retentivity) कहते हैं।



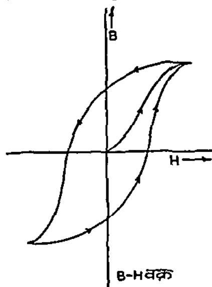
चित्र 1·3

अब चुम्बकन क्षेत्र का मान यदि विपरीत दिशा (Reverse direction) में, शून्य से, धीरे-धीरे बढ़ाया जावे तो I के मान में कमी होती जाती है। H के एक निश्चित मान OC पर I शून्य हो जाती है। अतः OC विपरीत दिशा में लगाये गये चुम्बकन क्षेत्र H का वह मान है जो पदार्थ में अवशिष्ट चुम्बकत्व को समाप्त कर देता है। H का यह मान पदार्थ का 'निग्रह बल' (Coercive force) या निग्राहिता (Coercivity) कहलाता है। H को और बढ़ाने पर I पुनः बढ़ने लगता है परन्तु

विपरीत दिशा में। पहले की भाँति H के एक निश्चित मान OX′ पर I का मान फिर अधिकतम हो जाता है और पदार्थ चुम्बकीय सतृप्ति की अवस्था में पहुँच जाता है। परन्तु यह चुम्बकीय सतृप्ति की अवस्था इस बार विपरीत दिशा में होगी। I और H के इस परिवर्तन को वक्र *cd* द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

H का मान अब धीरे-धीरे घटाया जाता है। इससे I का मान भी घटता जाता है। जब H का मान शून्य हो जाता है तब I का मान पहले की भाँति शून्य नहीं होता और उसका मान O*e* के बराबर होता है। यदि अब H को पुनः पहली वाली दिशा में बढ़ाया जावे तो I का मान घटता जाता है। H के एक निश्चित मान O*f* पर I का मान शून्य हो जाता है। H के मान में और अधिक वृद्धि करने पर I का मान फिर बढ़ने लगता है और पदार्थ पुनः चुम्बकीय सतृप्ति की अवस्था '*a*' में पहुँच जाता है। I और H के इस परिवर्तन को वक्र *defa* द्वारा प्रदर्शित किया गया है। H के साथ I में होने वाले परिवर्तन का ग्राफ उस चुम्बकीय पदार्थ का I—H वक्र कहलाता है। प्रयोग को दुहराये जाने पर इसी प्रकार का ग्राफ प्राप्त होता है।

चुम्बकीय संतृप्ति की अवस्था में I का मान अधिकतम हो जाता है और फिर H में वृद्धि उसके मान में परिवर्तन नहीं करती। परन्तु चुम्बकीय प्रेरण 'B', *H* पर निर्भर करता है और उसका मान चुम्बकीय संतृप्ति की अवस्था के बाद भी H में वृद्धि के कारण बढ़ता है। इसलिए B और H में खींचा गया ग्राफ आकृति में तो I—H वक्र जैसा ही होता है परन्तु *a* व *d* बिन्दुओं पर वक्र क्षैतिज (Horizontal) न होकर ढलवान होती है।



चित्र 1·4

किसी चुम्बकीय पदार्थ के लिए B और H के बीच खींचा गया ग्राफ B—H वक्र कहलाता है।

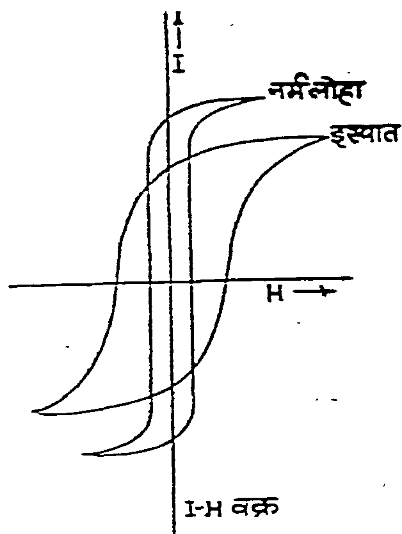
चुम्बकीय शैथिल्य या हिस्टेरिसिस

वक्र *abcdefa*, H के साथ I में होने वाले परिवर्तन के एक पूर्ण-चक्र (complete cycle) को प्रदर्शित करती है। इस वक्र से स्पष्ट है कि चुम्बकन की तीव्रता (I) हमेशा चुम्बकन क्षेत्र (*H*) से पिछड़ी रहती है, अर्थात् जब क्षेत्र (H) का मान शून्य हो जाता है तो I का मान शून्य नहीं होता। इस प्रकार चुम्बकन की

तीव्रता (I) के चुम्बकन क्षेत्र (H) से पिछड़े रहने (lagging behind) को चुम्बकीय शैथिल्य (Magnetic Hysterisis) या हिस्टेरिसिस कहते हैं।

बन्द वक्र *abcdefa*, जो H के कारण I में होने वाले परिवर्तन के एक पूर्ण चक्र को प्रदर्शित करती है शैथिल्य वक्र या शैथिल्य लूप (Hysterisis curve or loop) कहते हैं। शैथिल्य लूप की आकृति चुम्बकीय पदार्थ पर निर्भर करती है।

चित्र (1·5) में नर्म लोहे (Soft Iron) तथा इस्पात (Steel) के लिए I—H वक्र दिये गये हैं। वक्र से स्पष्ट है कि (i) नर्म लोहे के लिए धारणशीलता का मान इस्पात की अपेक्षा अधिक है (ii) नर्म लोहे के लिए निग्राहिता (coercivity) इस्पात की अपेक्षा कम है। इसीलिए स्थायी चुम्बक बनाने में इस्पात और विद्युत चुम्बक (Electro magnet) बनाने में नर्म लोहे का प्रयोग होता है।



चित्र 1·5

शैथिल्य ह्रास (Hysterisis loss)

जब लोह चुम्बकीय पदार्थ चुम्बकन के एक पूर्ण चक्र से गुजरता है तो ऊर्जा की हानि होती है अर्थात् चुम्बकन के समय दी गई ऊर्जा का मान, चुम्बकन क्षेत्र के हटाने पर प्राप्त ऊर्जा के मान के बराबर नहीं होता। ऊर्जा के इस ह्रास को शैथिल्य ह्रास (Hysterisis loss) कहते हैं। यह ऊर्जा ऊष्मा (Heat) के रूप में परिवर्तित हो जाती है जिससे पदार्थ गर्म हो जाता है। I—H लूप का क्षेत्रफल, एक घन से० मी० पदार्थ के चुम्बकन के एक पूर्ण चक्र में होने वाले ऊर्जा ह्रास के बराबर होता है अर्थात

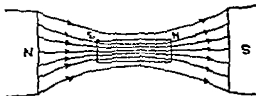
एक घन से० मी० पदार्थ के चुम्बकन के एक पूर्ण चक्र में ऊर्जा ह्रास = I—H लूप का क्षेत्रफल

क्योंकि B—H लूप का क्षेत्रफल, I—H लूप के क्षेत्रफल का 4π गुना होता है।

अतः एक घन से० मी० पदार्थ के चुम्बकन के एक पूर्ण चक्र में ऊर्जा ह्रास $= \frac{1}{4\pi}$ × [B—H लूप का क्षेत्रफल]

1·6 अनुचुम्बकीय पदार्थ (Paramagnetic Materials)

वे पदार्थ जिन्हें चुम्बकीय क्षेत्र मे रखने पर मामूली रूप से क्षेत्र की दिशा में चुम्बकित हो जाते हैं तथा असमान (non-uniform) चुम्बकीय क्षेत्र में रखने पर कम तीव्रता वाले स्थान से अधिक तीव्रता वाले स्थान की ओर आकर्षित होते हैं, अनुचुम्बकीय पदार्थ (Paramagnetic materials) कहलाते हैं। प्लेटिनम, क्रोमियम, ऑक्सीजन, मैंगनीज, एल्यूमीनियम, लोहे के कुछ लवणों के घोल, पैलेडियम



चित्र 1·6

इत्यादि अनुचुम्बकीय पदार्थ हैं। इन पदार्थों के लिए चुम्बकीय प्रवृत्ति (k) का मान बहुत कम तथा धनात्मक (positive) होता है। मैंगनीज के लिए $k = 1{\cdot}1 \times 10^{-6}$ है। चुम्बकीय प्रवृत्ति (k) परम ताप के व्युत्क्रमानुपाती (*Inversely* proportional) होती है। इन पदार्थों के लिए चुम्बकशीलता का मान प्रायः एक से थोड़ा सा ज्यादा होता है।

1·7 प्रति चुम्बकीय पदार्थ (Diamagnetic Materials)

वे पदार्थ जिन्हें चुम्बकीय क्षेत्र में रखने पर मामूली रूप से चुम्बकीय क्षेत्र के विपरीत दिशा में चुम्बकित हो जाते हैं तथा असमान चुम्बकीय क्षेत्र में रखने पर अधिक तीव्रता वाले स्थान से कम तीव्रता वाले स्थान की ओर प्रवृत होते हैं, प्रतिचुम्बकीय पदार्थ (Diamagnetic Materials) कहलाते हैं। विस्मथ, एन्टीमनी, जस्ता, सोना, पानी, एल्कोहल, हाइड्रोजन इत्यादि प्रतिचुम्बकीय पदार्थ है।



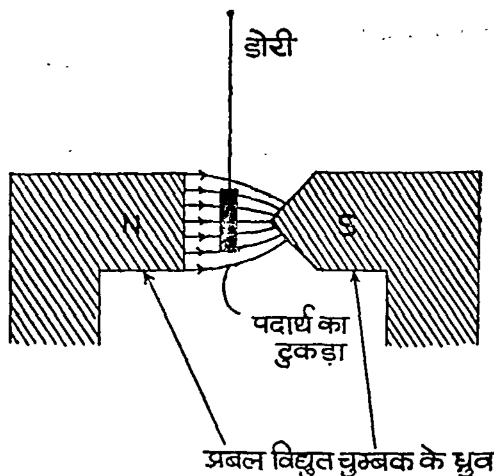
चित्र 1·7

इन पदार्थों के लिए चुम्बकीय प्रवृत्ति (k) का मान ऋणात्मक होता है और ताप पर निर्भर नही करता। एन्टीमनी के लिए $k = 0{\cdot}95 \times 10^{-6}$ एवं ऋणात्मक है। इन पदार्थों के लिए चुम्बकशीलता का मान एक से कम होता है।

अनुचुम्बकीय और प्रतिचुम्बकीय पदार्थों पर असमान चुम्बकीय क्षेत्र का प्रभाव निम्न प्रकार प्रदर्शित किया जा सकता है।

NS एक विद्युत चुम्बक है। इसका S ध्रुव चित्र 1·8 के अनुसार बीच में से उठा हुआ (Pointed) है जबकि N ध्रुव समतल है। इस कारण उठे हुए ध्रुव के

पास, समतल ध्रुव की अपेक्षा, चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता बहुत अधिक है। विस्मथ के एक टुकड़े को डोरी से बाँधकर ध्रुवों के बीच में स्वतन्त्रतापूर्वक लटका दिया गया है। विद्युत चुम्बक में ज्योंही धारा प्रवाहित करते हैं, ध्रुवों के बीच चुम्बकीय क्षेत्र पैदा हो जाता है। इस प्रकार उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र असमान होने के कारण विस्मथ



चित्र 1·8

का टुकड़ा कम तीव्रता वाले N ध्रुव की ओर आकर्षित होता है। इस प्रभाव को बड़ी आसानी से देखा जा सकता है। इस प्रकार के पदार्थ प्रतिचुम्बकीय पदार्थ कहलाते हैं। यदि विस्मथ के स्थान पर एल्यूमीनियम का टुकड़ा लटकाया जावे तो चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में वह उठे हुए S ध्रुव की ओर आकर्षित होता है। इस प्रकार के पदार्थ अनुचुम्बकीय पदार्थ कहलाते हैं।

1·8 लोह-चुम्बकीय पदार्थ (Ferro-magnetic Materials)

वे पदार्थ जिन्हें चुम्बकीय क्षेत्र में रखने पर प्रबल रूप से चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा में चुम्बकित हो जाते हैं, लोह-चुम्बकीय पदार्थ (Ferromagnetic materials) कहलाते हैं। लोह, इस्पात, कोबाल्ट, निकिल तथा इनके कुछ मिश्र धातु (Alloys) लोह-चुम्बकीय पदार्थ हैं। इन पदार्थों की चुम्बकशीलता का मान बहुत अधिक होता है। लोहे के लिए चुम्बकशीलता का मान 6000 से 8000 होता है। चुम्बकीय प्रवृत्ति k का मान एक की अपेक्षा बहुत अधिक होता है और ताप के साथ क्यूरी के नियम के अनुसार परिवर्तित होता है।

1·9 क्यूरी का नियम और क्यूरी ताप (Curie law and Curie te

लोह-चुम्बकीय पदार्थों के लिए चुम्बकीय प्रवृत्ति परमताप के
होती है, अर्थात

$$k \propto \frac{1}{T}$$

या $k\,T =$ नियताक ....(1·11)

इस नियम को क्यूरी का नियम (Curie law) कहते हैं। अतः जब किसी लोह-चुम्बकीय पदार्थ का ताप बढ़ाया जाता है तो उसकी चुम्बकीय प्रवृत्ति का मान कम हो जाता है। इस प्रकार k का मान ताप के साथ गिरता जाता है और एक निश्चित ताप पर इतना कम हो जाता है, कि लोह-चुम्बकीय पदार्थ, अनुचुम्बकीय पदार्थ की तरह व्यवहार करने लगते हैं। वह ताप जिस पर कोई लोह-चुम्बकीय पदार्थ, अनुचुम्बकीय पदार्थ की भाँति व्यवहार करने लगते है, उस पदार्थ का क्यूरी ताप (Curie Temperature) कहलाता है। लोहे के लिए क्यूरी ताप 770°C है।

WEISS नामक वैज्ञानिक ने क्यूरी के नियम में संशोधन कर उसे निम्न रूप दिया :—

$$k \propto \frac{1}{(T-\theta)}$$

$$\text{या} \quad k = \frac{C}{(T-\theta)}$$

यहाँ θ क्यूरी ताप व C एक नियताक है। इस नियम को क्यूरी-वीस नियम (Curie-Weiss Law) कहते है।

1·10 इलेक्ट्रान सिद्धान्त पर चुम्बकत्व का स्पष्टीकरण

विभिन्न पदार्थों द्वारा प्रदर्शित चुम्बकीय प्रभाव के व्यवहार को इलेक्ट्रान सिद्धान्त (Electron Theory) के आधार पर निम्न प्रकार स्पष्ट किया जा सकता है—

परमाणु के केन्द्रक *(Nucleus)* के चारों ओर विभिन्न कक्षाओं में चक्कर लगा रहे इलेक्ट्रान, वृताकार विद्युत परिपथ (Circular Electric Circuit) वृताकार विद्युतधारा (Circular Electric Current) के तुल्य (Equ... क्रिया होते हैं। ये वृताकार विद्युत परिपथ एक सूक्ष्म चुम्बकीय पट्टिका (... Magnetic Shell) या सूक्ष्म चुम्बकीय द्विध्रुव (Small ma...
भाँति व्यवहार करते हैं। कक्षीय परिक्रमण के साथ-साथ
परितः चक्रण (Spin) भी करता है। इस कारण

(Magnetic moment) रखता है और किसी परमाणु का चुम्बकीय आघूर्ण उसके समस्त इलेक्ट्रान के चुम्बकीय आघूर्णों का परिणमित मान होता है।

वे पदार्थ जिनके परमाणुओं का परिणामी चुम्बकीय आघूर्ण शून्य नहीं होता, अनुचुम्बकीय पदार्थ कहलाते हैं। चुम्बकीय क्षेत्र में रखने पर, इन पदार्थों के परमाणु इस प्रकार घूम जाते हैं ताकि उनकी चुम्बकीय अक्ष चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा के समान्तर हो जाती है। इस तरह पदार्थ में चुम्बकत्व पैदा हो जाता है। परमाणुओं के इस प्रकार प्राप्त संरेखण (alignment) पर तापीय प्रक्षोभ (Thermal agitation) का विपरीत प्रभाव पड़ता है एवं ताप वृद्धि के साथ संरेखण बिगड़ता जाता है।

वे पदार्थ जिनके परमाणुओं से संबद्ध चुम्बकीय आघूर्ण का मान्य शून्य होता है प्रति चुम्बकीय पदार्थ कहलाते हैं। प्रति चुम्बकीय पदार्थ को एक चुम्बकीय क्षेत्र में रखने पर, परमाणुओं का संरेखण नहीं होता बल्कि इलेक्ट्रॉन की गति में परिवर्तन हो जाता है। कुछ इलेक्ट्रान की गति में वृद्धि हो जाती है जबकि कुछ की गति में कमी। इस कारण परमाणुओं में, आरोपित चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा के विपरीत दिशा में, चुम्बकीय आघूर्ण पैदा हो जाता है। यही कारण है कि प्रति चुम्बकीय पदार्थों की चुम्बकीय प्रवृत्ति का मान ऋणात्मक होता है तथा उस पर ताप का प्रभाव नहीं होता।

लोह-चुम्बकीय पदार्थों के चुम्बकीय प्रभाव के व्यवहार को डोमेन (Domain) के आधार पर समझाया जाता है। किसी लोह-चुम्बकीय पदार्थ को बहुत छोटे-छोटे भागों में बँटा माना जा सकता है जिन्हें डोमेन कहते हैं। किसी भी एक डोमेन में प्राप्त समस्त परमाणु एक ही दिशा में संरेखित होते हैं जिससे सभी परमाणुओं से संबद्ध चुम्बकीय आघूर्ण एक ही दिशा में होते हैं। विभिन्न डोमेन में उनसे संबद्ध चुम्बकीय आघूर्ण की दिशा भिन्न-भिन्न होती है तथा ये एक बन्द शृंखला (Closed Chain) बनाते हैं। अचुम्बकित लोह-चुम्बकीय पदार्थ में समस्त डोमेन के कारण परिणामी चुम्बकीय आघूर्ण शून्य होता है। अतः पदार्थ कोई चुम्बकीय प्रभाव नहीं दिखाता। चुम्बकीय क्षेत्र में रखने पर इन डोमेन की सीमाओं में इस प्रकार विस्थापन (Shift) होता है जिससे अधिक परमाणुओं की चुम्बकीय अक्ष क्षेत्र की दिशा में आ जाती है और वह चुम्बकित हो जाती है। क्यूरी ताप पर ये डोमेन टूट जाते हैं और लोह-चुम्बकीय पदार्थ, अनुचुम्बकीय पदार्थ में परिवर्तित हो जाता है।

उदाहरण 1. एक चुम्बक की संहति 40 ग्राम और चुम्बकीय आघूर्ण 2000 मात्रक है। यदि चुम्बक के पदार्थ का घनत्व 7·6 ग्राम/घन सें० मी० हो तो चुम्बकन की तीव्रता की गणना करो।

चुम्बकीय आघूर्ण M = 2000 मात्रक

चुम्बक की संहति = 40 ग्राम

और चुम्बक के पदार्थ का घनत्व = 7·6 ग्राम/घन से॰ मी॰

∴ चुम्बक का आयतन $V=\frac{\text{संहति}}{\text{घनत्व}}$

या $$V=\frac{40}{7{\cdot}6}$$

∴ $V=5{\cdot}26$ घन से॰ मी॰

∵ चुम्बकन की तीव्रता $(I)=\frac{M}{V}$

M और V का मान रखने पर

$$I=\frac{2000}{5{\cdot}26}$$

∴ $I=380{\cdot}2$ मात्रक

अतः चुम्बकन क्षेत्र की तीव्रता का मान 380·2 मात्रक है।

प्रश्न

1. चुम्बकन की तीव्रता, चुम्बकीय फ्लक्स घनत्व, चुम्बकीय प्रवृत्ति और चुम्बकशीलता की परिभाषा दीजिये।
   M.K.S. पद्धति में निम्न सम्बन्ध की स्थापना करो—
   (a) $B=\mu_0 H+I$
   (b) $\mu_r=1+K$
   यहाँ—
   B = चुम्बकीय फ्लक्स घनत्व
   I = चुम्बकन की तीव्रता
   K = चुम्बकीय प्रवृत्ति
   μ_0 = रिक्त आकाश की परम चुम्बकशीलता और
   μ_r = चुम्बकीय पदार्थ की आपेक्षिक चुम्बकशीलता।
2. किसी चक्रीय रूप से परिवर्तित हो रहे चुम्बकीय क्षेत्र में रखे गये एक लोह-चुम्बकीय पदार्थ के व्यवहार को स्पष्ट रूप से समझाइये।
   धारणशीलता या अवशिष्ट चुम्बकत्व और निग्राहिता से क्या अभिप्राय है?
3. I—H वक्र और B—H वक्र से क्या अभिप्राय है?
   चुम्बकीय शैथिल्य, शैथिल्य लूप और शैथिल्य ह्रास को स्पष्ट रूप से समझाइये।

4. शैथिल्य वक्र से पदार्थों के चुम्बकीय गुणों के सम्बन्ध में क्या सूचना मिलती है ?

स्थायी चुम्बक और विद्युत चुम्बक बनाने के लिए कौन सा पदार्थ उपयुक्त होगा और क्यों ? समझाइये ।

5. अनुचुम्बकीय, प्रतिचुम्बकीय और लोह चुम्बकीय पदार्थों के बीच क्या भेद है ? पूर्णरूप से समझाइये ।

लोह-चुम्बकीय पदार्थ किस प्रकार अनुचुम्बकीय पदार्थ में परिवर्तित हो सकता है ।

6. निम्नलिखित को संक्षेप में समझाइये—

(a) क्यूरी ताप और क्यूरी का नियम

(b) चुम्बकीय शैथिल्य या हिस्टेरिसिस और शैथिल्य ह्रास

(c) इलेक्ट्रान सिद्धान्त पर चुम्बकत्व की व्याख्या

7. एक चुम्बक की संहति 75 ग्राम और चुम्बकीय आघूर्ण 3000 मात्रक है । यदि चुम्बक के पदार्थ का घनत्व 7·5 ग्राम/घन से० मी० हो, तो चुम्बकन की तीव्रता निकालो ।

[उत्तर 300 मात्रक]

स्थिर विद्युतकी
(ELECTROSTATICS)

2

2·1. प्रकृति में मौलिक बल
2·2. आवेश की क्वाण्टम प्रकृति
2·3. आवेश-संरक्षण का सिद्धान्त
2·4. आवेशों के बीच बल : कूलम्ब का नियम
2·5. अध्यारोपण का सिद्धान्त
2·6. विद्युतीय फ्लक्स
2·7. गॉस का नियम
2·8. एक समान आवेशित गोले के कारण विद्युत क्षेत्र
2·9. अनन्त विस्तार के रेखीय आवेश के कारण विद्युत क्षेत्र
2·10. अनन्त विस्तार की आवेश की चादर का विद्युत क्षेत्र ।

2·1. प्रकृति में मौलिक बल

भौतिक विज्ञान में हम कई प्रकार के बलों से परिचित होते हैं तथा विद्युत-बल, चुम्बकीय बल, गुरुत्वाकर्षण बल, घर्षण बल आदि । परन्तु मूल रूप से चार प्रकार के बल पहचाने जा सकते हैं जो कि सर्वथा मौलिक तथा एक-दूसरे से भिन्न हैं । ये हैं—गुरुत्वाकर्षण बल, विद्युतीय-बल, नाभिकीय बल तथा वे बल जो दुर्बल अन्योन्य-क्रिया (Weak interactions) में विद्यमान होते हैं जैसे बीटा-क्षय में । अन्य प्रकार के बल इनमें से ही किसी न किसी प्रकार के बल से उत्पन्न होते हैं उदाहरणार्थ चुम्बकीय बल भी विद्युतीय बलों का ही एक रूप है—जब आवेश गतिशील होते हैं तब उनके बीच विद्यमान बलों को हम चुम्बकीय बलों की संज्ञा देते हैं । गुरुत्वाकर्षण बल सार्वभौमिक समझा जाता है । पदार्थ के कोई भी दो कणों के बीच आकर्षण बल होता है तथा यह बल न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम के अनुसार दोनों की सहति के गुणा के समानुपाती और दोनों की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है ।

विद्युतीय वल पदार्थ की एक विशिष्ट अवस्था होने पर उत्पन्न होते हैं अर्थात् जव पदार्थ पर 'आवेश' होता है। एक कांच की छड़ को रेशम के कपड़े से रगड़ने पर वह 'आवेशित' हो जाती है (तथा कपड़ा भी)। इस प्रकार आवेशित की हुई दो छड़ों को पास लाने पर उनमें प्रतिकर्षण होना पाया जाता है तथा इस प्रकार आवेशित कांच की छड़ में और सेलुलोज एसीटेट की एक पत्ती (जिसको ऊनी कपड़े से रगड़ा गया हो) में आकर्षण होना पाया जाता है। अतः इन विद्युतीय वलों के अध्ययन से यह निष्कर्ष निकलता है कि विद्युत आवेश दो प्रकार का होता है। परम्परानुसार उपर्युक्त प्रकार से आवेशित कांच की छड़ के आवेश को ऋण-आवेश और सेलुलोज एसीटेट की पत्ती पर उत्पन्न आवेश को धन आवेश कहा गया है।[1] इस प्रकार जहाँ गुरुत्वाकर्षण वल सदैव आकर्षण-परक होता है, विद्युतीय वल आकर्षण (विपरीत आवेशों में) अथवा प्रतिकर्षण (समान आवेशों में) दोनों प्रकार का हो सकता है। दोनों प्रकार के वलों में यह समानता है कि वल कणों की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती है। दोनों में एक अन्य समानता यह है कि गोलाकार वस्तु होने पर उनके बीच वल की गणना करने के लिए उनके केन्द्रों की दूरी लेनी होती है। दोनों की परास (range) अत्यन्त लघु दूरियों से लेकर अत्यन्त लम्वी दूरी तक मानी गई है। इनमें मुख्य अन्तर यह है कि गुरुत्वाकर्पण वल विद्युतीय वल की अपेक्षा अत्यन्त दुर्वल (weak) होता है। इनकी तुलना के लिए हम हाइड्रोजन परमाणु में नाभिक के प्रोटोन और वाहरी इलेक्ट्रॉन के बीच विद्युतीय वल व गुरुत्वाकर्षण वल की गणना कर सकते हैं—

दोनों पर आवेश $= e = 1{\cdot}6 \times 10^{-19}$ कूलम्व

इलेक्ट्रान की संहति, $m_e = 9{\cdot}1 \times 10^{-31}$ कि. ग्रा.

प्रोटोन की संहति, $m_p = 1{\cdot}6725 \times 10^{-27}$ कि. ग्रा.

गुरुत्वाकर्षण नियतांक, $G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}$ न्यूटन. मीटर^2/कि. ग्रा.^{2}

$$4\pi\epsilon_0 = \frac{1}{9 \times 10^9} \text{ कूलम्व}^2/\text{न्यूटन मीटर}^2$$

दोनों के वीच दूरी $r = 5{\cdot}3 \times 10^{-11}$ मीटर

---

1 इसी परम्परा से इलेक्ट्रॉनों का आवेश ऋण प्रकार का है। आवेशों का इस प्रकार धन अथवा ऋण नामकरण पूर्णतः स्वेच्छ (arbitrary) है, अन्यथा इलेक्ट्रॉन के आवेश में कोई जन्मजात ऋण प्रकृति नहीं है। तथ्य केवल यही है कि सभी आवेशित वस्तुओं का आवेश उपर्युक्त दो ही प्रकार का होता है।

$$\text{विद्युतीय बल} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{(1{\cdot}6 \times 10^{-19})^2}{\frac{1}{9 \times 10^9} \times (5{\cdot}3 \times 10^{-11})^2}$$

$$= 1{\cdot}312 \times 10^{-7} \text{ न्यूटन}$$

$$\text{गुरुत्वाकर्षण बल} = \frac{G.\ m_e.\ m_p}{r^2}$$

$$= \frac{6{\cdot}67 \times 10^{-11} \times 1{\cdot}6725 \times 10^{-27} \times 9{\cdot}1 \times 10^{-31}}{(5{\cdot}3 \times 10^{-11})^2}$$

$$= 3{\cdot}61 \times 10^{-46} \text{ न्यूटन}$$

नाभिकीय बल (Nuclear force) परमाणु के नाभिक में स्थित प्रोटोन और न्यूट्रान के बीच विद्यमान होना माना गया है। इनमें एक अत्यधिक आकर्षण बल होने पर ही इनका इतने लघु नाभिक में रहना सम्भव हो सकता है। ये बल लगभग नाभिक के आकार जितनी दूरी (लगभग 10^{-15} मीटर) में ही प्रभावी होते हैं। नाभिकीय बल के बारे में कोई नियम ज्ञात नहीं है। बीटा-क्षय (जैसे न्यूट्रान का प्रोटोन, इलेक्ट्रॉन और न्यूट्रिनों में परिवर्तन) की क्रियाओं में एक अन्य प्रकार के बल की उपस्थिति मानी गई है जो विद्युतीय बल की अपेक्षा लगभग 10^{-3} गुना क्षीण होते हैं। इनके आपेक्षिक परिणाम नीचे सारिणी में दिये गये है—(नाभिकीय बल की सामर्थ्य इकाई मानकर)।

सारणी 2·1. मौतिक बलों की तुलना

गुरुत्वाकर्षण बल	10^{-40}
बीटा-क्षय बल	10^{-5}
विद्युतीय बल	10^{-2}
नाभिकीय बल	1

क्षेत्र—विद्युतीय तथा गुरुत्वाकर्षण बलो के वर्णन का अधिक सगत तरीका विद्युतीय क्षेत्र तथा गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र के रूप में है। उदाहरणार्थ विद्युतीय बलों को समझने के लिए हम यह मानते हैं कि कोई भी आवेश उसके आस-पास के क्षेत्र में में एक विशिष्ट अवस्था (condition) उत्पन्न कर देता है जिसे हम उसके विद्युतीय क्षेत्र की संज्ञा देते हैं और जब कोई अन्य आवेश इस क्षेत्र में प्रवेश करता है तब *उस पर बल कार्य करता है। एक दिये हुए विद्युत क्षेत्र में बल, आवेश के समानुपाती* होता है, अर्थात्—

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

जबकि कि $\vec{E}$ क्षेत्र से सम्बन्धित राशि है जिसे क्षेत्र की तीव्रता कहते हैं। अतः **क्षेत्र की तीव्रता प्रति इकाई आवेश बल के बराबर होती है और उसकी दिशा धन आवेश पर बल की दिशा में होती है।** इसी प्रकार कोई भी द्रव्य कण अपने आस-पास गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र उत्पन्न कर देता है जिसमें अन्य द्रव्य कण बल का अनुभव करता है जो उसकी संहति के समानुपाती होता है।

कूलम्ब के नियम तथा न्यूटन के नियम द्वारा बलों की गणना अवश्य की जा सकती है परन्तु इसमें एक असंगति यह है कि बल की उत्पत्ति तात्क्षणिक हो जाती है (अर्थात् दो आवेश अथवा दो द्रव्य कण रखते ही उनके बीच बल उत्पन्न हो जाते हैं)। इस प्रकार इनके अन्तर्गत 'दूरी पर तात्क्षणिक अन्योन्य क्रिया' (instantaneous action at a distance) की धारणा स्वीकार की गई है (अर्थात् अन्योन्य क्रिया का वेग अनन्त माना गया है)। क्षेत्रों की संकल्पना में यह असंगति नहीं है और अन्योन्य क्रिया का एक निश्चित वेग माना गया है। आवेश अपना क्षेत्र उत्पन्न कर देता है जिसकी तीव्रता अलग-अलग विन्दु पर निश्चित होती है। किसी विन्दु पर एक अन्य आवेश रखने पर वहाँ के क्षेत्र के कारण उस पर बल लगता है। **क्षेत्र की संकल्पना की एक अन्य महत्त्वपूर्ण विशेषता यह है कि आवेश गतिशील हो तब भी उस पर प्रत्येक स्थिति में बल उस स्थिति पर क्षेत्र के मान से सूत्र 2·1 की सहायता से निकाला जा सकता है।** कूलम्ब का नियम गतिशील आवेश पर लागू नहीं होता। इस प्रकार क्षेत्र की संकल्पना में :—

q		क्षेत्र		q'
आवेश	उत्पन्न करता है	$\vec{E}$	उत्पन्न करता है	बल $\vec{F} = q'\vec{E}$

2·2. आवेश की क्वाण्टय प्रकृति

हमारे सामान्य अनुभव में हम नहीं जान पाते कि आवेश सदैव एक न्यूनतम मान का पूर्ण गुणक होता है क्योंकि आवेश की सामान्य मात्राएँ काफी अधिक होती हैं। सर्वप्रथम फैराडे ने अपने वैद्युत अपघटन (electrolysis) के प्रयोगों के आधार पर इस तथ्य को प्रकट किया। इन प्रयोगों में यह पाया गया कि विद्युत अपघट्य में से धारा का प्रवाह आयन अर्थात् आवेश युक्त परमाणु या परमाणु समूह, के द्वारा होता है तथा आयन सदैव आवेश के एक निश्चित परिमाण (अथवा उसका पूर्ण गुणक) का वहन करता है। किसी भी एक-संयोजकता धारी तत्त्व का परमाणु आवेश के उपर्युक्त निश्चित परिमाण से संयुक्त होता है, अतः दो अपघट्यों में से एक समान विद्युत धारा का बराबर-बराबर समय तक प्रवाह करने पर उनकी एकत्रित

मात्रा उनके परमाणु भार के समानुपाती पायी जाती है। इसका आशय यह है कि किसी पदार्थ का एक किलोग्राम-परमाणु एकत्र करने के लिए एक निश्चित आवेश का प्रवाह होना आवश्यक होगा। फैराडे ने पाया कि 1 कि० ग्राम हाइड्रोजन (अथवा 16 कि० ग्राम ऑक्सीजन) के एकत्र करने के लिये 96520000 कूलम्ब आवेश प्रवाहित होना आवश्यक है। अतः 1 ग्राम हाइड्रोजन के लिये 96520 कूलम्ब आवेश प्रवाहित करना होगा। हम यह भी जानते हैं कि पदार्थ के 1 ग्राम-परमाणु में 'एवोगैड्रो संख्या' के बराबर परमाणु होते हैं ($=6\cdot02\times10^{23}$)। अतः प्रत्येक परमाणु से संयुक्त विद्युत आवेश—

$$=\frac{96520}{6\cdot02\times10^{23}}$$

$$=1\cdot603\times10^{-19} \text{ कूलम्ब}$$

यही आवेश का मूल, न्यूनतम परिमाण है और अभी तक कहीं भी किसी आवेशित वस्तु या कण का आवेश इसके किसी अंश के बराबर नहीं पाया गया है। इलेक्ट्रान और प्रोटोन कणों पर इतना ही आवेश होता है।

मिलिकन (1910 के लगभग) ने भी इलेक्ट्रान का आवेश ज्ञात करने के अपने प्रयोगों में पाया कि तेल की लघु बूँदों पर आवेश सदैव उपर्युक्त परिमाण का पूर्ण गुणक ही होता है। अतः आवेश का यह परिमाण विद्युत की मूल इकाई के रूप में लिया जाता है और इसको '*e*' से व्यक्त करते हैं।

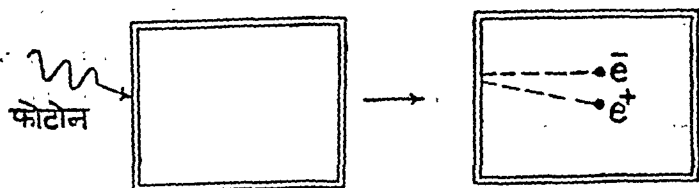
2·3 आवेश संरक्षण का सिद्धान्त

आवेशों के बारे में एक सार्वभौमिक सिद्धान्त यह है कि किसी भी विलगित तन्त्र (isolated system) का कुल आवेश नियत रहता है; किसी समय कुल आवेश जितना है, उतना ही सदैव रहता है। यहाँ विलगित तन्त्र का आशय यह है कि उसमें किन्हीं आवेशित कणों का प्रवेश न हो और न ही उसमें से बाहर निकलें।

घर्षण से आवेश उत्पन्न करने के प्रयोगों में भी हम प्रायोगिक रूप में देखते हैं कि दोनों अवयवों पर बराबर और विपरीत प्रकार का आवेश उत्पन्न होता है, अतः परिणमित कुल आवेश शून्य ही रहता है। यदि काँच की छड़ को रेशम के कपड़े से रगड़ा गया है तो प्रारम्भ में इन दोनों का सम्मिलित आवेश शून्य है तथा आवेशित होने के बाद काँच की छड़ पर जितना ऋण आवेश उत्पन्न होता है, उतना ही धन आवेश कपड़े पर होता है, और इस प्रकार दोनों का कुल आवेश शून्य ही रहता है।

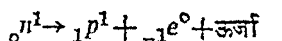
इस सम्बन्ध में एक अन्य रुचिकर उदाहरण है। किसी विलगित तन्त्र में जैसे कि एक गैस युक्त कक्ष में गामा किरणों के गुजारने पर कभी-कभी एक इलेक्ट्रान और पॉजिट्रान का युग्म बन जाता है अर्थात् विद्युत चुम्बकीय गामा तरंग विद्युतीय

कण बन जाते हैं। फिर भी कुल आवेश अपरिवर्तित ही रहता है क्योंकि इन दोनों का आवेश बिलकुल बराबर व विपरीत प्रकार का है। इनके आवेश बिलकुल एक समान होते हैं यह पॉजिट्रानियम (पॉजिट्रान और इलेक्ट्रान से निर्मित परमाणु जो केवल 10^{-7} सैकण्ड के लघु समय तक 'जीवित' रहता है) के सर्वथा आवेश विहीन

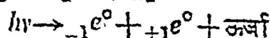


चित्र 2·1

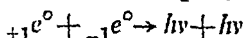
होने से सिद्ध होता है जिसके आवेश का परीक्षण प्रायोगिक तौर पर किया गया है। इलेक्ट्रॉन-पॉजिट्रान युग्म बनने की विपरीत प्रक्रिया दोनों के परस्पर-विनाश (annihilation) में भी कुल आवेश शून्य ही रहता है। इसी प्रकार सभी नाभिकीय क्रियाओं में जिनमें कि आवेशित कण भाग लेते हैं, क्रिया करने वाले कणों का कुल आवेश बनने वाले कणों के कुल आवेश के बराबर पाया जाता है। उदाहरण :—



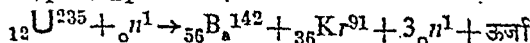
$$ {}_0n^1 \rightarrow {}_1p^1 + {}_{-1}e^0 + \text{ऊर्जा} $$



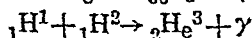
$$ h\nu \rightarrow {}_{-1}e^0 + {}_{+1}e^0 + \text{ऊर्जा} $$



$$ {}_{+1}e^0 + {}_{-1}e^0 \rightarrow h\nu + h\nu $$



$$ {}_{12}U^{235} + {}_0n^1 \rightarrow {}_{56}Ba^{142} + {}_{36}Kr^{91} + 3\,{}_0n^1 + \text{ऊर्जा} $$



$$ {}_1H^1 + {}_1H^2 \rightarrow {}_2He^3 + \gamma $$

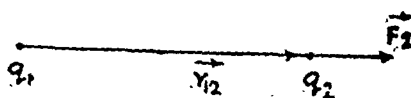
2·4. आवेशों के बीच बल : कूलम्ब का नियम

स्थिर आवेशों के बीच बल ज्ञात करने के लिए कूलम्ब का नियम निम्न प्रकार है—

निर्वात में स्थित दो स्थिर बिन्दु आवेशों में परस्पर बल दोनों के आवेशों के गुणा के समानुपाती तथा उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है। वैक्टर रूप में :—

$$ \vec{F}_2 = K\frac{q_1 q_2}{r^2_{12}}\,\hat{r}_{12} \qquad \ldots (2\cdot2) $$

जबकि $\vec{F}_2$ आवेश q_2 पर बल है, $\vec{r}_{12}$ उनकी वैक्टर दूरी, q_1 से q_2 की दिशा में, और $\hat{r}_{12}$ इसी दिशा में इकाई वैक्टर है। K एक स्थिरांक है जो राशियों की



चित्र 2·2

इकाइयों पर निर्भर करता है । क्योंकि यह परस्पर बल है अत: आवेश q_1 पर बल इसके विपरीत होगा :

$$\vec{F_1} = -\vec{F_2}$$

कूलम्ब के नियम को इस प्रकार भी व्यक्त कर सकते हैं :—

$$\vec{F_2} = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r_{12}} \quad ....(2\cdot3)$$

वर्तमान परम्परा के अनुसार बल आवेश, दूरी को मीटर किलोग्राम-सैकण्ड पद्धति मे लेने पर, स्थिरांक K का मान होता है ।

$$K = 9 \times 10^9 \frac{\text{न्यूटन मीटर}^2}{\text{कूलम्ब}^2}$$

तथा विद्युतीय राशियों के वर्णन मे सुविधा की दृष्टि से परम्परानुसार इस स्थिरांक को निम्न रूप मे लिखा जाता है :—

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

जबकि, $4\pi\epsilon_0 = \frac{1}{9 \times 10^9}$

तथा $\epsilon_0 = 8\cdot85 \times 10^{-12}$ कूलम्ब^2/न्यूटन मीटर^2

अत: कूलम्ब का नियम होगा :—

$$\vec{F_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad ....(2\cdot4)$$

आवेशों के धन अथवा ऋण चिन्ह इसमें प्रयुक्त करने पर स्वत: ही बल की दिशा ज्ञात हो सकेगी, यदि दोनों ही धन आवेश हैं, तो $\vec{F_2}$ का चिन्ह धन रहेगा और बल की दिशा $\hat{r}_{12}$ की ओर रहेगी ; यह प्रतिकर्षण बल है । यदि q_2 ऋण आवेश है, तब बल की दिशा $-\hat{r}_{12}$ होगी, अर्थात् q_1 की ओर यह आकर्षण बल है ।

[विशेष टिप्पणी – वस्तुत: कूलम्ब का नियम निर्यात मे स्थित स्थिर आवेशों के बीच बल के लिए है । किसी माध्यम में स्थित आवेशों के बल व्यक्त करने के लिए विशेष अवस्था मे ही कूलम्ब के नियम का प्रयोग किया जा सकता है ; जब माध्यम का अनन्त विस्तार हो तथा वह समागी (homogeneous) हो, ऐसी स्थिति मे बल के मान में कमी हो जाती है और दिशा में कोई अन्तर नहीं आता

और हम माध्यम से सम्बन्धित एक नियतांक की सहायता से वल निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :—

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o K} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad \text{....(2·5)}$$

K, परम्परानुसार माध्यम का परावैद्युतांक (dielectric Constant) कहलाता है, मीटर-किलोग्राम सैकण्ड पद्धति में यह उस माध्यम और निर्वात का आपेक्षिक परावैद्युतांक है]

स० ग० स० प्रणाली में आवेश को स्थि० वि० मा० में लेने पर

$$\vec{F}_2 = \frac{q_1 q_1}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad \text{(निर्वात में)} \quad \text{....(2·6)}$$

तथा

$$\vec{F}_2 = \frac{q_1 q_1}{K r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad \text{(माध्यम में)} \quad \text{....(2·7)}$$

विद्युत क्षेत्र—जैसा कि इस अध्याय के प्रारम्भ में वर्णन किया गया है, विद्युतीय वल को विद्युत-क्षेत्र की धारणा की सहायता से समझा जा सकता है। चित्र (2·2) में q_2 पर वल F_2 को हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं :—

$$\vec{F}_2 - q_2 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_o r_{12}^2} \hat{r}_{12} \right) \quad \text{....(2·8)}$$

जबकि कोष्टक में लिखी हुई राशि का सम्बन्ध केवल प्रथम आवेश q_1 से और द्वितीय आवेश q_2 की स्थिति से है। समीकरण (2·1) से तुलना करने पर हम इस राशि को आवेश q_1 के द्वारा (q_2) की स्थिति पर उत्पन्न विद्युत क्षेत्र की तीव्रता के रूप में पहचान सकते हैं अर्थात् आवेश q_1 उस विन्दु पर निम्नलिखित तीव्रता का क्षेत्र उत्पन्न करता है—

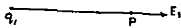
$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_o r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad \text{....(2·9)}$$

स्पष्टतः विद्युतीय क्षेत्र की तीव्रता एक वैक्टर राशि है जो उस विन्दु पर प्रति इकाई आवेश बल को व्यक्त करती है तथा इसकी दिशा धन आवेश पर बल की दिशा में ली जाती है। अर्थात् दिशा वक्टर $\hat{r}_{12}$ की दिशा में होती है।

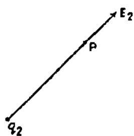
2·5. अध्यारोपण के सिद्धान्त

विद्युत क्षेत्र की परिभाषा के अनुसार एक आवेश (q_1) के कारण एक विन्दु P पर विद्युतीय क्षेत्र की तीव्रता E_1 चित्र 2·3 (अ) में दिखाई गई है :

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\in_0 r_{1p}^2}\hat{r}_{1p} \quad ....(2{\cdot}10)$$

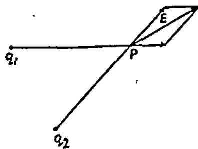


इसी प्रकार आवेश (q_2) के कारण उसी विन्दु पर विद्युतीय गैस की तीव्रता $\vec{E_2}$ होगी, चित्र 2·3 (व)



$$\vec{E} = \frac{q_2}{4\pi\in_0 r^3_{2p}}\hat{r}_{2p} \quad ... (2{\cdot}11)$$

अव यदि दोनों आवेश इन स्थितियों मे एक साथ विद्यमान हों, तव P पर विद्युतीय क्षेत्र क्या होगा ? यह पाया गया है कि दोनों की एक साथ उपस्थिति में क्षेत्र $\vec{E}$ दोनो के अलग-अलग क्षेत्रों $\vec{E_1}$ और $\vec{E_2}$ के योग के बराबर होता है;



चित्र 2 2

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} \quad ... (2{\cdot}12)$$

यदि कई आवेश किसी विन्दु पर विद्युत क्षेत्र उत्पन्न करते हैं तव भी परिणमित क्षेत्र उनके अलग-अलग क्षेत्रो के योग के वरावर होता है [स्पष्टतः $\vec{E_1}, \vec{E_2}$ आदि वैंक्टर राशि हैं, अत. इनके वैक्टर योग से तात्पर्य है]

अतः किसी बिन्दु पर कई आवेशों के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता उनके अलग-अलग विद्युत क्षेत्रों की तीव्रता के वैक्टर योग के बराबर होती है ।

यही सिद्धान्त आवेश पर कार्य करने वाले बल के लिये भी है । किसी आवेश पर कई आवेशों वे कारण परिणामित बल उनमें से प्रत्येक के कारण अलग-अलग बल के वैक्टर योग के वरावर होता है :

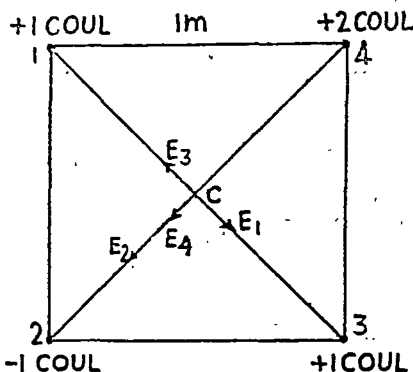
$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \cdots \text{आदि} \quad ....(2{\cdot}13)$$

इस सिद्धान्त का तात्पर्य यह हुआ कि दो आवेशों के कारण वल (अथवा क्षेत्र) दूसरे अन्य आवेश की उपस्थिति से प्रभावित नही होता । इस प्रकार कूलम्ब के नियम तथा अध्यारोपण-सिद्धान्त की सहायता से स्थिर आवेशो के कैसे भी समुदाय में विद्युत क्षेत्र अथवा परिणामित वल की गणना की जा सकती है ।

उदाहरण 2·1

1 मीटर भुजा के एक वर्ग के चारों कोनों पर चित्र 2·4 के अनुसार चार आवेश क्रमशः +1 कूलम्ब, −1 कूलम्ब, +1 कूलम्ब और +2 कूलम्ब के रखे हुए हैं। वर्ग के केन्द्र पर परिणामित क्षेत्र की गणना करिये।

चित्र में चारों कोनों 1, 2, 3, 4, पर स्थिति आवेशों के कारण क्षेत्र E_1, E_2, E_3 और E_4 से प्रदर्शित किये गये हैं। स्पष्टतः E_1 और E_3 बराबर तथा विपरीत होने के कारण निरस्त हो जावेंगे। E_2 और E_4 एक ही दिशा में होने के कारण जुड़ जायेंगे।



चित्र 2·4

$$E_2 = \frac{1}{9\times10^9}\cdot\frac{1\times1}{1^2} = 9\times10^9 \text{ न्यूटन}$$

अतः $E_4 = 2\times9\times10^9$ न्यूटन

अतः परिणमित विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $E = 27\times10^9$ न्यूटन/कूलम्ब (2) कोने की ओर।

2·6 विद्युतीय फ्लक्स

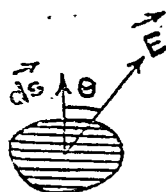
चित्र में एक लघु आकार के तल पर विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ प्रदर्शित किया गया है। इस लघु पृष्ठांश का क्षेत्रफल (ds) है तथा विद्युत क्षेत्र की दिशा तल पर अभिलम्ब से θ कोण बनाती है। अतः विद्युत क्षेत्र का अभिलम्ब के अनुदिश घटक होगा।

$$= E\cos\theta$$

इस घटक का पृष्ठांश के क्षेत्रफल से गुणा करने पर जो स्केलर राशि प्राप्त होती है वह उस पृष्ठांश में से विद्युतीय फ्लक्स कहलाता है।

विद्युतीय फ्लक्स $= ds.\ E\cos\theta$

पृष्ठांश के क्षेत्रफल को भी एक वैक्टर के रूप में व्यक्त किया जाता है जिसका मान क्षेत्रफल के बराबर तथा दिशा उसके तल के लम्बवत ली जाती है। अतः यदि इसके क्षेत्रफल को $\vec{ds}$ से व्यक्त किया जाय, तो वैक्टर रूप में—



चित्र 2·5

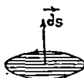
$$\text{विद्युतीय फ्लक्स} = \vec{E}\ .\ \vec{ds} \qquad ....(2·13)$$

जब हम किसी बन्द पृष्ठ (Closed surface) में से विद्युत फ्लक्स की गणना करते हैं तो उसकी पूरी सतह को छोटे-छोटे भागों में बांटा जा सकता है और प्रत्येक में से विद्युतीय फ्लक्स ज्ञात कर उनका योग किया जा सकता है। यदि इन पृष्ठांशों को छोटा करते जायें तो अन्ततः यह योग समाकलन का रूप ले लेगा; अर्थात पूरी सतह S में से फ्लक्स

$$= \int_S \vec{E} \cdot \vec{ds} \qquad ....(2\cdot14)$$

इस प्रकार की बन्द पृष्ठ में से फ्लक्स की गणना के लिए पृष्ठ के किसी भाग को सदिश रूप में व्यक्त करने के लिए उसकी दिशा वहां पर बाहर की ओर खींचे हुए अभिलम्ब (Outward normal) की ओर ली जाती है। अन्य अवस्था में जब पृष्ठ किसी बन्द पृष्ठ का भाग न होकर स्वतन्त्र पृष्ठ होती है, उसका वैक्टर मान उसके तल के लम्बवत उस दिशा में लिया जाता है जो सतह की परिधि के बनाई जाने की दिशा में एक दक्षिणावर्ती पेंच को घुमाने पर उसके बढ़ने की दिशा होगी। देखिये चित्र 2·6

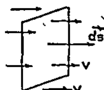
फ्लक्स की धारणा सभी वैक्टर क्षेत्रों में प्रयुक्त की जाती है, अतः किसी भी सदिश क्षेत्र $\vec{A}$ का किसी पृष्ठांश $\vec{ds}$ में से फ्लक्स $\vec{A} \cdot \vec{ds}$ के बराबर होगा। बहते हुए द्रव में उसके भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर द्रव का वेग $\vec{V}$ भिन्न-भिन्न हो सकता है तथा वेग के भिन्न-भिन्न मान भी वैक्टर क्षेत्र का एक उदाहरण है। यदि हम इस क्षेत्र में

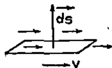


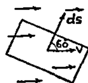


चित्र 2·6

किसी पृष्ठांश में से फ्लक्स $\vec{V} \cdot \vec{ds}$ ज्ञात करें तो स्पष्ट ही यह उसमें से प्रतिसैकण्ड प्रवाहित होने वाले द्रव का आयतन होगा। जब सतह $\vec{V}$ की दिशा के समान्तर हो तब फ्लक्स शून्य होगा।







(अ) (ब) (स)

चित्र 2·7 (अ) में फ्लक्स $= Vds$, (ब) में फ्लक्स – शून्यऔर (स) में $= Vds \cos 60 = \frac{1}{2} Vds$

2·7 गॉस का नियम

विद्युतीय क्षेत्र के फ्लक्स से सम्बन्धित गॉस का एक महत्त्वपूर्ण नियम है जिसके अनुसार किसी बन्द पृष्ठ में से कुल फ्लक्स उसके आकार आदि पर निर्भर नहीं करता, केवल उसके अन्दर विद्यमान आवेश पर निर्भर करता है। पहले हम एक गोलाकार पृष्ठ में से कुल फ्लक्स की गणना करते हैं जिसके केन्द्र पर एक विन्दु आवेश $+q$ स्थित है। उसके पृष्ठ के एक लघु अंश (ds) के केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र का मान होगा।

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \quad ....(2·15)$$

जो कि $\hat{r}$ की दिशा में वाहर की ओर होगा। इस पृष्ठांश पर अभिलम्ब भी इसी दशा से वाहर की ओर ही है, अतः $\vec{E}$ और $\vec{ds}$ दोनों एक ही दिशा में है, अतः फ्लक्स होगा $=Eds$ (देखिये चित्र 2·8)

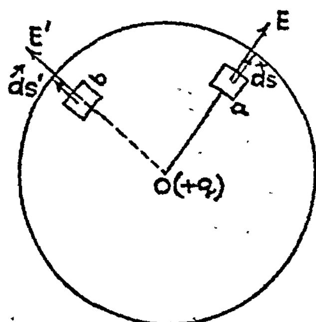
यही वात पृष्ठ के किसी भी अंश पर लागू होती है; प्रत्येक विन्दु पर विद्युत क्षेत्र तथा पृष्ठ पर वाहर की ओर लम्व की दिशा एक ही है तथा विद्युत क्षेत्र का मान भी सव जगह वरावर है (क्योंकि प्रत्येक विन्दु केन्द्र से r दूरी पर है),

अतः गोले के पूर्ण पृष्ठ में से कुल फ्लक्स

$=E\times$ पृष्ठ का कुल क्षेत्रफल

$$\text{कुल फलक्स}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.4\pi r^2=\frac{q}{\epsilon_0} \quad ....(2·16)$$

इस प्रकार कुल फ्लक्स केवल आवेश q पर निर्भर करता है। हम यह भी आसानी से सिद्ध कर सकते हैं कि आवेश केन्द्र पर न हो अथवा पृष्ठ गोलाकार न हो तव भी फ्लक्स इतना ही होगा।



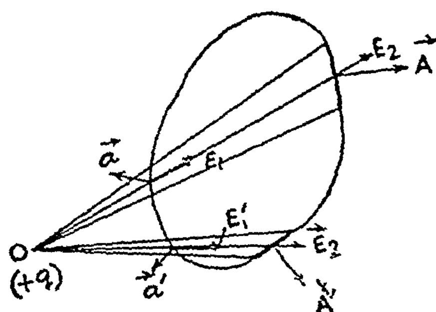
चित्र 2·8

माना कि पृष्ठ किसी अन्य आकार का है जिसमें विन्दु आवेश q, विन्दु O पर स्थित है; चित्र 2·9। विन्दु O को केन्द्र मानकर एक r अर्द्धव्यास के गोले की कल्पना करो, जो पूर्णतः उस दिये हुए पृष्ठ के अन्दर है। गोले इस के पृष्ठ में से फ्लक्स उपर्युक्त गणना के अनुसार

इस प्रकार वाहरी पृष्ठांश में से फ्लक्स का मान वही है जो आन्तरिक गोले के सम्वन्धित पृष्ठांश में से है। इसी प्रकार वाहरी पृष्ठ के भिन्न-भिन्न अंशों में से फ्लक्स आन्तरिक गोले के सम्वन्धित पृष्ठांशों में से फ्लक्स के वरावर होगा और वाहरी पृष्ठ में से कुल फ्लक्स उतना ही होगा जितना कि आन्तरिक गोले के पृष्ठ में से है, अर्थात् :—

गॉस का नियम :— कुल फ्लक्स $\int_s \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{\epsilon_o}$ ....(2·17)

किसी भी वन्द पृष्ठ में से कुल विद्युतीय फ्लक्स उसके अन्दर स्थित आवेश के मान वटे ϵ_o के वरावर होता है। जव आवेश उसके वाहर हो, तव उसमें से कुल फ्लक्स शून्य हो जायगा। इस स्थिति में पृष्ठ के किसी भाग में से फ्लक्स ऋणात्मक होगा (विद्युत क्षेत्र की दिशा वाहरी अभिलम्ब के विपरीत होगी) और दूसरी ओर के सम्वन्धित भाग में से उतना ही धनात्मक होगा। (देखिए चित्र 2·10) पूरे पृष्ठ के लिए गणना करने पर कुल फ्लक्स शून्य प्राप्त होगा।



चित्र 2·10

यदि वन्द पृष्ठ के अन्दर कई आवेश q_1, q_2....आदि हों, तव अध्यारोपण सिद्धान्त के अनुसार परिणमित क्षेत्र $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$

अतः फ्लक्स $= \int \vec{E}.\vec{ds} = \int_s \left[\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + ... \right] .\vec{ds}$

जैसा कि हम सिद्ध कर चुके हैं :—

$$\int_s \vec{E}_1 . \vec{ds} = \frac{q_1}{\epsilon_o} , \int_s \vec{E}_2 . \vec{ds} = \frac{q_2}{\epsilon_o} ....$$

$$\text{अतः फ्लक्स} = \frac{q_1 + q_2 + \ldots\ldots}{\epsilon_0}$$

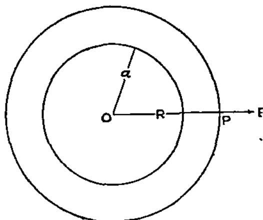
$$\text{इस प्रकार कुल फ्लक्स} = \frac{1}{\epsilon_0}\ (\text{अन्दर स्थित आवेशों का योग}) \qquad \ldots(2{\cdot}18)$$

समीकरण (2·17) अथवा (2·18) गॉस के नियम को व्यक्त करते हैं। यह स्थिर विद्युतिकी का उतना ही महत्त्वपूर्ण नियम है जितना कि कूलम्ब का नियम। वस्तुतः यह कूलम्ब के व्युत्क्रम वर्ग नियम का ही परिणाम है या उसका दूसरा रूप है। गुरुत्वाकर्षण बल का नियम भी व्युत्क्रम वर्ग नियम है इसलिए गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र के लिए भी इसी प्रकार का नियम प्राप्त किया जा सकता है।

2 8 एक समान आवेशित गोले के कारण विद्युत क्षेत्र—यद्यपि हमेशा कूलम्ब के नियम की सहायता से अर्थात् समीकरण (2·9) तथा (2·12) को प्रयुक्त कर विद्युत क्षेत्र ज्ञात किया जा सकता है, परन्तु कई स्थितियों में गॉस के नियम की सहायता से विद्युत क्षेत्र की गणना आसान हो जाती है। इसके कुछ उदाहरण यहाँ दिये जा रहे हैं—

सर्वप्रथम हम एक समान आवेशित गोले के कारण विद्युत क्षेत्र ज्ञात करेंगे—

(i) जब गोले के बाहर स्थित बिन्दु पर क्षेत्र ज्ञात करना हो—माना कि बिन्दु की गोले के केन्द्र से दूरी R है। क्योंकि आवेश एक गोले पर फैला है अतः सममिति (Symmetry) के आधार पर यह मानना संगत होगा कि उसके केन्द्र O से एक ही दूरी के सभी बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र का मान समान होगा और दिशा त्रैज्य (radial) होगी। अतः R दूरी पर स्थित बिन्दु पर क्षेत्र ज्ञात करने के लिए हम उस बिन्दु से गुजरने वाले एक गोलाकार पृष्ठ की कल्पना करते हैं जिसका केन्द्र भी O है। (चित्र 2·11) इसके प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र का मान समान है, जो माना E है, अतः इसके पूर्ण पृष्ठ में से कुल फ्लक्स $= E\ (4\pi R^2)$



चित्र 2·11

गॉस के नियम के अनुसार यह $\frac{q}{\epsilon_0}$ के बरावर होगा जबकि q दिये हुए गोले के पर कुल आवेश है।

अतः $$E\,(4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \quad \boxed{E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}} \qquad \text{.... (2·19)}$$

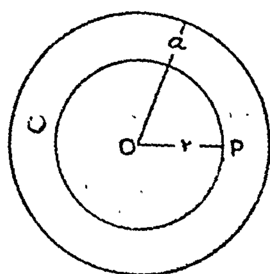
इसकी दिशा त्रैज्य अर्थात् O से बाहर की ओर है।

अतः बाहरी बिन्दु पर गोलीय आवेश का क्षेत्र इस प्रकार होता है जैसे कि पूर्ण आवेश उसके केन्द्र पर स्थित हो।

यही बात गोले के पृष्ठ पर स्थित बिन्दु के लिए लागू होगी, वहाँ पर विद्युत क्षेत्र होगा, $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$ ....(2·20)

जब कि a आवेश युक्त गोले का अर्द्धव्यास है।

(ii) जब गोले के अन्दर स्थित बिन्दु पर क्षेत्र ज्ञात करना हो—यदि गोला चालक पदार्थ का हो, तब उसका पूरा आवेश उसकी सतह पर होता है और उसके अन्दर के बिन्दु से गुजरती हुई गोलीय सतह की कल्पना करने पर, उसके अन्दर आवेश का मान शून्य होगा, अतः फ्लक्स भी शून्य होगा। इसलिए चालक गोले के अन्दर किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र शून्य होगा। परन्तु यदि गोला अचालक पदार्थ का हो और उसमें आवेश q पूरे आयतन में एक समान वितरित हुआ हो, तब हम केन्द्र O से r दूरी पर स्थित बिन्दु से गुजरती हुई एक गोलीय सतह की कल्पना करेंगे (चित्र 2·12) सममिति के आधार पर इसके प्रत्येक बिन्दु पर क्षेत्र समान होगा और उसकी दिशा त्रैज्य होगी, अतः विद्युतीय फ्लक्स



चित्र 2·12

$$= E(4\pi r^2)$$

गॉस के नियम से

$$4\pi r^2\, E = \frac{1}{\epsilon_0}\ (\text{गोले के अन्दर आवेश}) \qquad \text{....(2·21)}$$

क्योंकि आवेश पूरे आयतन में बराबर बटा हुआ है, अतः गोले के अन्दर उसके आयतन के अनुपात मे आवेश होगा।

अतः गोले के अन्दर आवेश $= \frac{q\,\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi a^3}$

$$= \frac{q\, r^3}{a^3}$$

अतः (2·21) से

$$4\pi r^2\, E = \frac{q\, r^3}{\epsilon_o a^3}$$

$$\therefore \quad E = \frac{q\, r}{4\pi \epsilon_o a^3} \qquad ....(2 \cdot 22)$$

अर्थात् क्षेत्र का मान बिन्दु की दूरी r के समानुपाती होगा। स्पष्ट ही यदि गोले पर ऋण आवेश हो तो $\vec{E}$ की दिशा विपरीत होगी।

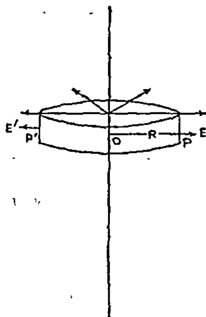
2·9 अनन्त विस्तार के रेखीय आवेश के कारण विद्युत-क्षेत्र

माना कि आवेश एक अत्यधिक लम्बे पतले चालक तार पर स्थित है और उसकी प्रति इकाई लम्बाई पर आवेश की मात्रा λ है। इसको आवेश का रेखीय घनत्व (*linear charge density*) कहते हैं। हम इस पर रेखीय आवेश से R दूरी पर स्थित बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करना चाहते हैं। (देखिये चित्र 2·13)

यहाँ भी सममिति के आधार पर हम मान सकते हैं कि P बिन्दु पर क्षेत्र रेखीय आवेश के लम्बवत होगा तथा रेखीय आवेश से एक ही लम्बवत् दूरी R पर सब बिन्दुओं पर विद्युतीय क्षेत्र का मान बराबर होगा, विद्युत क्षेत्र की दिशा त्रैज्य होगी। अब हम इकाई लम्बाई व अर्द्ध-व्यास R के बेलनाकार पृष्ठ की रचना करते हैं *जिस पर P बिन्दु अवस्थित होगा।* इसमें से कुल विद्युत फ्लक्स की गणना करते हैं। इसकी सम्पूर्ण वक्र सतह पर क्षेत्र का मान बराबर है, जो P पर भी है। माना कि यह E है, और यह हर बिन्दु पर पृष्ठ के लम्बवत है, अतः फ्लक्स

$$= 2\pi R E$$

इसके दोनों समतल पृष्ठ विद्युतीय क्षेत्र के समान्तर हैं, अतः उनमें से विद्युतीय



चित्र 2·13

फ्लक्स शून्य होगा। अतः इस बेलनाकार पृष्ठ की पूरी सतह में से कुल फ्लक्स$=2\pi RE$

$$=\frac{1}{\epsilon_0}(\lambda) \qquad \text{(गॉस के नियम से)}$$

—क्योंकि इस पृष्ठ के अन्दर इकाई लम्बाई में स्थित आवेश है

$$\therefore \qquad 2\pi RE=\frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\therefore\ E=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}} \qquad ....(2\cdot23)$$

मी० कि० सं० पद्धति में λ की इकाई कूलम्ब/मीटर होगी।

2·10 अनन्त विस्तार की आवेश की चादर का विद्युत क्षेत्र

सममिति और गॉस के नियम की सहायता से अनन्त विस्तार की आवेश की चादर का उसके पास किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र सरलता से ज्ञात किया जा सकता है। यहाँ हम आवेश की मात्रा एकाई क्षेत्रफल के लिए बतलाते हैं और आवेश का वितरण एक समान मानते हैं। तब प्रति इकाई क्षेत्रफल आवेश की मात्रा को आवेश का पृष्ठ-घनत्व (Surface density of charge) कहा जाता है और सामान्यतः इसको σ (sigma) से व्यक्त करते हैं। पुनः सममिति के आधार पर हम कह सकते हैं कि चादर के दोनों ओर विद्युतीय क्षेत्र उसके तल के लम्बवत होना चाहिए; साथ ही चादर से बराबर दूरी के दो बिन्दु P और P′ पर क्षेत्र का मान एक समान तथा दिशा विपरीत होना चाहिए। अब हम चित्र 2·14 के अनुसार एक बेलनाकार पृष्ठ की रचना करते हैं जिसके एक समतल पृष्ठ पर P बिन्दु है तथा दूसरे पर P′। इस समतल पृष्ठ का (जो वृत्तीय दिखाया गया है) क्षेत्रफल A है। स्पष्ट ही इन दोनों समतल पृष्ठों में से ही धन फ्लक्स गुजरता है और बची हुई वक्र सतह में से फ्लक्स शून्य है। अतः कुल विद्युतीय फ्लक्स

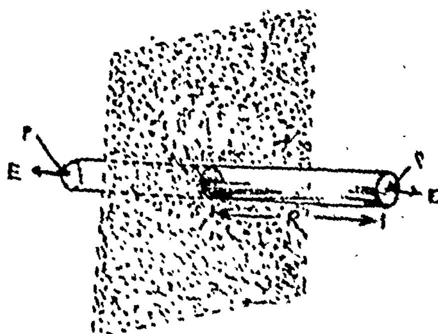
बेलनाकार$=AE+AE=2AE$

इस बेलनाकार पृष्ठ में अवस्थित आवेश$=A\sigma$

∴ गॉस के नियम के अनुसार,

$$2AE=\frac{A\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \boxed{E=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}} \qquad ....(2\cdot24)$$



चित्र 2·14

अर्थात् विद्युत क्षेत्र P बिन्दु की दूरी R पर निर्भर नहीं करता। मी० कि० सै० पद्धति में σ की इकाई कूलम्ब/वर्ग मीटर है। स० ग० स० प्रणाली में आवेश को स्थि० वि० इकाई (e. s. u.) में लेने पर समीकरण (2·19) से (2·24) तक के क्षेत्र क्रमशः निम्न प्रकार होंगे

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & E=\frac{q}{R^2} \\ \text{(ii)} & E=\frac{q}{a^2} \\ \text{(iii)} & E=\frac{qr}{a^3} \\ \text{(iv)} & E=\frac{2\lambda}{R} \\ \text{और (iv)} & E=2\pi\sigma \end{array}\right\} \quad \ldots(2\cdot25)$$

गॉस के नियम के कुछ महत्त्वपूर्ण परिणाम—

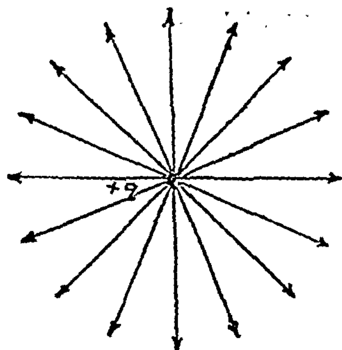
1. एक ठोस चालक वस्तु मे उसका सम्पूर्ण आवेश उसकी सतह पर ही अवस्थित होता है। स्थिर अवस्था में चालक मे विद्युत क्षेत्र शून्य होता है (अन्यथा धन आवेश क्षेत्र की दिशा मे गति करेगा और स्थिर अवस्था नही होगी)। अतः वस्तु के पृष्ठ के निकटस्थ अन्दर के बन्द पृष्ठ मे से फ्लक्स शून्य होगा, अर्थात् उसके अन्दर कोई आवेश नहीं है।

2. खोखले बन्द चालक मे भी उसकी बाहरी सतह पर ही आवेश रह सकता है, अन्दर की सतह पर नही। उसके अन्दर के रिक्त स्थान में विद्युत क्षेत्र शून्य होगा; उसके बाहर कैसा भी विद्युत क्षेत्र हो अत. खोखले बन्द चालक विद्युतीय परिरक्षण (electric shielding) के लिए प्रयुक्त होते हैं।

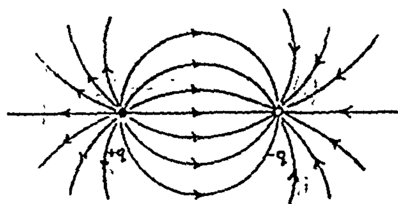
विद्युत क्षेत्र का बल-रेखाओं द्वारा निरूपण—

विद्युत क्षेत्र को बल रेखाओं द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। ये विद्युत क्षेत्र मे ऐसी रेखायें होती हैं जिनके किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा उस बिन्दु पर क्षेत्र की दिशा बतलाती है। यदि क्षेत्र की दिशा सर्वत्र एक सी हो तो ये सीधी रेखायें होती हैं (जैसे एक बिन्दु आवेश के कारण, चित्र 2·15) तथा यदि दिशा प्रत्येक बिन्दु पर बदलती है, तो वक्र होती हैं (चित्र 2·16) जिसमें दो बराबर तथा विपरीत आवेशों का क्षेत्र दिखाया गया है।

विद्युत क्षेत्र की दिशा के अतिरिक्त उसका मान भी विद्युत रेखाओं द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। इसके लिए परिपाटी यह है कि इकाई क्षेत्रफल में से



चित्र 2·15



चित्र 2·16

वल रेखाओं की संख्या क्षेत्र के मान के बराबर होती है। इस परम्परा के अनुसार (q) आवेश से कुल $\frac{q}{\epsilon_0}$ वल रेखायें निकलती हैं।

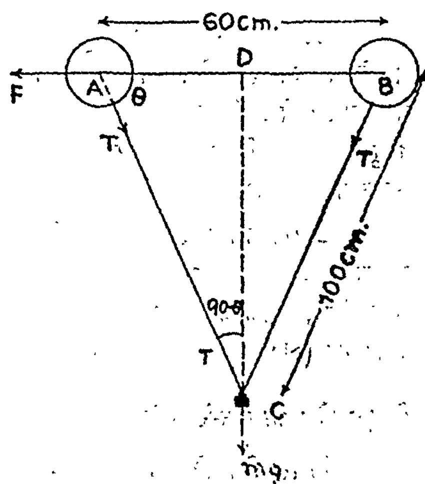
उदाहरण 2·2. दो एक जैसे गुब्बारे जिनमें हीलियम गैस भरी है, 100 से० मी० लम्बी डोरियों से एक 5 ग्राम के भार से बाँध दिये गये हैं (चित्र 2·17)। प्रत्येक पर आवेश (q) है। इस आवेश का मान स्थि० वि० इकाई में ज्ञात करो, यदि दोनों स्थिर अवस्था में 60 से० मी० दूर रहकर हवा में तैरते हैं।

चित्र में स्थिर अवस्था प्रदर्शित की गई है। डोरियों में तनाव T द्वारा प्रदर्शित किये गये हैं विन्दु C की स्थिर अवस्था के लिए, तनाव के उर्ध्वाधर घटक

$=T \cos (90-\theta)=T \sin \theta$

अतः दोनों डोरियों के तनाव के उर्ध्वाधर घटक

$$2T \sin \theta = mg$$



चित्र 2·17

संदर्भ पुस्तकें—
1. Fundamentals of Physics. Henry Semat.
2. College Physics. F. A. Saunders and Paul Kirkpatrick.
3. Physics Part II Halliday & Resnick.
4. Berkeley Physics Course II Volume.

या $2T \sin \theta = 5 \times 980$ ...(1)

अब चित्र में $\cos \theta = \frac{AD}{AC} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \frac{9}{100}} = \sqrt{\frac{91}{100}}$

$\therefore 2T \sqrt{\frac{91}{100}} = 5 \times 980 \quad \therefore T = \frac{5 \times 980 \times 10}{2\sqrt{91}}$ ...(2)

अब किसी एक गुब्बारे (A) की स्थिर अवस्था पर विचार किया, तब

$$F = T \cos \theta$$

अतः $\frac{q^2}{60^2} = \frac{5 \times 980 \times 10}{2\sqrt{91}} \cdot \frac{3}{10}$

$$\therefore \quad q^2 = \frac{5 \times 980 \times 10 \times 3}{2\sqrt{91} \times 10} \times 60^2 = \frac{15 \times 980 \times 60^2}{2\sqrt{91}}$$

$$\therefore \quad q = 1665{\cdot}4 \ e.s.u$$

उदाहरण 2·3—एक 2 वर्ग मीटर के समतल पृष्ठ के आधे भाग में क्षेत्र का मान 10 न्यूटन/कूलम्ब तथा दिशा पृष्ठ के तल से कोण 30° बनाती है, शेष आधे भाग में क्षेत्र का मान 6 न्यूटन/कूलम्ब तथा दिशा वही है। पूरे पृष्ठ में से विद्युतीय फ्लक्स की गणना करिये।

प्रथम आधे भाग में क्षेत्र का मान $E = 10$ न्यूटन/कूलम्ब

क्षेत्र के तल से झुकाव $= 30°$

अतः क्षेत्र पर लम्ब से क्षेत्र का झुकाव $= (90 - 30) = 60°$

अतः इसमें से फ्लक्स $= E\, ds \cos \theta$

$= 10.\ 1.\ \cos 60 = 10.\ 1.\ \frac{1}{2} = 5$ इकाई

द्वितीय अर्द्ध भाग में से फ्लक्स $= 6{\cdot}1\ \cos 60 = 6{\cdot}1.\ \frac{1}{2} = 3$ इकाई

अतः कुल फ्लक्स $= 5 + 3$

$= 8$ $\frac{\text{न्यूटन मीटर}^2}{\text{कूलम्ब}}$ या वोल्ट मीटर

प्रश्न

1. प्रकृति में मौलिक बल कौन-कौन से हैं ?
गुरुत्वाकर्षण बल तथा विद्युतीय बल की समानताओं का वर्णन करिए। इनमें मुख्य असमानता क्या है ?

2. विद्युत क्षेत्र का अभिप्राय समझाइये तथा क्षेत्र की तीव्रता की परिभाषा दीजिये। कूलम्ब के नियम के अनुसार $(+q)$ आवेश के कारण $\vec{r}$ दूरी पर विद्युत क्षेत्र क्या होगा ? $(-q)$ आवेश के कारण क्या होगा ?

3. आवेश की क्वाण्टम प्रकृति का अनुमान किस प्रकार लगाया गया है ? इसके अनुसार आवेश की मूल इकाई क्या है ? कुछ कणों के नाम बताइये जिन पर इस मूल इकाई के बराबर आवेश होता है।

4. कूलम्ब के नियम का आवेदन करिये तथा वैक्टर रूप में आवेश पर बल को व्यक्त करिये। आवेश किसी माध्यम में स्थित हों, तब क्या कूलम्ब के नियम द्वारा उनके बीच बल की गणना की जा सकती है ?

2 कूलम्ब के धन आवेश के कारण 3 मीटर की दूरी पर स्थित एक अन्य आवेश पर 2×10^9 न्यूटन बल उसी की ओर लगता है। द्वितीय आवेश का मान तथा चिन्ह ज्ञात करिये। [उत्तर : 1 कूलम्ब, ऋण]

5. विद्युतीय फ्लक्स का अर्थ समझाइये।

सिद्ध कीजिये कि एक गोलाकार पृष्ठ में से कुल विद्युतीय फ्लक्स केवल उसके अन्दर स्थित आवेश के मान पर निर्भर करता है, न कि गोले के आकार पर। यदि अन्य आकार का बन्द पृष्ठ (Closed surface) हो, तो क्या उसमें से कुल फ्लक्स भिन्न होगा ?

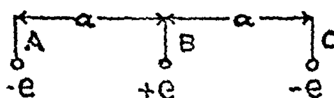
6. गॉस के नियम की सहायता से एक एक-समान आवेशित गोले के अन्दर स्थित विन्दु पर विद्युत क्षेत्र का मान ज्ञात करिये। उसके केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र का मान क्या होगा ?

7. गॉस के नियम की सहायता से निम्न स्थिति में विद्युत क्षेत्र की गणना करिये :—

(i) एक अनन्त लम्बाई के पतले एक समान आवेशित चालक के पास किसी विन्दु पर

(ii) अनन्त विस्तार की आवेश की चादर के कारण किसी बिन्दु पर

चित्र (2·18) के अनुसार तीन आवेश, जिनमें प्रत्येक का मान एक इलेक्ट्रान आवेश के बरावर है, रखे हुए हैं। प्रत्येक आवेश पर विद्युतीय बल की गणना करिये, प्रत्येक आवेश का चिन्ह चित्र में प्रदर्शित है।



चित्र 2·18

[उत्तर क्रमशः $\frac{3}{16} \frac{e^2}{\pi\in a^2}$ $\overrightarrow{AB}$ दिशा में,

शून्य, तथा

$\frac{3}{16} \frac{e^2}{\pi\in_o a^2}$ $\overrightarrow{CB}$ दिशा में.]

9. दो छोटी गेंदें, प्रत्येक की संहति 0·25 ग्राम, एक 20 से० मी० लम्बे रेशम के धागे के सिरों पर बाँध दी गई हैं। धागे को उसके मध्य बिन्दु से लटकाया गया है और गेंदों पर बराबर-बराबर धन आवेश दिया गया है। इस कारण वे एक दूसरे से प्रतिकर्षित होकर दूर हट जाती है जब तक कि दोनों से जुड़े हुए धागे एक दूसरे के लम्बवत् हो जाते हैं। प्रत्येक गेंद पर कितना आवेश है?
[स्थि० वि० इकाइयों का प्रयोग करें] [उत्तर . $q=221·3$ *e. s. u*]
उपर्युक्त प्रश्न में वर्णित गेंदों के विद्युतीय प्रतिकर्षण बल तथा गुरुत्वाकर्षण बल की तुलना करिये। दिया हुआ है,
$G=6\ 67\times10^{-8}$ डाइन से०मी०^2/ग्राम^2 [उत्तर : $1·17\times10^{13}$]

10. एक अल्फा कण से 10^{-9} मीटर की दूरी पर स्थित एक इलेक्ट्रान का त्वरण क्या होगा, अल्फा कण का आवेश इलेक्ट्रान आवेश से दुगुना होता है। अध्याय में दिये हुए नियतांको का उपयोग करिये।
[उत्तर : $5·06\times10^{20}$ मीटर/सेकण्ड^2]

11. पृथ्वी के धरातल पर एक ऊर्ध्वाधर विद्युतीय क्षेत्र 100 न्यूटन/कूलम्ब के मान का नीचे की ओर है। इसके कारण एक ऑक्सीजन का आयन कितने बल से ऊपर उठेगा जबकि उस पर एक इलेक्ट्रान के बराबर आवेश है।
[उत्तर $1\ 6\times10^{17}$ न्यूटन]

12. पृथ्वी के धरातल पर प्रश्न 11 के अनुसार विद्युतीय क्षेत्र मानते हुए गणना करिये कि पृथ्वी के तल पर कितना ऋणात्मक आवेश प्रति वर्गमीटर होना प्रदर्शित करता है। यह कितने इलेक्ट्रान प्रतिवर्ग मीटर अधिक होना प्रदर्शित करता है?
[उत्तर : $8\ 85\times10^{-10}$ कूलम्ब/वर्गमीटर, $5\ 53\times10^{9}$ इलेक्ट्रान वर्गमीटर]

13. किसी एक हाइड्रोजन परमाणु में इलेक्ट्रान प्रोटोन से 2×10^{-10} मीटर की दूरी पर है। इनके बीच आकर्षण बल के मान की गणना करो।
[उत्तर $-5\ 76\times10^{-9}$ न्यूटन]

14. एक लघु गोले पर 18 माइक्रो कूलम्ब आवेश है। उस पर एक अन्य गोले के कारण बल की गणना करो जिस पर आवेश (+24) माइक्रो कूलम्ब है जिसकी दूरी 0 75 मीटर है। दोनों निर्वात में स्थित हैं।
[उत्तर :

15. एक ·1 मीटर अर्द्धव्यास के गोले में सर्वत्र एक समान रूप से धन आवेश वितरित है। गोले के केन्द्र से निम्न दूरी पर स्थित विन्दु पर विद्युतीय क्षेत्र की गणना करो जबकि उस पर कुल आवेश 10^{-8} कूलम्ब है।

(i) 2 मीटर (ii) 0·05 मीटर

[उत्तर : (i) $2·5 \times 10^6$ न्यूटन/कूलम्ब (ii) $5·62 \times 10^4$ न्यूटन/कूलम्ब]

16. दो वरावर परन्तु विपरीत आवेश (मान Q) एक दूसरे से 'a' दूरी पर स्थित हैं। उनको मिलाने वाली रेखा पर उनके मध्य विन्दु से 'r' दूरी पर स्थित विन्दु पर विद्युत क्षेत्र की गणना करें। यह भी सिद्ध करिये कि यदि दूरी r उनके वीच की दूरी 'a' की अपेक्षा बहुत अधिक हो, तो क्षेत्र का मान लगभग निम्न होगा :—

$$E = \frac{Qa}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{r^3}$$

17. दो वरावर विद्युत-आवेशों, मान 240 माइक्रो कूलम्ब, के मध्य-विन्दु पर क्षेत्र की गणना करो ? उनके वीच की दूरी 0·5 मीटर है। यदि उनमें से एक ऋण आवेश ($-240\ \mu$ coul) हो, तब उसी विन्दु पर विद्युत-क्षेत्र की गणना करो।

[उत्तर : (i) शून्य (ii) $6·91 \times 10^7$ न्यूटन/कूलम्ब ऋण आवेश की ओर]

18. एक लघु धन आवेशित पिण्ड, आवेश +25 माइक्रो कूलम्ब, पर एक विद्युत क्षेत्र में 8·5 न्यूटन वल कार्य करता है। उस विन्दु पर विद्युत क्षेत्र का मान ज्ञात करिये। [उत्तर : $3·4 \times 10^5$ न्यूटन/कूलम्ब]

19. एक समवाहु त्रिभुज, भुजा 0·20 मीटर, के दो कोनों पर दो 600 माइक्रो कूलम्ब के एक समान आवेश स्थित है। तीसरे कोने पर स्थित 20 माइक्रो कूलम्ब के आवेश पर परिणमित वल का मान व दिशा ज्ञात करो।

[उत्तर : 4676 न्यूटन ; 600μ Coul. को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् उनसे दूर दिशा में,]

3 विद्युत विभव तथा विद्युत क्षेत्र से सम्बद्ध ऊर्जा
(ELECTRIC POTENTIAL AND ENERGY ASSOCIATED WITH ELECTRIC FIELD)

3·1. विद्युत विभव की संकल्पना तथा विभवान्तर
3·2. विभव तथा क्षेत्र में सम्बन्ध
3·3. विद्युतीय-द्विध्रुव के कारण विभव तथा क्षेत्र
3·4. सतह पर स्थित आवेश पर बल
3·5. विद्युत क्षेत्र के साथ सम्बद्ध ऊर्जा

3·1. विद्युत विभव की संकल्पना तथा विभवान्तर

अध्याय 2 में विद्युत क्षेत्र की धारणा की [illegible] की [illegible] है। यदि प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात हो तो उस बिन्दु पर स्थित किसी आवेश पर बल ज्ञात हो सकता है। अतः उसकी सम्भावित [illegible] का अनुमान भी किया जा सकता है। स्थिर आवेशों के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र [illegible] विलगता के कारण उसका वर्णन एक [illegible] है [illegible] के अध्याय 2 में वर्णन किया गया है। यह एक संरक्षी क्षेत्र (Conservative field) है तथा इसमें एक आवेश को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में किया गया कार्य पथ पर निर्भर नहीं करता।

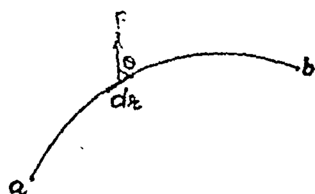
चित्र (3·1) में 'a' और 'b' दो बिन्दु हैं [illegible] आवेश q को चित्र में प्रदर्शित पथ से ले जाया जाता है। यदि पथ के [illegible] बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र E है तो आवेश पर बल, $F = Eq$ तथा [illegible] विस्थापन $\vec{dr}$ में किया गया कार्य,

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

कार्य = बल × बल की दिशा में विस्थापन

$$= F \times dr \cos\theta = \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

यहाँ हम वैक्टर के स्केलर गुणा का उपयोग देख सकते हैं अतः विन्दु a से b तक आवेश द्वारा किया गया कुल कार्य



$$W_{ab} = -\int_a^b \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

$$= -\int_a^b \vec{E}q \cdot \vec{dr}$$

चित्र 3·1 ....(3·2)

(यहाँ कार्य क्षेत्र की दिशा में होता है अतः आवेश द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक है)

अब यदि इकाई आवेश पर किये गये कार्य (अर्थात् कार्य प्रति इकाई आवेश) की गणना की जाय, तो (3·2) में q का भाग देने पर,

$$W_{ab} \text{ (इकाई आवेश)} = -\int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dr} \qquad ....(3\cdot3)$$

'E' के संरक्षी क्षेत्र होने के कारण यह कार्य a से b के पथ पर निर्भर नहीं करता; अतः केवल विन्दु a और b तथा विद्युत क्षेत्र E पर ही निर्भर करता है, अतः एक दिये हुए विद्युत क्षेत्र में एक बिन्दु (a) से दूसरे बिन्दु (b) तक प्रति इकाई आवेश किये गये कार्य को उस क्षेत्र की तथा उन विन्दुओं से सम्बन्धित एक विशिष्ट राशि के रूप में लिया जा सकता है, यह उन बिन्दुओं का विभवान्तर कहलाता है। अतः a और b का विभवान्तर

$$V_{ab} = -\int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dr} \qquad ....(3\cdot4)$$

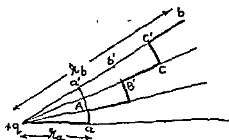
स्पष्ट ही, दिये हुए विन्दुओं के लिए केवल क्षेत्र (E) पर निर्भर करता है, अतः विभवान्तर भी विद्युत क्षेत्र की ही विशेषता है।

विन्दु-आवेश के कारण क्षेत्र में कार्य पथ पर निर्भर नहीं करता, यह चित्र (3·2) की सहायता से प्रदर्शित किया जा सकता है। विन्दु a से b तक प्रति इकाई आवेश कार्य की गणना करना है। (q) से a की दूरी$=r_a$ तथा (q) से (b) की दूरी$=r_b$ है। यदि (q) को केन्द्र मानकर चाप $a\,a'$ खींचा जाय, तो इसके प्रत्येक विन्दु पर विद्युत क्षेत्र की दिशा लम्बवत् है, अतः प्रति इकाई आवेश, a से a' तक किया गया कार्य शून्य होगा, अब a' से b तक क्षेत्र भी इसी दिशा में है अतः प्रति इकाई आवेश कार्य

$$= - \int_{a'}^{b} \vec{E} . \vec{dr}$$

$$W \text{ (इकाई आवेश)} = - \int_{a'}^{b} \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr \qquad ....(3{\cdot}5)$$

इसके बजाय हम कार्य की गणना के लिए a से A, A से B, B से B′, B′ से C, C से C′ और C′ से b प्रयुक्त कर सकते हैं। इनमें पथांश aA BB′ और CC′ में कार्य शून्य होगा क्योंकि ये क्षेत्र के लम्बवत हैं। बचे हुए पथांश AB, B′C स्पष्ट ही, क्रमशः $a'b'$ और $b'c'$ के बराबर हैं तथा क्षेत्र की ही दिशा में है। इस प्रकार इस पथ से भी कार्य a' से b', b' से c' और c' से b तक के पथांशों में हुआ, जो कि (3·5) के समान ही है।



चित्र 3·2

चित्र से स्पष्ट है कि $qa' = qa = r_a$

अतः $$W \text{ (इकाई आवेश)} = - \int_{r_a}^{r_b} \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr$$

$$= - \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} = - \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left[- \frac{1}{r} \right]_{r_a}^{r_b}$$

$$W_{ab} = - \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

इसी प्रकार से स्थिर आवेशों से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र में किसी बिन्दु a से अन्य बिन्दु b तक किया गया कार्य पथ-निर्भर (path-... नहीं होता तथा उन बिन्दुओं पर ही निर्भर करता है। अतः यह ... विद्युत क्षेत्र से सम्बन्धित किसी संख्या के अन्तर के रूप में

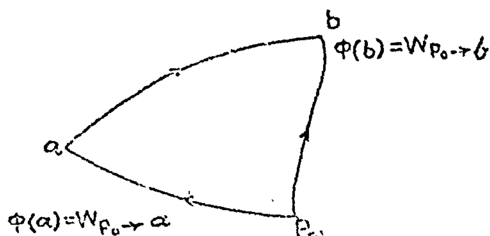
कि पहले लिखा गया है, इसको हम उन विन्दुओं के विद्युत-विभव का अन्तर (Potential difference) कहते हैं। अतः उपर्युक्त उदाहरण में

$$W_a b = -\int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dr} = \phi(b) - \phi(a) \qquad ....(3 \cdot 7)$$

अर्थात् a से b तक प्रति इकाई आवेश किया हुआ कार्य b विन्दु के विद्युत विभव $\phi(b)$ और a विन्दु के विद्युत विभव $\phi(a)$ के अन्तर के बराबर है। यद्यपि विभव अन्तर तो प्रति इकाई आवेश कार्य से द्वारा ज्ञात हो जाता है, तथापि दिये हुए विन्दुओं पर विभव जैसे $\phi(b)$ और $\phi(a)$, निर्धारित करने के लिये कोई सन्दर्भ विन्दु नियत करना आवश्यक होगा जो सुविधानुसार कोई भी विन्दु हो सकता है। उदाहरण के लिये हम चित्र (3·3) में यदि P_0 बिन्दु को संदर्भ बिन्दु मान लें तब (a) का विभव लिया जायगा

$$\phi(a) = W_{P_0} \rightarrow a \text{ (प्रति इकाई आवेश)}$$

इसी प्रकार b विन्दु का विभव,



चित्र 3·3

$$\phi(b) = W_{P_0} \rightarrow b \text{ (प्रति इकाई आवेश)}$$

अब हम a से b तक प्रति इकाई आवेश कार्य की गणना के लिये a से P_0 और P_0 से b का पथ प्रयुक्त करें, तो a से P_0 कार्य—$\phi(a)$ होगा तथा P_0 से b कार्य $\phi(b)$ होगा। अतः कुल कार्य—

$$W_{a \rightarrow b} = \phi(b) - \phi(a) = -\int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dr} \qquad ....(3 \cdot 8)$$

स्पष्ट ही यह विन्दु P_0 (अर्थात् संदर्भ विन्दु) पर निर्भर नहीं करता, अतः बिन्दु 'a' विन्दु से 'b' विन्दु तक किया प्रति इकाई आवेश कार्य (b) और (a) का विभवान्तर होता है जो कि दिये हुए क्षेत्र में एक नियत राशि है। अतः इसकी इकाई जूल प्रति कूलम्ब होगी। इसे 'वोल्ट' कहते हैं। स० ग० स० गॉसियन इकाई स्टेट वोल्ट कहलाती है जो कि अर्ग/स्थि० वि० इकाई आवेश होती है।

संदर्भ बिन्दु नियत कर लेने पर किसी बिन्दु P का विद्युत विभव

$$\phi(P) = W_{P_0 \to P} = -\int_{P_0}^{P} \vec{E} \cdot \vec{dr} \qquad ....(3\cdot9)$$

समीकरण (3·6) और (3·8) के अनुसार

$$W_{a \to b} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = \phi(b) - \phi(a)$$

अतः $$\phi(a) - \phi(b) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) \qquad ....(3\cdot10)$$

किसी बिन्दु का विद्युत विभव नियत करने में अधिकांशतः सदर्भ बिन्दु अनन्त पर लिया जाता है। अतः समीकरण (3·10) के अनुसार (b) बिन्दु को अनन्त पर लेने पर (a) बिन्दु का विभव

$$\phi(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_a}$$

अतः निर्देश मूल बिन्दु (Origin) पर स्थित q बिन्दु आवेश के कारण किसी भी बिन्दु $P(x, y, z)$ जिसकी आवेश से दूरी r हो, पर विद्युत विभव

$$\phi(P) \text{ या } \phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \qquad ....(3\cdot11)$$

[स०ग०स० गॉसियन प्रणाली में $\phi(x,y,z) = \frac{q}{r}$] ....(3·12)

स्पष्ट ही विद्युत विभव एक स्केलर राशि है। इसको हम उस बिन्दु का विभव-फलन (potential function) कहते है। यदि कई आवेश विद्यमान हों तब किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र, उनके अलग-अलग विद्युत क्षेत्र के योग के बराबर होता है अतः विद्युत विभव

$$\phi(P) = -\int_{P_0}^{P} \vec{E} \cdot \vec{dr}$$

$$= -\int_{P_0}^{P} \left(\vec{E_1} + \vec{E_2} + \vec{E_3} + ...\right) \cdot \vec{dr}$$

$$= -\int_{P_0}^{P} \vec{E_1} \cdot \vec{dr} - \int_{P_0}^{P} \vec{E_2} \cdot \vec{dr} - \int_{P_0}^{P} \vec{E_3} \cdot \vec{dr}$$

$$\phi(P) = \phi_1(P) + \phi_2(P) + \phi_3(P) +$$

इस प्रकार कई आवेशों के कारण किसी विन्दु पर विभव उस विन्दु पर उनके अलग-अलग विभव के बीजगणितीय योग के बराबर होगा। यह विभव-सम्बन्धी अध्यारोपण का सिद्धान्त है।

विशेष—समीकरण (3·9) के अनुसार किसी विन्दु पर विभव ϕ (P) सन्दर्भ विन्दु पर निर्भर करेगा और सन्दर्भ विन्दु अनन्त पर होने पर समीकरण (3·11) के अनुसार होगा; तथापि दो विन्दुओं का विभवान्तर $\phi(a)-\phi(b)$, सन्दर्भ विन्दु पर निर्भर नहीं करेगा।

विद्युत विभव की संकल्पना भी विद्युत क्षेत्र के समान ही उपयोगी है और एक समर्थ संकल्पना है। किसी भी दिक-प्रदेश (space region) में दोनों में से किसी भी एक राशि का वितरण ज्ञात होने पर उस प्रदेश में आवेशों के व्यवहार का ज्ञान हो सकता है। वस्तुतः दोनों में सीधा सम्बन्ध है और एक राशि का वितरण ज्ञात हो तो दूसरी राशि का वितरण भी ज्ञात हो जाता है।

3·2. विभव तथा क्षेत्र में सम्बन्ध

यदि दो विन्दु a और b अति निकट, dr दूरी पर हैं तथा इनके बीच विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ है, तो उनके बीच विभवान्तर

$$dV=-Edr \qquad \text{....(3·14)}$$

(क्योंकि इकाई आवेश को a से b तक ले जाने में कार्य $=-Edx$) जबकि 'E', dr की ही दिशा में है

अतः
$$E=-\frac{dV}{dr} \qquad \text{....(3·15)}$$

(dr) के बहुत लघु होने पर $\left(\frac{dV}{dr}\right)$ विभव परिवर्तन की दर ही हो जाती है जो विभव फलन का अवकलन (differentiation) करने पर प्राप्त होता है। इस प्रकार किसी विन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता वहाँ पर विभव परिवर्तन की दर के बराबर तथा विपरीत दिशा में होती है।

उपर्युक्त उदाहरण में यदि (dV) धनात्मक हो अर्थात् a से b का विभव अधिक हो, तो 'E' ऋणात्मक अर्थात b से a की ओर होगा। अतः एक धन आवेश (b) से (a) की ओर गति करेगा। इस प्रकार धन आवेश उच्च विभव से निम्न विभव की ओर गति करता है। तदनुसार ऋण आवेग निम्न विभव से उच्च विभव की की ओर गति करता है।

जैसा कि विद्युत क्षेत्र की परिभाषा (अध्याय 2) में वर्णन किया जा चुका है यह एक वैक्टर-क्षेत्र है अतः इसके तीनों अक्षों के अनुदिश घटकों के रूप में इसका वर्णन किया जा सकता है। किसी विन्दु $P(x, y, z)$ पर

$$E(x, y, z) = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k} \qquad ....(3\cdot16)$$

अब एक अन्य विन्दु $P'(x+dx, y, z)$ तक जाने में किया गया कार्य (प्रति इकाई आवेश) होगा, $dW = (-E_x\, dx)$ ....(3·17)
जबकि dx, x निर्देशांक में लघु वृद्धि है।

यह दोनों विन्दुओ के विभव के अन्तर के बराबर है। अर्थात्

$$dW = \phi(x+dx, y, z) - \phi(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x}\, dx \qquad ....(3\cdot18)$$

क्योंकि विस्थापन केवल x- अक्ष के अनुदिश ही है, (देखिये चित्र 3·4)
अतः कार्य = विभव मे परिवर्तन = विभव में x- के अनुदिश परिवर्तन की दर $\times dx$

$\frac{\partial \phi}{\partial x}$ विभव का x के प्रति आंशिक अवकलन (Partial differentiation) को व्यक्त करता है (क्योकि अभी Y और Z मे परिवर्तन नही हो रहा है)

अतः (dW) के दोनों मान, (3 17) और (3·18) बराबर करने पर,

$$-E_x dx = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx$$

अर्थात $$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad ..(3\cdot19)$$

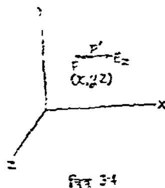
इसी प्रकार हम विद्युत क्षेत्र के अन्य घटको के बारे में लिख सकते है :—

$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{तथा} \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad ...(3\cdot20)$$

अतः इनका वैक्टर योग करने पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता के लिये,

$$\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$$
$$= -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k}\right)$$
$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\phi$$

अर्थात $$\boxed{\vec{E} = -\nabla \phi} \qquad ....3\cdot21$$



चित्र 3·4

जबकि ∇ (del operator) $\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}=\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$ के लिए प्रयुक्त किया जाता है।

इकाइयां	मी० कि० सै० पद्धति	स्थिर० वि० इ० पद्धति
विद्युत क्षेत्र E	न्यूटन/कूलम्ब या वोल्ट/मीटर	डाइन/स्टेट-कूलम्ब
विद्युत विभव ϕ	जूल/ कूलम्ब या वोल्ट	अर्ग/स्टेट कूलम्ब या स्टेट-वोल्ट

3·3 विद्युतीय द्वि-ध्रुव (Electric Dipole) के कारण विभव तथा क्षेत्र

विद्युतीय द्वि-ध्रुव-दो बराबर तथा विपरीत आवेश जब अत्यन्त लघु दूरी पर स्थित हों, तब एक विद्युतीय द्वि-ध्रुव बनाते हैं। चित्र 3·5 में विन्दु A पर आवेश $(-q)$ और विन्दु B पर आवेश $(+q)$ स्थित हैं और इनकी दूरी AB बहुत कम 'd' के बराबर है। सुविधा के लिए निर्देश-मूल विन्दु O इनके बीच में है और AB y—अक्ष के अनुदिश है। इस प्रकार दोनों आवेशों के निर्देशांक क्रमशः $\left(O,-\frac{d}{2},O\right)$ और $\left(O,\frac{d}{2},O\right)$ हैं। एक विन्दु P (x, y, z) पर विद्युत-विभव ज्ञात करना है। द्वि-ध्रुव के केन्द्र O से P की दूरी r है। स्पष्ट ही

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \qquad ....(3·22)$$

सूत्र (3·11) के अनुसार B पर स्थित आवेश $(+q)$ कारण P पर विभव

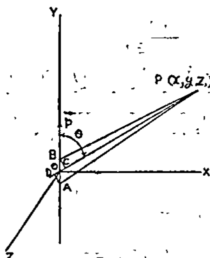
$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q}{BP}$$

A पर स्थित $(-q)$ आवेश के कारण P पर विभव $=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{-q}{AP}$ अतः P पर द्वि-ध्रुव के कारण परिणमित विभव

$$\phi(P)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{BP}-\frac{1}{AP}\right) \qquad ....(3·23)$$

दोनों आवेशों को मिलाने वाली रेखा द्वि-ध्रुव की अक्ष (axis) कहलाती है। चित्र में यह y—अक्ष के अनुदिश है और रेखा OP इससे कोण θ बनाती है।

क्योंकि A B अत्यन्त लघु है। अतः चित्र से स्पष्ट है कि BP लगभग CP के बराबर है और AP लगभग DP के बराबर है (BC और AD क्रमशः B और A से OP पर लम्ब खीचे गये हैं)



चित्र 3·5

$$\therefore\ \phi(P)=\frac{q}{4\pi\epsilon_o}\left(\frac{1}{CP}-\frac{1}{DP}\right)$$

या $$\phi(P)=\frac{q}{4\pi\epsilon_o}\left(\frac{1}{OP-OC}-\frac{1}{OP+OD}\right)$$

चित्र से स्पष्ट है कि $OC=OD=\frac{d}{2}\cos\theta$

$$\therefore\ \phi(P)=\frac{q}{4\pi\epsilon_o}\left(\frac{1}{r-\frac{d}{2}\cos\theta}-\frac{1}{r+\frac{d}{2}\cos\theta}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\epsilon_o}\left\{\frac{(r+\frac{d}{2}\cos\theta)-(r-\frac{d}{2}\cos\theta)}{r^2-\frac{d^2}{4}\cos^2\theta}\right\}$$

या $$\phi(P)=\frac{q}{4\pi\epsilon_o}\ \frac{d\cos\theta}{r^2-\frac{d^2\cos^2\theta}{4}} \qquad \ldots(3\cdot24)$$

जैसा कि लिखा जा चुका है, दोनों आवेशों की दूरी (d) बहुत कम होती है, अतः r^2 की अपेक्षा $\frac{d^2\cos^2\theta}{4}$ नगण्य लिया है।

$$\therefore \quad \phi(P)=\frac{q\ d\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{....(3·25)}$$

द्वि-ध्रुव का आघूर्ण (dipole moment)—आवेश (q) और उनकी दूरी के गुणा (qd) को द्वि-ध्रुव की एक विशिष्ट राशि माना जाता है जिसे उसका आघूर्ण कहते हैं। वस्तुतः इसको एक वैक्टर राशि लिया जाता है जिसका मान, ($p=qd$) और दिशा ऋण आवेश से धन आवेश की ओर ली जाती है। इस उदाहरण में यह y—अक्ष के अनुदिश है।

अतः $\quad \vec{p}=qd \quad$ (A से B दिशा)

इसका मान (p) से व्यक्त किया जा रहा है।

अतः $\quad \phi(P)=\frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

क्योंकि θ, AB और OP के बीच का कोण है,

अतः $\vec{r}$ और $\vec{p}$ के बीच का कोण है और इनका स्केलर गुणा,

$$\vec{p}\cdot\vec{r}=r\,p\cos\theta$$

$\therefore \quad p\cos\theta=\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r} \quad$ अतः सूत्र (3·25) के अनुसार

$$\therefore \quad \boxed{\phi(P)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}} \quad \text{....(3·26)}$$

$$\text{अथवा} \quad \boxed{\phi(P)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cdot\hat{r}}{r^2}} \quad \text{....(3·27)}$$

जबकि $\hat{r}$, OP अर्थात् $\vec{r}$ दिशा में इकाई वैक्टर है। द्वि-ध्रुव के विभव का यह सूत्र सर्वथा सामान्य है और द्वि-ध्रुव की किसी भी दिशा (orientation) और विन्दु P की किसी भी स्थिति के लिये उपयुक्त है।

द्वि-ध्रुव के कारण क्षेत्र—समीकरण (3·19), और (3·20) की सहायता से विद्युत क्षेत्र के x, y और z घटक ज्ञात किये जा सकते हैं। यहाँ हम क्षेत्र $\vec{r}$ की दिशा में, $\vec{E}(r)$, और उसके लम्बवत दिशा में, $\vec{E}_\theta$ ज्ञात करेंगे।

$$\vec{E}_{(r)} = -\frac{\partial \phi(P)}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{p\cos\theta}{r^2}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{2p\cos\theta}{r^3}$$

अथवा
$$\boxed{\vec{E}r = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{2p\cos\theta}{r^3}\hat{r}} \quad \ldots(3·28)$$

$$E\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{p\cos\theta}{r^3}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{p\sin\theta}{r^3}$$

अथवा
$$\boxed{E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{p\sin\theta}{r^3}\ \vec{r} \text{ के लम्बवत दिशा में}} \quad \ldots(3·29)$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि द्वि-ध्रुव के कारण क्षेत्र $(r)^3$ के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

परिणमित क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{E}(P) = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{p}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta} \quad \ldots(3·30)$$

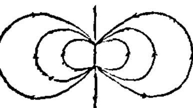
परिणमित क्षेत्र की वैक्टर $\vec{r}$ के साथ दिशा α, के लिए,

$$\tan\alpha = \frac{E\theta}{Er} = \frac{1}{2}\tan\theta \quad \ldots(3·31)$$

चित्र (3·6) में द्वि-ध्रुव के कारण क्षेत्र प्रदर्शित किया गया है।

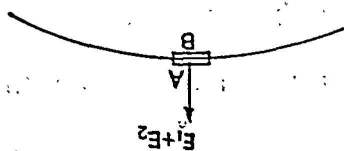
3·4. सतह पर स्थित आवेश पर बल

किसी चालक को आवेशित करने पर केवल उसके सतह पर ही आवेश होता है तथा हम द्वितीय अध्याय में देख चुके हैं कि विद्युत क्षेत्र उसकी सतह के लम्बवत होता है (तथा उसकी सतह पर विभव समान होता है)। इसकी सतह के किसी एक भाग पर स्थित आवेश पर सतह के अन्य भाग के आवेश के कारण प्रति[illegible] होगा। इसकी गणना आसानी से



चित्र 3·6

चित्र (3·7) में सतह के एक वृत्तीय अंश, क्षेत्रफल dA, प्रदर्शित किया गया है। इस क्षेत्र अंश पर एक लघु बेलनाकार 'गासियन' सतह की कल्पना की जिसका एक तल सतह के थोड़ा ही ऊपर A विन्दु पर है और दूसरा तल सतह के थोड़ा ही नीचे B विन्दु पर है। यदि सतह पर प्रति इकाई क्षेत्रफल आवेश का मान σ से व्यक्त किया, तो क्षेत्र-अंश dA पर आवेश $= \sigma\, dA$.



चित्र 3·7

अब A विन्दु पर क्षेत्र $\vec{E}$ को दो क्षेत्रों का परिणमित क्षेत्र माना जा सकता है :—प्रथम उस क्षेत्र अंश dA पर स्थित आवेश के कारण, $\vec{E_1}$ द्वितीय-अन्य बचे हुए सतह पर स्थित आवेश के कारण, $\vec{E_2}$ अतः A पर क्षेत्र

$$\vec{E}=\vec{E_1}+\vec{E_2} \qquad ....(3\cdot32)$$

सतह के थोड़ा ही अन्दर के विन्दु B पर क्षेत्र E_2 में तो कोई परिवर्तन नहीं हो सकता, परन्तु क्षेत्र अंश (dA) पर आवेश के कारण क्षेत्र E_1 विपरीत दिशा में होगा (क्योंकि B उस सतहांश के दूसरी ओर है) अतः B पर क्षेत्र,

$$E_B=E_2-E_1=0$$

(क्योंकि चालक के अन्दर के विन्दु पर क्षेत्र शून्य होता है)

अतः आंकिक रूप से

$$E_2=E_1$$

अतः A विन्दु पर क्षेत्र (3·32) के अनुसार

$$E=E_2+E_2=2E_2$$

$$\therefore \qquad E_2=\frac{E}{2} \qquad ....(3\cdot33)$$

आवेशित चालक के समीप किसी बिन्दु पर क्षेत्र

'E' ज्ञात करने के लिए गासियन सतह में से विद्युतीय फ्लक्स की गणना की। स्पष्ट है कि विद्युतीय फ्लक्स केवल ऊपरी सतह में होगा (क्योंकि नीचे के विन्दु B पर क्षेत्र शून्य है) जो कि

$$=E\, dA$$

गॉस के नियम के अनुसार यह फ्लक्स $=\dfrac{\sigma dA}{\epsilon_0}$

$$\therefore \quad E dA = \frac{\sigma dA}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \qquad ....(3\cdot34)$$

इस प्रकार आवेशित चालक के समीप क्षेत्र 'E' उपर्युक्त समीकरण (3·34) के अनुसार σ (surface density of charge) पर निर्भर करता है।

अब सूत्र (3·33) के अनुसार

$$E_2 = \frac{E}{2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad ....(3\cdot35)$$

अतः सतहांश (dA) पर बल = आवेश × क्षेत्र

$$= \sigma dA \times \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dA$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{बल प्रति इकाई क्षेत्रफल} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}} \qquad ..(3\cdot36)$$

इस प्रकार आवेशित सतह के इकाई क्षेत्रफल पर स्थित आवेश सतह के सम्बवत बाहर की ओर सूत्र (3·36) के अनुसार बल अनुभव करता है।

(स० ग० स० गासियन प्रणाली में बल $=2\pi\sigma^2$) ....(3·37)

यह एक प्रकार का विद्युतीय दाब (electrical pressure) है जो बाहर की ओर कार्य करता है। अतः किसी आवेशित बन्द सतह की स्थिरावस्था (equilibrium) के लिए कोई अन्य बल भी आवश्यक होंगे अन्यथा सतह में प्रसार (expansion) की प्रवृत्ति होगी। यदि एक रबर का गोलीय गुब्बारा हो, और उसको आवेशित किया जाय तो उसमें प्रसार की प्रवृत्ति रहेगी, अत. इस प्रकार के आवेशित रबर के गोले का संकुचन (contraction) करने के लिये कार्य करना आवश्यक होगा।

माना कि इस प्रकार के एक आवेशित रबर के गोले का अर्द्धव्यास r_0 है और हम इसको बलपूर्वक सिकुड़ कर कम करना चाहते हैं जिससे कि अर्द्धव्यास $(r_0 - dr)$ हो जाता है जबकि dr अत्यन्त सूक्ष्म सकुचन है। समीकरण (3·36) के अनुसार आवेशित गोले पर प्रति इकाई क्षेत्रफल बल

$$= \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

जबकि σ उसका आवेश का पृष्ठ घनत्व (surface density) है।

अतः पूर्ण सतह पर बल $= \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \times 4\pi r_0^2$

अतः लघु संकुचन dr में विद्युत-बल के विरुद्ध किया गया कार्य

$$dW = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \times 4\pi r_0^2 \times dr$$

$$\boxed{dW = \frac{2\pi\sigma^2 r_0^2 dr}{\epsilon_0}} \qquad ....(3\cdot38)$$

यह कार्य गोले के कुल आवेश Q के पदों में निम्न प्रकार होगा
(क्योंकि $Q = 4\pi r_0^2 \sigma$) :—

$$dW = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r_0^2} dr \qquad ....(3\cdot39)$$

इसी प्रकार हम एक साबुन के घोल के बुलबुले की स्थिरावस्था पर भी विचार कर सकते हैं। जब बुलबुले पर आवेश नहीं होता तब पृष्ठ तनाव बल के अन्तर्गत उसकी संतुलन स्थिति निम्न समीकरण के अनुसार होगी।

$$P_{in} = P_{out} + \frac{4T}{r} \qquad ....(3\cdot40)$$

जबकि P_{in} उसके अन्दर वायु दाब, P_{out} उसके बाहर का वायु दाब, T उसका पृष्ठ तनाव है और 'r' उसका अर्द्धव्यास है। [क्योंकि पृष्ठ तनाव के कारण गोलीय बुलबुले के अन्दर $\frac{4T}{r}$ के बराबर दाब-आधिक्य होता है]

यदि अब बुलबुले को σ पृष्ठ घनत्व से आवेशित कर दिया जाय तो इसके कारण उसकी सतह पर लगने वाला बल भी उसे बढ़ाने का प्रयास करेगा, अतः अब संतुलन का समीकरण निम्न प्रकार होगा :—

$$P_{in} + \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = P_{out} + \frac{4T}{r} \qquad ....(3\cdot41)$$

3·5. विद्युत क्षेत्र से सम्बद्ध उर्जा

विद्युत क्षेत्र की आधुनिक संकल्पना में विद्युत क्षेत्र को एक भौतिक वास्तविकता माना गया है तथा विद्युत क्षेत्र ज्ञात होने पर वहां पर स्थित किसी आवेश का व्यवहार पूर्णतः ज्ञात माना जा सकता है। साथ ही विद्युत क्षेत्र ज्ञात हो जाने

के बाद उसके आवेश-स्रोतों (source charges) के बारे में जानने की कोई आवश्यकता नहीं रह जाती। हम यह जानते हैं कि किन्हीं आवेश-स्रोतों का कोई भी विन्यास स्थापित करने में कार्य किया जाता है[1] जो उस आवेश-विन्यास की विद्युतीय स्थितिज ऊर्जा (electrical potential energy) मानी जाती है। यह उस आवेश-विन्यास की एक विशिष्ट राशि है जो उन आवेशों को एकत्रित करने के क्रम आदि पर निर्भर नहीं करती। क्या यह ऊर्जा उस आवेश विन्यास से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र से सम्बन्धित राशि के रूप में मानी जा सकती है? निश्चित रूप से; हम विद्युत क्षेत्र 'E' को प्रति इकाई आयतन $\left(\frac{1}{2}\in_0 E^2\right)$ उर्जा से सम्बद्ध मान सकते हैं अर्थात्

विद्युत क्षेत्र 'E' से सम्बद्ध उर्जा घनत्व (energy density) $\left(\frac{1}{2}\in_0 E^2\right)$ लिया जा सकता है और इस उर्जा घनत्व द्वारा उस पूर्ण क्षेत्र (region) में कुल उर्जा की गणना की जाय (जिस क्षेत्र में विद्युत क्षेत्र विद्यमान है तो उसके आवेश-स्रोतों की कुल विद्युतीय उर्जा के बराबर राशि आ जाती है।

इस बात की पुष्टि के लिये हम एक आवेशित गोलीय चालक की विद्युत उर्जा की गणना करते हैं माना कि उस पर कुल आवेश Q है और उसका अर्द्धव्यास R है। आवेश Q दिये जाने पर उसका विभव $=\frac{Q}{4\pi\in_0 R}$ प्रारम्भ में विभव शून्य था, अतः मध्यमान विभव

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{Q}{4\pi\in_0 R}$$

होगा। अतः Q आवेश दिये जाने में किया गया कार्य

$$=\text{आवेश}\times\text{विभव}=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q}{4\pi\in_0 R}\times Q=\frac{Q^2}{8\pi\in_0 R} \qquad \ldots(3\cdot42)$$

इस आवेशित चालक का विद्युतीय क्षेत्र इसके बाहर के पूरे क्षेत्र (region) में विद्यमान है। केन्द्र O से r दूरी पर विद्युतीय क्षेत्र की तीव्रता,

---

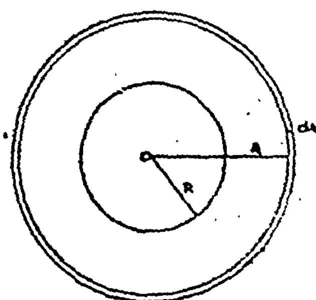
1 जैसे दो आवेशों q_1 और q_2 को r_{12} दूरी पर लाने में (अनन्त दूरी से) किया गया कार्य $=\int_{\infty}^{r_{12}}\frac{q_1 q_2\,dr}{4\pi\in_0 r^2}=\frac{q_1 q_2}{4\pi\in_0 r_{12}}$

$$\text{तीव्रता } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\ldots\ldots$$

केन्द्र O से r दूरी के सभी विन्दुओं पर क्षेत्र की तीव्रता का मान यही होगा अतः r अर्द्धव्यास के गोले पर स्थित सभी विन्दुओं पर क्षेत्र का उपर्युक्त मान है। अतः इस अर्द्धव्यास के एक पतले गोलीय खोल (चित्र 3·8) में विद्युत उर्जा

$$du = \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr \ldots (3\cdot43)$$

क्योंकि गोलीय खोल का आयतन $= 4\pi r^2 dr$ है।



चित्र 3·8

अतः गोले के बाहर के सम्पूर्ण क्षेत्र में कुल उर्जा उपर्युक्त du के मान का $r = R$ से ∞ तक समाकलन करने पर प्राप्त होगा।

$$\text{अर्थात } U = \int_R^\infty \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \quad \ldots(3\cdot44)$$

यह आवेशित गोलीय चालक की उर्जा (3·42) के बराबर है

अतः विद्युत क्षेत्र E को उर्जा घनत्व $\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\right)$ से सम्बद्ध माना जा सकता है।

स०ग०स० गॉसियन प्रणाली में उर्जा घनत्व $\left(\frac{E^2}{8\pi}\right)$ होगा।

संदर्भ पुस्तकें—

1. Berkeley Physics Course Vol. II.
2. Feynanann Lectures on Physics Vol. II.
3. Physics Part II, Halliday & Resnick,

उदाहरण 3·1—एक 5×10^3 न्यूटन/कूलम्ब के एक-समान विद्युत क्षेत्र में 2×10^{-3} कूलम्ब का विन्दु-आवेश विन्दु A से B तक जाने में $+10$ जूल कार्य करता है।

(अ) A से B की दूरी बताइये (ब) A और B का विभवान्तर $(V_A - V_B)$ बताइये तथा (स) क्षेत्र की दिशा बताइये।

(अ) आवेश पर बल $= Eq$

$$= 5 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-3} = 10 \text{ न्यूटन}$$

आवेश द्वारा किया गया कार्य $= 10$ जूल

$$\text{अतः विन्दुओं की दूरी} = \frac{\text{कार्य}}{\text{बल}} = \frac{10}{10} = 1 \text{ मीटर,} \qquad \text{उत्तर।}$$

(ब) A और B का विभवान्तर $V_A - V_B = -$ (A से B तक प्रति इकाई आवेश कार्य)

$$= \frac{-10}{2 \times 10^{-3}} = -5 \times 10^3 \text{ वोल्ट,} \qquad \text{उत्तर।}$$

(स) विद्युत क्षेत्र की दिशा विभव के कम होने की दिशा में होती है, अतः B से A की ओर है। (इसीलिए आवेश द्वारा A से B विस्थापन में किया गया कार्य धनात्मक है)

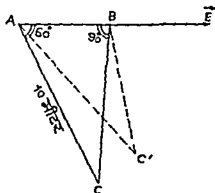
उदाहरण 3·2—एक 50 माइक्रो कूलम्ब आवेश के कारण 0·50 मीटर की दूरी पर विद्युत विभव की गणना करिये।

$$\text{विद्युत विभव} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$= \frac{50 \times 10^{-6}}{\frac{1}{9 \times 10^9} \times 0{\cdot}5} = \frac{50 \times 10^{-6} \times 9 \times 10^9}{0{\cdot}5}$$

$= 9 \times 10^5$ वोल्ट, उत्तर।

उदाहरण 3·3—चित्र (3·9) में विन्दु A और B, दूरी 5 मीटर, एक समान विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ में स्थित हैं जिसका मान 8×10^2 न्यूटन/कूलम्ब और दिशा चित्र के अनुसार A से B की ओर है। A से B तक विस्थापन में प्रति इकाई आवेश कार्य की गणना करिये। A से B तक के लिये प्रयुक्त एक अन्य पथ ACB द्वारा



चित्र 3·9

भी कार्य की गणना करें। (AC= 10 मीटर) क्या दोनों पथ से कार्य का मान बराबर आता है ? यदि किसी अन्य पथ AC′B से कार्य की गणना की जाय तब भी कार्य का मान यही आवेगा।

प्रति इकाई आवेश कार्य = —E× विस्थापन

$$= -8\times10^2\times5 = -4\times10^3 \text{ जूल. उत्तर}$$

पथ ACB में AC=10 मीटर, तथा यह क्षेत्र की दिशा से 60° कोण बनाता है। प्रति इकाई आवेश कार्य = —E× क्षेत्र की दिशा में विस्थापन

$$-E\times(AC\cos 60+CB\cos 90)$$

$= -8\times10^2.\ 10.\ \frac{1}{2} = -4\times10^3$ जूल। बचा हुआ पथ CB क्षेत्र के लम्बवत है, इसलिए C से B विस्थापन में कोई कार्य नहीं होता।

इस प्रकार दोनों पथ से कार्य का मान बराबर आता है।

यह इसलिये कि 'E' एक स्थैत विद्युत क्षेत्र (Electrostatic field) है जो कि एक संरक्षी क्षेत्र है और कार्य पथ पर निर्भर नहीं करता। अतः किसी अन्य पथ AC′B से विस्थापन करने पर भी कार्य का मान यही आयगा।

उदाहरण 3·4—8000 माइक्रो कूलम्ब के दो बराबर तथा विपरीत आवेश एक द्वि-ध्रुव बनाते हैं जिसकी अक्ष की लम्बाई 1×10^{-2} मीटर है। ध्रुव की अक्ष से 60° का कोण बनाती हुई रेखा पर उसके केन्द्र से 5 मीटर दूरी पर विद्युत विभव ज्ञात करिये तथा इस रेखा की दिशा में विद्युत क्षेत्र का मान ज्ञात करिये।

$$\phi(P) = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\in_o r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\in_o r^2}$$

$$= \frac{8000\times10^{-6}\times1\times10^{-2}\times\cos 60}{\frac{1}{9\times10^9}\cdot5^2}$$

$$= \frac{9\times10^9\times8000\times10^{-8}}{25\times2} = 14\cdot4\times10^3$$

[उत्तर : विभव = $14\cdot4\times10^3$ वोल्ट]

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\in_o}\ \frac{2p\cos\theta}{r^3}$$

$$= \frac{9\times10^9\times2(8000\times10^{-6}\times10^{-2})\cos 60}{5^3}$$

$$= 5\cdot76\times10^3 \text{ न्यूटन/कूलम्ब}$$

उदाहरण 3·5—सोने के नाभिक की सतह पर विद्युत विभव की गणना करिये। सोने का परमाणु क्रमाक $Z=79$ है और उसके नाभिक को $6·6 \times 10^{-15}$ मीटर अर्द्धव्यास का गोला माना जा सकता है।

गोलीय आवेश के कारण विभव की गणना के लिये उस आवेश को गोले के केन्द्र पर स्थित माना जा सकता है।

$$\text{अतः विभव} = \frac{\text{आवेश}}{(4\pi\epsilon_0).\text{दूरी}}; \text{आवेश} = Ze = 79e$$

$$\text{विभव} = \frac{79e}{4\pi\epsilon_0 \times \text{अर्द्धव्यास}} = \frac{79 \times 1·6 \times 10^{-19}}{\frac{1}{9 \times 10^9} \times 6·6 \times 10^{-15}}$$

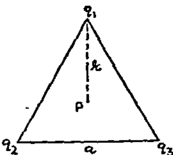
$$= \frac{9 \times 10^9 \times 79 \times 1·6 \times 10^{-19}}{6·6 \times 10^{-5}}$$

$= 17·24 \times 10^7$ वोल्ट. उत्तर।

उदाहरण 3·6—चित्र 3·10 में एक समबाहु त्रिभुज के कोनो पर तीन आवेश स्थित हैं। उसके केन्द्र P पर विद्युत विभव ज्ञात करो।

$q_1 = 3 \times 10^{-8}$ कूलम्ब, $q_2 = -8 \times 10^{-8}$ कूलम्ब, $q_3 = -1 \times 10^{-8}$ कूलम्ब। त्रिभुज की भुजा $a = 1·732$ मीटर।

स्पष्ट ही केन्द्र P की प्रत्येक आवेश से दूरी $= r$



चित्र 3·10

$$\text{अतः विद्युत विभव} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1+q_2+q_3}{r}\right)$$

$$= \frac{9 \times 10^9 (3 \times 10^{-8} - 8 \times 10^{-8} - 1 \times 10^{-8})}{r}$$

समबाहु त्रिभुज की ज्यामिति के अनुसार $r = \frac{a}{2 \cos 30} = \frac{1·732}{2 \times ·8660}$

$= 1$ मीटर

$$\therefore \text{विभव } \phi_{(p)} = -\frac{9 \times 10^9 \times 6 \times 10^{-8}}{1} = -540 \text{ वोल्ट, उत्तर}$$

उदाहरण 3·7—एक रबर के गोले का अर्द्धव्यास 1×10^{-1} मीटर है तथा आवेश का पृष्ठ घनत्व 10^{-5} कूलम्ब प्रति वर्ग मीटर है। (i) इसकी सतह पर प्रति इकाई क्षेत्रफल विद्युतीय बल की गणना करिये; (ii) इसके अर्द्धव्यास का $0·2 \times 10^{-2}$ मीटर से संकुचन करने में कितना कार्य करना होगा।

(i) सूत्र (3·36) के अनुसार $F_{(\text{unit area})} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$

$$= \frac{(10^{-5})^2}{2 \times 8·85 \times 10^{-12}}$$

$= 5·65$ न्यूटन/वर्गमीटर, उत्तर

(ii) सूत्र (3·38) के अनुसार

$$dW = \frac{2\pi\sigma^2 r_0^2 dr}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{2 \times 3·14 \times (10^{-5})^2 \ (10^{-1})^2 \times 0·2 \times 10^{-2}}{8·85 \times 10^{-12}}$$

$= 1·419 \times 10^{-3}$ जूल, उत्तर

उदाहरण 3·8—एक गोलीय चालक, अर्द्धव्यास 8×10^{-2} मीटर, पर 2×10^{-6} कूलम्ब आवेश है। उसकी विद्युतीय ऊर्जा की गणना करो।

सूत्र (3·44) के अनुसार $U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$

$$= \frac{(2 \times 10^{-6})^2}{2. \left(\frac{1}{9 \times 10^9}\right) 8 \times 10^{-2}}$$

$$= \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-12}}{2 \times 8 \times 10^{-2}}$$

अतः $U = 0·225$ जूल, उत्तर

उदाहरण 3·9—उदाहरण 3·7 में गोले के संकुचन में किया गया कार्य, उस लघु गोलीय खोल (मोटाई dr) में उत्पन्न नवीन विद्युतीय क्षेत्र की उर्जा के रूप में सिद्ध करो।

गोले के संकुचन के कारण r_o से $(r_o - dr)$ के रिक्त गोलीय स्थान में विद्युत क्षेत्र उत्पन्न हो गया है। इसकी उर्जा घनत्व $\frac{1}{2}\in_o E^2$ लेकर हम कुल उर्जा की गणना कर सकते हैं।

$$E = \frac{1}{4\pi\in_o} \frac{Q}{r_o^2} = \frac{\sigma \times 4\pi r_o^2}{4\pi\in_o r_o^2} = \frac{\sigma}{\in_o}$$

उर्जा घनत्व $= \frac{1}{2}\in_o E^2 = \frac{1}{2}\in_o \frac{\sigma^2}{\in_o^2} = \frac{\sigma^2}{2\in_o}$

आयतन $= 4\pi r_o^2\, dr$

$\therefore$ कुल उर्जा $= \frac{\sigma^2}{2\in_o} \cdot 4\pi r_o^2\, dr$

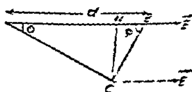
$$= \frac{2\pi\sigma^2 r_o^2\, dr}{\in_o}$$

यही मान उदाहरण 3·7 मे प्राप्त हुआ था।

इसी प्रकार हम देखते हैं कि सर्वंत्र विद्युत क्षेत्र को $\frac{\sigma^2}{2\in_o}$ उर्जा घनत्व से सम्बद्ध माना जा सकता है।

प्रश्न

1. स्थिर विद्युत क्षेत्र मे दो बिन्दुओं के बीच किसी आवेश को विस्थापन करने के किया हुआ कार्य विस्थापन-पथ पर निर्भर करता है अथवा नहीं? चित्र (3·11) में A से B बिन्दु तक इकाई आवेश के विस्थापन मे कार्य की गणना करिये (i) सीधे पथ $\vec{AB}$ द्वारा, (ii) पथ ACB द्वारा जब कि विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ एक समान और चित्र मे प्रदर्शित दिशा $\vec{AB}$ में है। सिद्ध कीजिये कि कार्य का मान एक समान ही है।



चित्र 3·11

2. "विद्युत क्षेत्र में स्थित कोई दो बिन्दुओं के बीच [illegible] विस्थापन-पथ पर निर्भर नहीं करता, [illegible] अन्य विशिष्ट विद्युतीय राशि के [illegible]।" उपर्युक्त आवेदन की व्याख्या कीजिये तथा [illegible] दीजिए। क्या विभवान्तर [illegible] बिन्दु पर निर्भर करता है?

3. एक विन्दु आवेश ($+q$) के कारण उससे r दूरी पर स्थित विन्दु पर विद्युत विभव के लिए व्यंजक प्राप्त करिए। इसके लिए संदर्भ विन्दु अनन्त पर लेवें।

4. विद्युतीय द्वि-ध्रुव (Electric dipole) क्या होता है तथा उसका आघूर्ण (dipole moment) क्या होता है?
एक विद्युतीय द्वि-ध्रुव के कारण किसी विन्दु पर विद्युत विभव तथा विद्युत क्षेत्र ज्ञात करिये।

5. "विद्युत क्षेत्र को ($\frac{1}{2}\in_0 E^2$) के वरावर उर्जा प्रति इकाई आयतन से संयुक्त माना जा सकता है" सिद्ध कीजिये।
एक गोलाकार चालक, अर्द्धव्यास 0·1 मीटर तथा कुल आवेश 0·3 कूलम्ब. के विद्युत क्षेत्र की कुल उर्जा की गणना करिये। [उत्तर $40{\cdot}5\times10^8$ जूल]

6. एक 750 माइक्रो कूलम्ब के विन्दु आवेश के कारण 0·60 मीटर की दूरी पर विद्युत विभव की गणना कीजिये। [उत्तर $11{\cdot}25\times10^6$ वोल्ट]

7. एक 80 माइक्रो कूलम्ब आवेश युक्त लघु चालक एक एक समान विद्युतीय-क्षेत्र में स्थित है जिसकी तीव्रता 75×10^5 न्यूटन/कूलम्ब है। क्षेत्र के द्वारा उपर्युक्त आवेश को क्षेत्र की दिशा में विन्दु A से B तक, 3·0 मीटर दूरी के विस्थापन में किये गये कार्य की गणना करिये। इन दोनों विन्दुओं के विभवान्तर की गणना भी कीजिये। [उत्तर 1800 जूल, $22{\cdot}5\times10^6$ वोल्ट]

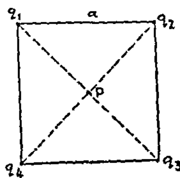
8. दो लघु गोलीय आवेश A और B पर क्रमशः +30 माइक्रो कूलम्ब और −40 माइक्रो कूलम्ब आवेश है तथा इनके केन्द्रों की आपसी दूरी 0·50 मीटर है। इनके केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा के किस विन्दु पर विभव शून्य होगा? [उत्तर A के केन्द्र से 0·215 मीटर पर]

9. $1{\cdot}2\times10^7$ मीटर/सैकण्ड वेग से गतिशील कुछ प्रोटोन कण एक सोने की पतली चादर की ओर गति करते हैं। सोने के नाभिक में 79 प्रोटोन होते हैं। कूलम्ब के नियम को उपयुक्त मान कर गणना करें कि प्रोटोन कण सोने के नाभिक से कितना निकटतम आ सकते हैं? सोने के नाभिक को स्थिर मानें। $m_p = 1{\cdot}6725\times10^{-27}$ कि० ग्राम

संकेत—निकटतम आ जाने पर प्रोटोन की
प्रारम्भिक गतिज उर्जा = निकटतम विन्दु तक जाने में किया गया कार्य
= सोने के नाभिक के कारण विभव × प्रोटोन आवेश

$$\frac{1}{2} m_p v^2 = \frac{79\, e}{4\pi\in_0 r_c} \times e$$

[उत्तर $15{\cdot}4\times14^{-14}$ मीटर]



चित्र 3·12

10. चित्र (3·12) में दिये हुए वर्ग के केन्द्र पर विभव की गणना करिये । $q_1 = +1 \times 10^{-8}$ कूलम्ब, $q_2 = -2 \times 10^{-8}$ कूलम्ब, $q_3 = +3 \times 10^{-8}$ कूलम्ब तथा $q_4 = +2 \times 10^{-8}$ कूलम्ब, वर्ग की भुजा $a = 1$ मीटर

[उत्तर 500 वोल्ट]

11. वायु में स्थित आवेशित गोले की सतह के लिए अधिकतम विद्युतीय बल प्रति इकाई क्षेत्रफल 40 न्यूटन/वर्गमीटर मानकर गणना करिये कि उसको अधिकतम कितने पृष्ठ घनत्व से आवेशित किया जा सकता है ।

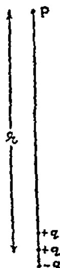
[उत्तर $\sigma = 2{\cdot}66 \times 10^{-5}$ कूलम्ब/मीटर^2]

12. चित्र (3·13) में प्रदर्शित आवेश-विन्यास के लिए सिद्ध करिये कि आवेशों की रेखा पर r दूरी पर स्थित बिन्दु P पर विभव

$$\phi_{(p)} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{2qa}{r^2} \right)$$

जब कि $(r >> a)$ । क्या इस परिणाम की अपेक्षा अन्य प्रकार से की जा सकती है ?

संकेत—दिये हुए आवेश विन्यास को एक द्वि-ध्रुव $(p = q^2 a)$ और एक धन आवेश $+q$ के संयोग के रूप में लिया जा सकता है ।



चित्र 3·13

4 धारा के चुम्बकीय प्रभाव—अम्पीयर का प्रभाव

(AMPERE'S LAW)

4·1 धाराओं में अन्योन्य क्रिया

जव आवेश स्थिर होते हैं तव उनके वीच वल की गणना कूलम्व के नियम द्वारा की जा सकती है। परन्तु आवेशों के गतिशील होने पर किसी आवेश 'q' पर कुल वल के लिये निम्न समीकरण होता है :—

$$\vec{E} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \qquad \text{....(4·1)}$$

जवकि सव राशियाँ मी० कि० सै० प्रणाली में हैं।

उपर्युक्त समीकरण में प्रथम राशि उस आवेश पर उस स्थल पर विद्युतीय क्षेत्र $\vec{E}$ के कारण वल है जव कि दूसरी राशि $q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$ एक अन्य प्रकार का वल है जो कि आवेश के वेग $\vec{v}$ पर निर्भर करता है; इस वल को परम्परा से चुम्वकीय वल कहा जाता है और $\vec{B}$ उस स्थल पर "चुम्वकीय क्षेत्र" कहलाता है। यह चुम्वकीय क्षेत्र गतिशील आवेश अथवा विद्युत-धारा के कारण उत्पन्न होता है और इसके कारण वल अन्य गतिशील आवेश q पर लगता है [यह वल वेग पर निर्भर (Velocity dependent force) है, यदि आवेश q स्थिर हो, तो उस पर वल नहीं लगेगा] यहाँ यह भी ध्यान रहे कि वल q और $\vec{v}$ पर अलग-अलग नहीं, वरन् q की गति के कारण विद्युत-धारा पर निर्भर करता है।

विद्युत धारा (Electric current)

जब किसी बिन्दु अथवा काट क्षेत्र में से आवेश का प्रवाह हो रहा हो, तो उसे विद्युत धारा कहा जाता है तथा विद्युत धारा का मान आवेश के प्रवाह की दर के बराबर लिया जाता है अर्थात

$$(\text{विद्युत धारा})\ I = \frac{dq}{dt} \quad \text{....(4·2)}$$

मी० कि० सैं० प्रणाली में आवेश की इकाई कूलम्ब है, अतः धारा की इकाई कूलम्ब प्रति सैकण्ड होगी। इसे अम्पीयर कहते हैं।

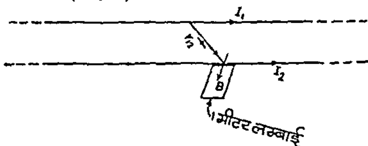
यदि इकाई काट क्षेत्र के लम्बवत धारा (अर्थात आवेश प्रवाह की दर) का मान लिया जाय तो इसको विद्युत द्वारा घनत्व कहते हैं (Electric current density)। यह एक वेक्टर राशि मानी जाती है जिसकी दिशा काट क्षेत्र के लम्बवत

ली जाती है। इसको सामान्यतः $\vec{J}$ से व्यक्त किया जाता है। अतः यदि कुल धारा I काट क्षेत्र dA में से उसके लम्ब से θ कोण पर प्रवाहित हो रही हो तो उसका लम्बवत घटक $= I \cos\theta$

$$\text{अतः} \quad \vec{J} = \frac{I \cos\theta}{dA}\ \hat{n} \quad \text{....(4·3)}$$

जबकि $\hat{n}$ काट क्षेत्र के लम्ब की दिशा मे इकाई वेक्टर है। इसकी इकाई अम्पीयर /मीटर^2 होगी।

अतः विद्युतीय क्षेत्र के कारण बल ($q\vec{E}$) के अतिरिक्त जो चुम्बकीय बल गतिशील आवेशों के बीच उत्पन्न होते हैं, उनका अध्ययन वस्तुतः धाराओं की परस्पर अन्योन्य क्रिया का अध्ययन है। विद्युत धाराओं की अन्योन्य क्रिया सम्बन्धी प्रयोग सर्वप्रथम अम्पीयर (Ampere) नामक वैज्ञानिक ने किये। निर्वात मे स्थित दो सीधी



चित्र 4·1

अनन्त धाराओं मे चुम्बकीय बल के विषय में उन्होंने पाया कि द्वितीय चालक जिसमें धारा I_2 अम्पीयर प्रवाहित हो रही है, के प्रति इकाई मीटर लम्बाई पर प्रथम चालक मे I_1 अम्पीयर धारा के कारण बल निम्न होता है :—

$$\vec{F} = -K \frac{2I_1I_2}{r_{12}} \hat{r}_{12} \qquad \ldots(4{\cdot}4)$$

जब धाराओं की दिशा चित्र (4·1) के अनुसार एक ही ओर है। K एक स्थिरांक है जो इकाई-प्रणाली (System of units) पर निर्भर करता है। मी० कि० सै० (Rationalized) प्रणाली में

$$K = \frac{\mu_o}{4\pi} \quad \text{अथवा} \quad \frac{1}{4\pi \in_o C^2}$$

(μ_o और $\in_o$ निर्वात के लिये नियतांक हैं जिनका मान नियतांकों के मान की सारिणी में दिया हुआ है)

इस प्रकार एक ही दिशा में धारा होने पर बल की दिशा ($-\hat{r}_{12}$) के अनुसार परस्पर आकर्षण को व्यक्त करती है तथा धाराओं की दिशा विपरीत होने पर प्रतिकर्षण होगा। समीकरण (4·4) की सहायता से एक अम्पीयर धारा की निम्न परिभाषा दी जा सकती है। K का मान $\frac{\mu_o}{4\pi} = 10^{-7}$ रखने पर

$$\vec{F} = -\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2I_1I_2}{r_{12}} \hat{r}_{12}$$

यदि $I_1 = I_2 = I$ हो तथा $r_{12} = 1$ मीटर हो तो :—

$F = 10^{-7}.\ 2.\ I^2$

अतः यदि दो अनन्त लम्बाई के पतले समान्तर तार निर्वात में एक मीटर की दूरी पर हों तथा उनमें से एक समान धारा एक ही दिशा में प्रवाहित होने पर प्रति मीटर 2×10^{-7} न्यूटन का परस्पर आकर्षण बल उत्पन्न हो, तो प्रत्येक में एक अम्पीयर धारा प्रवाहित हो रही है।

4·2. अम्पीयर का नियम; बायट और सेवर्ट का नियम

धाराओं की चुम्बकीय अन्योन्य क्रिया के विषय में अम्पीयर* ने निम्न व्यापक नियम बतलाया—

---

* अम्पीयर का नियम—चुम्बकीय क्षेत्र से सम्बन्धित अम्पीयर का एक अन्य नियम, चुम्बकीय क्षेत्र में किसी बन्द परिपथ के लिये रेखीय समाकलन (Line integral) के विषय में निम्न प्रकार है :—

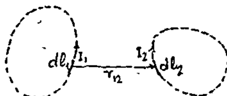
$$\int_{\text{(Closed Path)}} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_o I = \frac{I}{\in_o C^2} \ldots\ldots$$

[यह स्थैतवैद्युतिकी (Electrostatics) में गॉस के नियम के समान ही एक सशक्त नियम है जिसकी सहायता से कई सममिति-युक्त (Symmetrical) स्थितियों में चुम्बकीय क्षेत्र की गणना की जा सकती है।]

$$\vec{dF}_{12} = \frac{1}{4\pi \in_o C^2} \frac{I_1 I_2}{r_{12}^3} \left[\vec{dl_2} \times \left(\vec{dl_1} \times \vec{r_{12}} \right) \right] \quad ....(4 \cdot 5)$$

जब कि $\vec{dF}_{12}$ लघु धारांश dl_2 (जिसकी दिशा I_2 की दिशा में है) पर अन्य लघु धारांश dl_1 (धारा I_1 की दिशा में) के कारण बल है, $\vec{r_{12}}$ प्रथम धारांश dl_1 के केन्द्र से द्वितीय, dl_2 के केन्द्र की ओर वेक्टर-दूरी है, (देखिये चित्र 4·2)

(dl_2) पर बल की दिशा कोष्ठक में लिखे गये वेक्टर-गुणा द्वारा निर्धारित हो जाती है।



चित्र 4·2

*[वस्तुत: किन्ही दो बन्द धारा परिपथ के लिये, कुल बल के लिये अम्पीयर का नियम द्वि-समाकल के रूप में होगा :—

$$\vec{F}_{12} = \int_{1\,(\text{Closed Path})} \int_{2\,(\text{C. Path})} \frac{1}{4\pi \in_o C^2} \cdot \frac{I_1 I_2}{r_{12}^3} \cdot \vec{dl_2} \times \left(\vec{dl_1} \times \vec{r_{12}} \right). \quad (4 \cdot 6) \Bigg]$$

समीकरण (4·5) के अनुसार dl_2 पर बल को हम dl_1 में से धारा I_1 के कारण उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{dB}$ के कारण मान सकते हैं, जब कि

$$\boxed{\vec{dB} = \frac{1}{4\pi \in_o C^2} I_1 \frac{\vec{dl_1} \times \vec{r_{12}}}{r_{12}^3}} \quad (4 \cdot 7)$$

[यह बायट और सेवर्ट का नियम (*Bott & Savart's law*) कहलाता है।]

इस प्रकार I_2 धारा युक्त लघु अंश dl_2 पर I_1 धारा युक्त अन्य लघु अंश dl_1 के कारण बल निम्न प्रकार लिखा जायगा .

$$\vec{dF}_{12} = I_2 (\vec{dl_2} \times \vec{dB}) \quad .. (4 \cdot 8)$$

इस समीकरण से स्पष्ट है कि बल की दिशा $\vec{dl_2}$ और $\vec{dB}$ दोनों के लम्बवत है। इसी प्रकार समीकरण (4·7) से हम देखते हैं कि धारा के कारण चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा $\vec{dl_1}$ और $\vec{r_{12}}$ दोनों के लम्बवत होगी।

[चित्र (4·1) में धारा I_1 के कारण I_2 की इकाई लम्बाई पर चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B}$ की दिशा प्रदर्शित की गई है] वेक्टर गुणा का अभिप्राय और दिशा के लिये भाग 1 के प्रथम अध्याय का अवलोकन करें।

समीकरण (4·7) के अनुसार एक सीमित बन्द धारा (Finite Current) के कारण किसी बिन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र निम्न होगा।

$$\vec{B}=\frac{1}{4\pi\in_o C^2}I_1\int\frac{\vec{dl}_1\times\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad ....(4·9)$$

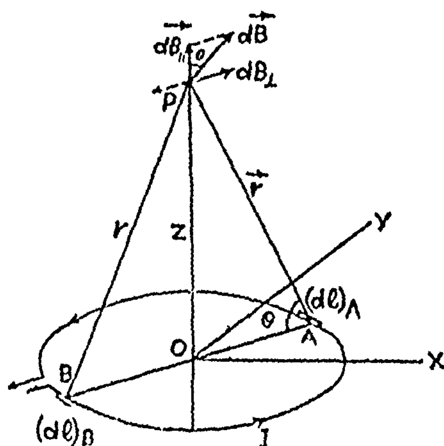
चुम्बकीय क्षेत्र की इकाई—समीकरण (4·1) के अनुसार $\vec{B}$ की इकाई होगी :—

$$\frac{\text{न्यूटन}}{\text{कूलम्ब० मीटर/सेकण्ड}} \quad \text{या} \quad \frac{\text{न्यूटन}}{\text{एम्पीयर. मीटर}}$$

चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B}$ को चुम्बकीय फलक्स प्रति इकाई क्षेत्रफल के रूप में भी समझा जा सकता है और चुम्बकीय फलक्स की इकाई 'वेबर' (Weber) होने के कारण, $\vec{B}$ की इकाई $\frac{\text{वेबर}}{\text{मीटर}^2}$ भी है।

4·3. एक वृत्तीय कुण्डली की अक्ष पर किसी बिन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र

बायट और सेवर्ट नियम (4·5) और (4·7) की सहायता से किसी भी धारा



चित्र 4·3

के कारण किसी बिन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र ज्ञात किया जा सकता है। इसका एक उदाहरण हम चित्र (4·3) में प्रदर्शित वृत्तीय धारा I अम्पीयर के कारण उसकी अक्ष

पर स्थित बिन्दु P पर चुम्बकीय क्षेत्र ज्ञात करने हेतु प्रयुक्त करते है—चित्र 4·3 में एक वृत्ताकार धारा परिपथ X–Y तल मे दिखाया गया है जिसमें से धारा चित्र के अनुसार वामावर्त दिशा में प्रवाहित हो रही है । वृत्तीय धारा के केन्द्र O से उसकी अक्ष (Z–अक्ष) पर बिन्दु P की दूरी Z है, तथा वृत्तीय धारा का अर्द्धव्यास 'a' है।

वृत्तीय धारा के A विन्दु पर स्थित एक लघु अंश (dl) के कारण P बिन्दु पर समीकरण (4·5) के अनुसार चुम्बकीय क्षेत्र निम्न होगा :

$$\vec{dB} = \frac{1}{4\pi \in_0 C^2} \quad \frac{I\ (\vec{dl} \times \vec{r})}{r^3} \qquad \text{....(4·8)}$$

स्पष्ट ही इसकी दिशा $\vec{dl}$ (धारा I की दिशा में) और $\vec{r}$ (A से P की ओर) के लम्बवत होगी। यह दिशा चित्र मे dB द्वारा प्रदर्शित की गई है। इस क्षेत्र का वृत्तीय धारा के अनुदिश घटक $\vec{dB}_{11}$ द्वारा प्रदर्शित किया गया है। सममिति (*Symmetry*) के आधार पर हम आसानी से देख सकते हैं कि चुम्बकीय क्षेत्र अक्ष के अनुदिश ही होना चाहिए। क्योंकि जब हम व्यास AB के दूसरे सिरे पर धारांश $(dl)_B$ के कारण P बिन्दु पर क्षेत्र की गणना करेंगे तब उसका अक्ष के लम्बवत घटक धारांश $(dl)_A$ के कारण के क्षेत्र के लम्बवत घटक के बराबर और विपरीत होगा (जैसा कि चित्र 4·3 में प्रदर्शित किया गया है) अतः पूरी वृत्तीय धारा के कारण क्षेत्र अक्ष के अनुदिश दिशा में ही होगा। अतः केवल अक्ष के अनुदिश घटकों का ही योग करने की आवश्यकता है। चित्र की सहायता से हम देख सकते हैं कि $\vec{dl}$ और $\vec{r}$ सम्वत हैं। अतः

$$dB = \frac{1}{4\pi \in_0 C^2} \quad \frac{I\ dl\ r}{r^3} \qquad (4\ 9)$$

तथा अक्ष के अनुदिश घटक

$$dB_{11} = \frac{1}{4\pi \in_0 C^2} \quad \frac{I dl}{r^2} \quad \cos\theta \qquad ..\ (4·10)$$

जब कि θ अर्द्धव्यास OA और रेखा AP के बीच का कोण है (जो कि $\vec{dB}$ और Z–अक्ष के बीच के कोण के बराबर है)

क्योंकि धारा के सभी अंशो के कारण अक्ष के अनुदिश घटक एक ही दिशा $\vec{OP}$ मे है अतः सम्पूर्ण धारा के कारण चुम्बकीय क्षेत्र के लिए (4·10) का समाकलन करना पर्याप्त है।

अतः $$B_{(P)} = \int \frac{1}{4\pi\in_o C^2} \frac{I}{r^2} \cos\theta \, dl$$

या $$B_{(P)} = \frac{I}{4\pi\in_o C^2 r^2} \cos\theta \int dl$$

या $$B_{(P)} = \frac{I \cos\theta}{4\pi\in_o C^2 r^2} 2\pi a \quad ....(4\cdot11)$$

चित्र से, $$\cos\theta = \frac{a}{r}$$

$$\therefore \quad B_{(P)} = \frac{2\pi a I}{4\pi\in_o C^2 r^2} \frac{a}{r} = \frac{a^2 I}{2\in_o C^2 r^3} \quad ....(4\cdot12)$$

वैक्टर रूप में $$\vec{B}_{(P)} = \frac{a^2 I}{4\pi\in_o C^2 r^3} \hat{k} \quad ....(4\cdot13)$$

यदि धारा की दिशा विपरीत (दक्षिणावर्त) हो, तो

$$\vec{B}_{(P)} = -\frac{a^2 I}{2\in_o C^2 r^3} \hat{k}$$

यदि इस प्रकार के n फेरे (Turns) हों, तो प्रत्येक में धारा I के कारण उपर्युक्त क्षेत्र होगा, अतः कुल क्षेत्र n गुणा होगा;

$$\boxed{\vec{B}_{(P)} = \frac{n a^2 I}{2\in_o C^2 r^3} \hat{k}} \quad ....(4\cdot14)$$

चित्र से स्पष्ट है कि OAP समकोण त्रिभुज है, अतः

$$r^2 = (a^2 + Z^2)$$

$$\boxed{\vec{B}_{(P)} = \frac{n a^2 I}{2\in_o C^2 (a^2 + Z^2)^{3/2}} \hat{k}} \quad ....(4\cdot15)$$

अथवा $B_{(P)} = \frac{\mu_o n a^2 I}{2(a^2 + Z^2)^{3/2}}$; यदि बिन्दु इतनी दूरी पर अक्ष के दूसरी ओर हो तो क्षेत्र का मान यही होगा और दिशा विपरीत होगी ।

विशेष स्थिति –(1) वृत्तीय धारा के केन्द्र पर, Z=O

$$\therefore \quad B_{(O)}=\frac{na^2I}{2\in_o C^2a^3}=\frac{nI}{2\in_o C^2a}=\frac{\mu_o nI}{2a} \quad ..(4\cdot16)$$

(2) केन्द्र से बहुत दूर स्थित बिन्दु के लिये, जब Z > > a

$$B_{(P)}=\frac{na^2I}{2\in_o C^2Z^3}=\frac{\mu_o na^2I}{2Z^3} \quad ....(4\cdot17)$$

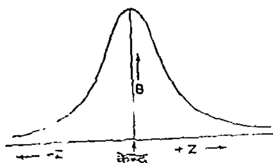
इसको निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं :—

$$B_{(P)}=\frac{n\pi a^2I}{2\pi\in_o C^2Z^3}$$

$$=\frac{n}{2\pi\in_o C^2}\frac{(\text{area of coil})\times\text{Current}}{(\text{distance})^3}$$

इस प्रकार प्रत्येक वृत्ताकार कुण्डली को उतने ही क्षेत्रफल की चुम्बकीय पट्टिका (magnetic shell) के रूप में समझा जा सकता है जिसकी सामर्थ्य (Strength) धारा के बराबर ली जाय। अतः जिसका चुम्बकीय आघूर्ण होगा, $M_1=(\pi a^2 I)$ और ऐसे n फेरों का कुल चुम्बकीय आघूर्ण $M=(n\pi a^2 I)$ होगा। अतः चुम्बकीय क्षेत्र निम्न प्रकार का हो जाता है :

$$B_{(P)}=\frac{1}{4\pi\in_o C^2}\frac{2M}{Z^3} \quad ..(4\cdot18)$$



चित्र 4.4

क्षेत्र की दिशा ज्ञात करने के लिये सदैव ध्यान रखना चाहिये कि यदि धारा वामावर्त्त (Anticlockwise) हो तो क्षेत्र अक्ष के अनुदिश केन्द्र से दूर होगा और दक्षिणावर्त्त हो, तो केन्द्र की ओर होगा।

समीकरण (4·15) पर विचार करने पर ज्ञात होगा कि केन्द्र से दूरी 'Z' बढ़ने पर क्षेत्र का मान कम ·हो जाता है, तथा केन्द्र पर अधिकतम होता है, सूत्र 4·16. केन्द्र से दूरी के साथ क्षेत्र का परिवर्तन चित्र 4·4 में दिखाया गया है।

समीकरण (4·14), (4·15), (4·16) और (4·17) वि० चु० इ० (*e. m. u.*) प्रणाली में निम्न प्रकार होंगे :

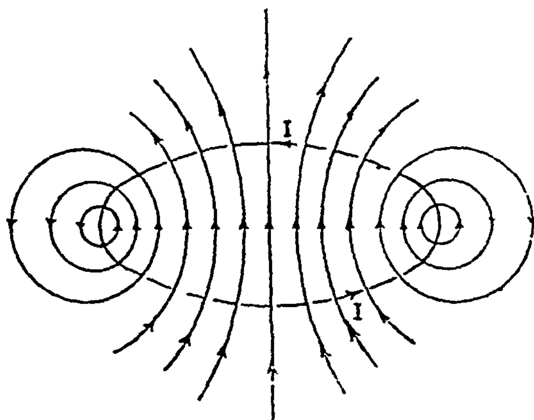
$$\vec{B}_{(P)}=\frac{2\pi na^2 I}{r^3}\hat{k} \qquad ....(4·19)$$

$$\vec{B}_{(P)}=\frac{2\pi na^2 I}{(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{k} \qquad ....(4·20)$$

$$B_{(O)}=\frac{2\pi nI}{a} \qquad ....(4·21)$$

$$B_{(P)}=\frac{2\pi na^2 I}{z^3} \qquad ....(4·22)$$

*[वृत्तीय धारा के कारण चुम्बकीय क्षेत्र चित्र 4·5 में दिखाया गया है। चालक के निकटतम बिन्दुओं पर क्षेत्र लगभग सीधे चालक के आस-पास के क्षेत्र जैसा ही होता है अर्थात बल रेखायें चालक के अक्ष पर वृत्तीय रेखाओं के रूप में



चित्र 4·5

होती हैं। वृत्तीय चालक का एक पृष्ठ (जिसमें धारा वामावर्त्त हो) उत्तरी ध्रुव के समान और दूसरा पृष्ठ (जिसमें धारा दक्षिणावर्त्त हो) दक्षिणी ध्रुव के समान कार्य करता है] चित्र में कागज के तल के ऊर्ध्वाधर तल में बल रेखायें दिखलाई गई हैं।

उदाहरण 4·1—एक वृत्ताकार कुण्डली, अर्द्धव्यास 10 से० मी० में से 1 एम्पीयर धारा (आवर्त्त) प्रवाहित हो रही है। उसके अक्ष पर उसके केन्द्र से 1 मीटर की दूरी पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता की गणना करिये।

$$B_{(P)}=\frac{a^2 I}{2\in_o C^2 r^3}=\frac{a^2 I}{2\in_o C^2(a^2+z^2)^{3/2}}$$

यहाँ $a=10$ से० मी० $=0\cdot1$ मीटर,

$z=1$ मीटर

$$\therefore \quad B_{(P)}=\frac{(0\cdot1)^2\times1}{2\times8\cdot85\times10^{-12}\times(3\times10^8)^2[(0\cdot1)^2+(1)^2]^{3/2}}$$

$$=\frac{\cdot01}{2\times8\cdot85\times10^{-12}\times9\times10^{16}(1\cdot01)^{3/2}}$$

$$=6\cdot18\times10^{-9}\ \frac{\text{Weber}}{\text{Meter}^2}$$ उत्तर

उदाहरण 4·2—बोहर के हाइड्रोजन परमाणु के माडल मे इलेक्ट्रॉन नाभिक के चहुँ ओर $5\cdot1\times10^{-11}$ मीटर के अर्द्धव्यास के वृत्त मे चक्कर काटता है जिनकी आवृत्ति $\nu=6\cdot8\times10^{15}$/सैकण्ड है। इलेक्ट्रॉन की कक्षा के केन्द्र पर कितना चुम्बकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है ?

इलेक्ट्रॉन के वृत्तीय कक्षा मे चक्कर काटने के कारण विद्युत धारा $I=e\nu$

$=(1\cdot6\times10^{-19})\times(6\cdot8\times10^{15})=1\cdot1\times10^{-3}$ अम्पीयर

सूत्र (4·16) के अनुसार

$$B_{(O)}=\frac{\mu_o i}{2a}$$

$$\therefore \quad B_{(O)}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times1\cdot1\times10^{-3}}{2\times5\cdot1\times10^{-11}}$$

$=14$ Webers/meter² उत्तर

प्रश्न

1. धाराओं की अन्योन्य क्रिया सम्बन्धी अम्पीयर के नियम का आवेदन कीजिये। एक दिये हुए लघु धारांश पर एक अन्य धारांश के कारण बल उसके चुम्बकीय क्षेत्र के पद मे लिखिये। सीधे चालक मे मे धारा के कारण किसी बिन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा क्या होगी ?

2. 'वायट और सेवर्ट नियम' की सहायता से वृत्ताकार कुण्डली में से प्रवाहित धारा के कारण, उसके अक्ष पर स्थित किसी विन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र के लिये व्यंजक प्राप्त करिये। क्षेत्र की दिशा किस प्रकार निर्धारित की जाती है ?

3. एक वृत्ताकार कुण्डली का अर्द्धव्यास 5 से० मी० है और उसमें 100 फेरे (turns) हैं। यदि उसमें से 0·5 अम्पीयर धारा प्रवाहित हो रही हो तो उसकी अक्ष पर 10 से० मी० दूरी पर चुम्बकीय क्षेत्र की गणना करें। उसके केन्द्र पर चुम्बकीय क्षेत्र कितना होगा तथा उसकी दिशा किस ओर होगी ?

[उत्तर : $5{\cdot}62 \times 10^{-5} \frac{\text{Weber}}{m^2}$; केन्द्र पर $6{\cdot}28 \times 10^{-4} \frac{\text{Weber}}{m^2}$,

तल के लम्बवत]

4. एक वृत्ताकार कुण्डली के किसी अक्षीय विन्दु पर, कुण्डली में वहने वाली विद्युत धारा से उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता का सूत्र ज्ञात कीजिये। कुण्डली के अक्ष पर विन्दु की स्थिति के साथ-साथ यह चुम्बकीय क्षेत्र कैसे वदलता है, ग्राफ द्वारा प्रदर्शित करिये। (राज० वि० वि० 1973)

[उत्तर : देखिये चित्र 4·4]

5

विभवमापी
(POTENTIOMETER)

5·1. विभवमापी का सिद्धान्त

5·2. विभवमापी के उपयोग

5·3. विभवमापी द्वारा किसी सेल के वि० वा० बल को ज्ञात करना

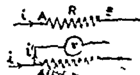
5·4. विभवमापी द्वारा किसी सेल का आन्तरिक प्रतिरोध ज्ञात करना

5·5. विभवमापी द्वारा वोल्टमीटर का अंशशोधन

5·6. विभवमापी द्वारा अमीटर का अंशशोधन

किसी सेल के विद्युत वाहक बल (*Electro Motive Force*) या किसी विद्युत परिपथ के दो बिन्दुओं के बीच विभवान्तर नापने के लिए प्रायः वोल्टमीटर (Voltmeter) का प्रयोग किया जाता है। वोल्टमीटर को ज्योंही सेल के धन व ऋण सिरों के बीच या विद्युत परिपथ के दो बिन्दुओं के बीच समान्तर क्रम में जोड़ा जाता है, वि० वा० ब० या विभवान्तर का मान ज्ञात हो जाता है। परन्तु क्या वोल्टमीटर द्वारा प्रदर्शित वि० वा० ब० या विभवान्तर का मान वास्तव में सही होता है ? प्रायः वोल्टमीटर अधिक प्रतिरोध के चलकुण्डली गैल्वैनोमीटर (Moving coil galvanometer) होते हैं। अतः ज्योंही वोल्टमीटर विद्युत परिपथ में लगाया जाता है कुछ न कुछ धारा, अधिक प्रतिरोध होने पर भी, उसमें से प्रवाहित होती है। इस कारण मूल विद्युत परिपथ में धारा का मान कम हो जाता है जिससे विभवान्तर का मान भी कम हो जाता है। सेल के वि० वा० ब० का पाठ्यांक भी वोल्टमीटर के द्वारा इस कारण कम आता है। अतः वोल्टमीटर उस विभवान्तर या वि० वा० ब० को ही कुछ हद तक परिवर्तित कर देता है जिसके पठन हेतु इसका प्रयोग होता है। इस तथ्य को चित्र 5·1 से प्रदर्शित किया जा सकता है।

यदि वोल्टमीटर का प्रतिरोध अनन्त कर दिया जावे तो उसमें से प्रवाहित धारा का मान शून्य हो जावेगा एवं उसमें प्राप्त पाठ्यांक सही होंगे। परन्तु इस प्रकार का वोल्टमीटर व्यावहारिक नहीं है। तथापि अनन्त प्रतिरोध का वोल्टमीटर ही एक आदर्श वोल्टमीटर (*Ideal* Voltmeter) होगा।

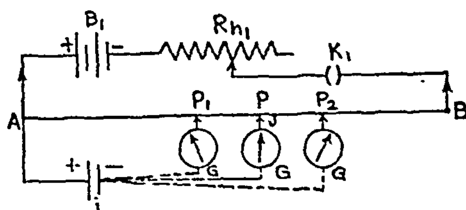


किसी सेल के वि० वा० व० तथा विभवान्तर का सही मापन विभवमापी द्वारा किया जाता है जो कि एक आदर्श वोल्टमीटर की भांति कार्य करता है।

5·1. विभवमापी का सिद्धान्त

विभवमापी द्वारा किसी अज्ञात (unknown) विभवान्तर का मान उसे ज्ञात विभवान्तर के साथ सन्तुलित कर ज्ञात किया जाता है।

मेंगनिन या कान्सटेन्टन के एक लम्बे व एक समान काट क्षेत्र (uniform cross-section) के प्रतिरोध तार A B में, संचायक सैल या बैटरी द्वारा धारा प्रवाहित की जाती है। धारा प्रवाहित होने के कारण तार AB के बीच विभवान्तर पैदा हो जाता है। तार A B में प्रवाहित धारा को नियन्त्रित करने के लिए (चित्र



चित्र 5·2

5·2 के अनुसार) परिपथ में एक धारा नियन्त्रक (Rheostate) लगा दिया जाता है। क्योंकि धारा तार A B में A से B की ओर प्रवाहित होती है अतः A से B की ओर विभव गिरता जाता है। तार की प्रति इकाई लम्बाई के साथ होने वाले विभव-पात (Fall in potential) को विभव प्रवणता (Potential gradient) कहते हैं।

माना कि तार AB में प्रवाहित धारा का मान i और तार की एक से० मी० लम्बाई का प्रतिरोध ρ है। अतः एक से० मी० लम्बे तार के सिरों के बीच विभवान्तर अर्थात् विभव प्रवणता का मान यदि k द्वारा प्रदर्शित किया जावे तो

विभव प्रवणता (k) = धारा (i) × एक से०मी० लम्बे तार का प्रतिरोध (ρ)

$$\therefore \quad k = i\rho \text{ वोल्ट/से० मी०} \qquad \ldots(5\cdot1)$$

माना कि सेल L के वि० वा० व० की विभवमापी द्वारा ज्ञात करना है। अतः इस सेल के धन सिरे को तार A B के A सिरे तथा ऋण सिरे को एक सुग्राही गैल्वैनोमीटर द्वारा जौकी (Jockey) J से जोड़ देते हैं। जौकी J को तार पर आगे पीछे खिसकाया जा सकता है तथा तार के किसी भी विन्दु पर उसे दबाकर परिपथ पूर्ण किया जा सकता है।

अब तार A B पर ऐसे विन्दु P की स्थिति ज्ञात करते हैं जिस पर जौकी दबाकर परिपथ पूर्ण करने पर गैल्वैनोमापी कोई विक्षेप नहीं देता। यह उसी स्थिति में सम्भव होगा कि जबकि तार A P के बीच विभवान्तर सेल के वि० वा० ब के समान हो। इस स्थिति में गैल्वैनोमीटर में से कोई धारा प्रवाहित नहीं होगी अर्थात्

धारा का मान शून्य होगा। क्योंकि P बिन्दु पर जौकी को दबाने पर गैल्वैनोमीटर शून्य विक्षेप देता है अतः P बिन्दु को 'शून्य विक्षेप बिन्दु' (Null deflection point) कहते हैं तथा विभवमापन की यह विधि 'शून्य विक्षेप विधि' (Null method) कहलाती है। [अतः विभवमापी का सिद्धान्त यही है कि विभवमापी के तार पर एक नियत विभव प्रवणता स्थापित कर, अज्ञात विभव को तार की लम्बाई A P के विभव अन्तर से संतुलित किया जाता है और *सन्तुलन अवस्था में :—*

सेल का वि० वा० ब = तार A P के बीच विभवान्तर

यदि तार A P की लम्बाई l से० मी० तथा सेल का वि० वा० ब० 'E' हो तो

$$\boxed{E = Kl} \qquad ....(5 \cdot 2)$$

अतः K का मान ज्ञात होने पर सेल का विद्युत वाहक बल निकाला जा सकता है।]

अब यदि जौकी की स्थिति बदलकर उसे तार A B के P_1 बिन्दु पर दबाकर परिपथ पूर्ण किया जावे तो गैल्वैनोमीटर एक निश्चित दिशा में विक्षेप देता है। इस स्थिति में सेल का विद्युत वाहक बल, तार AP_1 के बीच विभवान्तर से अधिक है जिससे A L P_1 परिपथ में परिणामी धारा (सेल L में से) LAP_1 दिशा में प्रवाहित होती है और गैल्वैनोमीटर विक्षेप देता है। अतः इस स्थिति में

सेल का वि० वा० बल > तार AP_1 के बीच विभवान्तर

या $\qquad E > kl_1$ यदि A $P_1 = l_1$ से० मी०

यदि अब जौकी को P बिन्दु के के दूसरी ओर P_2 बिन्दु पर दबाकर परिपथ पूर्ण किया जावे तो गैल्वैनोमीटर पुनः विक्षेप देता है परन्तु विक्षेप की दिशा बदल जाती है। इस स्थिति में सेल का वि० वा० ब० तार AP_2 के बीच विभवान्तर से कम होता है *अर्थात*

E < तार AP_2 के बीच विभवान्तर

या < E Kl_2 $\qquad$ यदि $AP_2 = l_2$ सेमी०

जिससे ALP_2 परिपथ में परिणामी *धारा* (बैटरी B_1 के कारण) ALP_2 दिशा में प्रवाहित होती है और गैल्वैनोमीटर पहली दिशा के विपरीत दिशा में विक्षेप देता है।

विशेष—विभवमापी की सहायता से शून्य विक्षेप स्थिति में तार की संतुलित लम्बाई ज्ञात कर सेल का विद्युत वाहक बल अथवा विभवान्तर का सही मापन किया जाता है। विभवमापन की एक अविक्षेप विधि होने के कारण विभवमापी द्वारा ज्ञात विभवान्तर का मान यथार्थ (Accurate) होता है। सन्तुलन की अवस्था में गैल्वैनोमीटर से धारा का प्रवाहित न होना इस बात का द्योतक है कि सेल या उस विद्युत परिपथ से, जिसके दो बिन्दुओं के बीच विभवान्तर नापना है, कोई धारा

गैल्वनोमीटर में प्रवाहित नहीं होती । इस कारण सेल के वि० वा० व० या उन दो विन्दुओं के बीच विभव में कोई परिवर्तन नहीं होता और उसका यथार्थ मापन होता है । इस प्रकार विभवमापी एक आदर्श वोल्टमीटर की भाँति कार्य करता है ।

5·2 विभवमापी के उपयोग

विभवमापन के लिए विभवमापी एक वहुत ही उपयोगी उपकरण है । विभवमापी द्वारा वहुत सी (Very low) तथा वहुत उच्च (Very high) विभव का सही मापन किया जा सकता है। (यहाँ उच्च एवं अल्प विभव का अभिप्राय क्रमशः किलोवोल्ट तथा मिलिवोल्ट की कोटि के विभव से है) । साधारणतया विभवमापी का प्रयोग (*a*) किसी सेल के वि० वा० व निकालने (*b*) दो सेलों के वि० वा० वलों की तुलना करने (*c*) किसी सेल के आन्तरिक प्रतिरोध निकालने (*d*) अल्प प्रतिरोध को ज्ञात करने (*e*) दो प्रतिरोधों की तुलना करने (*f*) वोल्टमीटर तथा अमीटर का अंश शोधन (Calibration) करने आदि में होता है । इनमें से कुछ का सविस्तार वर्णन आगे दिया जा रहा है । विभवमापी का उपयोग लघु ताप वि० वा० वल (thermo *e. m. f.*) के माप के लिये भी है जो अध्याय 6 में दिया गया है ।

5·3. विभवमापी द्वारा सेल के विद्युत वाहक वल को ज्ञात करना

विभवमापी तार AB के वीच विभवान्तर पैदा करने के लिए चित्रानुसार, A तथा B सिरों के मध्य एक संचायक सेल या वैटरी B_1 धारा, नियंत्रक Rh_1 और कुंजी K_1 श्रेणीक्रम में जोड़ते हैं। यह परिपथ मुख्य परिपथ (Main Circuit) कहलाता है । धारा नियंत्रक Rh_1 के द्वारा तार AB में प्रवाहित धारा को परिवर्तित कर विभव प्रवणता को वदला जा सकता है । विभवमापी तार का A सिरा प्रायः संचायक या वैटरी के धनसिरे (Positive Terminal) से जोड़ा जाता है ।

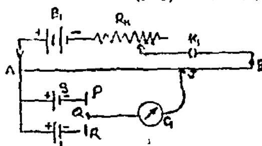
S एक मानक सेल* (standard cell) है तथा L एक लेक्लांशी सेल (Leclanche cell) है । सेल 'L' का वि० वा० व० निकालना है । दोनों सेलों के धन सिरे A विन्दु पर जोड़ दिये जाते हैं तथा ऋण सिरे द्विपथ कुंजी (Two way key) K से होते हुए गैल्वैनोमीटर G द्वारा जौकी J से जोड़ देते हैं ।

सर्वप्रथम मानक सेल द्वारा विभवमापी तार AB का मानकीकरण (standardisation) करते हैं । इसके लिए कुंजी K_1 को वंद (close) कर धारा नियन्त्रक Rh_1 के द्वारा तार AB में निश्चित तीव्रता की धारा प्रवाहित होने देते हैं । अव

---

* मानक सेल (Standard cell) वेस्टन केडमियम सेल होता है जिसका वि० वा० व० 1·0183 वोल्ट होता है । प्रयोगशाला में डेनियल सेल (Daniell cell) मानक सेल के रूप में प्रयोग होता है । इसका वि० वा० व० 1·08 वोल्ट होता है ।

द्विपथ कुंजी k के रिक्त स्थान 1 में प्लग (plug) लगा कर मानक सैल को परिपथ



चित्र 5·3

में ले लेते हैं और जोकी की सहायता से तार AB पर शून्यविक्षेप बिन्दु (Null point) की स्थिति ज्ञात कर लेते हैं। यदि शून्य विक्षेप स्थिति में तार की सन्तुलित लम्बाई l_1 से० मी० हो तो

मानक सेल का वि० वा० व० $= l_1$ सेमी लम्बे तार के बीच विभवान्तर

∴ $$E = kl_1$$

या $$k = \frac{E}{l_1} \quad ....(5\ 3)$$

(यहाँ E = मानक सेल का वि० वा० व० तथा k = विभव प्रवणता है)

इस प्रकार E का मान ज्ञात होने के कारण k का मान निकाल लिया जाता है। अब द्विपथ कुंजी k के रिक्तस्थान 1 से प्लग निकालकर, रिक्तस्थान 2 में लगा दिया जाता है। इससे लेक्लाशी सेल L परिपथ में आ जाता है। फिर पहले की भांति जोकी की सहायता से तार AB पर शून्यविक्षेप बिन्दु की स्थिति ज्ञात कर लेते हैं। यदि अब शून्य विक्षेप स्थिति में तार की सतुलित लम्बाई l_2 से०मी० हो तो

लेक्लांशी सेल का वि० वा० व $= l_2$ से०मी० लम्बे तार के बीच विभवान्तर

यदि लेक्लांशी सेल का वि० वा० व० e वोल्ट हो तो

$$e = kl_2 \quad ....(5·4)$$

उक्त समीकरण में k का मान रखने पर

$$\boxed{e = \frac{E}{l_1} \times l_2} \quad ...(5·5)$$

l_1 तथा l_2 का मान प्रयोग द्वारा निकाल लिया जाता है। E का मान ज्ञात है अतः e (सेल का वि० वा० व०) का मान समीकरण (5 5) की सहायता से निकाला जा सकता है। फिर प्रवाहित मुख्य परिपथ में लगे धारानियन्त्रक के द्वारा विभवमापी तार AB में धारा बदलकर (इससे विभव प्रवणता का मान परिवर्तित हो जाता है) प्रयोग को दोहराया जा सकता है।

इसी प्रयोग द्वारा दो सेलों के वि०वा० वलों की तुलना भी की जा सकती समीकरण (5·3) तथा (5·4) की सहायता से

$$\boxed{\frac{E}{e}=\frac{l_1}{l_2}} \quad ....(5·6)$$

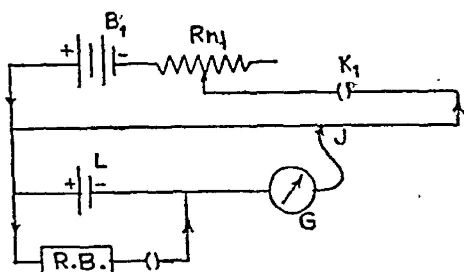
l_1 तथा l_2 का मान ज्ञातकर $\frac{E}{e}$ की गणना की जा सकती है।

किसी विद्युत परिपथ के दो विन्दुओं के वीच विभवान्तर के मापन के लिए भी विभवमापी का प्रयोग इसी प्रकार किया जाता है।

5·4. विभवमापी द्वारा किसी सेल का आन्तरिक प्रतिरोध ज्ञात करना।

जब धारा सेल में ऋण से धन सिरे की ओर प्रवाहित होती है, विद्युत अपघट्य (Electrolyte) धारा प्रवाह में प्रतिरोध पैदा करता है। इस प्रतिरोध को सेल का आन्तरिक प्रतिरोध कहते हैं। सेल के आन्तरिक प्रतिरोध का मान इलैक्ट्रोड के क्षेत्रफल, उनके मध्य दूरी तथा विद्युत अपघट्य की प्रकृति (Nature of the electrolyte) पर निर्भर करता है। विभवमापी द्वारा सेल के आन्तरिक प्रतिरोध का मान नीचे दी गई विधि द्वारा ज्ञात किया जाता है।

विभवमापी तार AB के वीच विभवान्तर पैदा करने के लिए, चित्रानुसार, मुख्य परिपथ में एक वैटरी B_1, धारा नियंत्रक Rh_1 तथा कुंजी k_1 श्रेणीक्रम में जोड़ दिये जाते हैं। विभवमापी तार का A सिरा वैटरी B_1 के धन सिरे से जोड़ा जाता है।



चित्र 5·4

सेल L के धन सिरे को, जिसका आन्तरिक प्रतिरोध निकालना है, विभवमापी तार के A सिरे से तथा ऋण सिरे को गैल्वैनोमीटर G के द्वारा जौकी J से जोड़ देते हैं। एक प्रतिरोध वक्स R. B. (Resistance Box) कुंजी k_2 के द्वारा सेल L के समान्तर क्रम में सम्बन्धित है।

सर्वप्रथम मुख्य परिपथ में कुंजी k_1 को बन्द कर दिया जाता है और धारा नियंत्रक Rh_1 के द्वारा तार AB में निश्चित तीव्रता की धारा प्रवाहित होने देते हैं। फिर जौकी J की सहायता से विभवमापी तार पर शून्य विक्षेप बिन्दु की स्थिति ज्ञात करते हैं। क्योंकि इस स्थिति में सेल L खुले परिपथ (*Open circuit*) में है अतः सन्तुलन की अवस्था में सेल का वि० वा० ब०, l_1 से०मी० लम्बे तार के बीच विभवान्तर के बराबर होगा।

$$E = kl_1 \quad ....(5·7)$$

यहाँ l_1 = सन्तुलन की स्थिति में तार की सन्तुलित लम्बाई

E = सेल का वि० वा० ब०

तथा k = विभव प्रवणता

यदि सेल के परिपथ में एक प्रतिरोध R जोड़ दें तो, ओम के नियम द्वारा, परिपथ में प्रवाहित धारा का मान

$$i = \frac{\text{कुल वि० वा० ब (Total } e.\ m.\ f.)}{\text{परिपथ में कुल प्रतिरोध}}$$

यदि B सेल का आन्तरिक प्रतिरोध हो तो

$$i = \frac{E}{B+R}$$

या $\quad E = i(B+R) \quad ....(5·8)$

समीकरण (5·7) व (5·8) के द्वारा

$$i = (B+R) + kl_1 \quad ....(5·9)$$

अतः अब प्रतिरोध बक्स (R. B.) में R प्रतिरोध निकालकर कुंजी k_2 को भी बंद कर देते हैं। फिर जौकी J की सहायता से विभवमापी तार पर शून्य विक्षेप बिन्दु की स्थिति ज्ञात कर लेते हैं। माना कि इस स्थिति में तार की सन्तुलित लम्बाई l_2 है। क्योंकि इस स्थिति में सेल में से i धारा प्रवाहित होती है और इस कारण प्रतिरोध R के बीच iR विभवान्तर पैदा हो जाता है। सन्तुलन की स्थिति में प्रतिरोध R के बीच विभवान्तर l_2 से०मी० लम्बे तार के बीच,विभवान्तर से सन्तुलित हो जाता है, अर्थात्

$$iR = kl_2 \quad ....(5·10)$$

समीकरण (5·9) को (5·10) से भाग देने पर

$$\frac{B+R}{R} = \frac{l_1}{l_2}$$

या $$\frac{B}{R} = \frac{l_1}{l_2} - 1$$

$$\therefore \qquad B = R\left[\frac{l_1}{l_2} - 1\right] \qquad ....(5\cdot11)$$

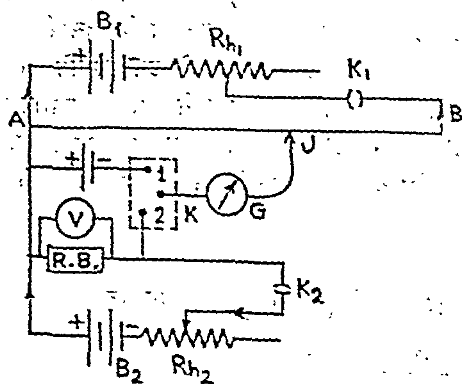
इन समीकरण की सहायता से B का मान ज्ञात किया जा सकता है। प्रतिरोध R का मान बदलकर प्रयोग को बार-बार दोहराया जा सकता है।

5·5. विभवमापी द्वारा वोल्टमीटर का अंशशोधन (Calibration of Voltmeter)

विभवमापी द्वारा वोल्टमीटर या अमीटर के स्केल का अंशाकन (calibration) या अंशशोधन किया जा सकता है क्योंकि वोल्टमीटर तथा अमीटर की स्केल तो अंशांकित होती ही है अतः विभवमापी द्वारा उसके अंशाकन की जाँचकर उसके अंशाकनों की अशुद्धि (error) ज्ञात की जाती है।

विभवमापी तार AB के बीच विभवान्तर पैदा करने के लिए, चित्रानुसार, मुख्यपरिपथ में बैटरी B_1, धारा नियन्त्रक Rh_1 तथा कुंजी k_1 श्रेणीक्रम में जोड़ दिये जाते हैं। विभवमापी तार का A सिरा बैटरी के धन सिरे से जोड़ा जाता है।

एक मानक सेल लेकर उसका धन सिरा विभवमापी तार के A सिरे पर तथा ऋण सिरा द्विपथ कुंजी (Two way key) से होते हुए गैल्वैनोमीटर के द्वारा जौकी J से जोड़ दिया जाता है। सहायक परिपथ (Auxiliary circuit) में बैटरी B_2, धारा नियन्त्रक Rh_2 कुंजी k_2 तथा एक प्रतिरोध बक्स (Resistance box) R. B. श्रेणी क्रम में जोड़ते हैं। वोल्टमीटर, जिसका अंशशोधन करना है, प्रतिरोध बक्स (R. B.) के समान्तर क्रम में जोड़ दिया जाता है। प्रतिरोध बक्स (R. B.) के उच्च विभव वाले सिरे को तार के A सिरे से तथा निम्न विभव (low potential) वाले सिरे को द्विपथ कुंजी k से होते हुए गैल्वैनोमीटर के द्वारा जौकी J से जोड़ दिया जाता है।



चित्र 5·5

सर्वप्रथम मानक सेल S के द्वारा विभवमापी के तार का मानकीकरण किया जाता है। इसके लिए मुख्य परिपथ में कुंजी k_1 को बन्द कर दिया जाता है तथा

द्विपथ कुंजी k के रिक्त स्थान 1 में प्लग लगाकर मानक सेल को परिपथ में लाया जाता है। फिर जौकी J को, विभवमापी तार AB के B सिरे के पास दबाकर मुख्य परिपथ में धारा नियन्त्रक Rh_1 के द्वारा तार AB में (बैटरी B_1 के कारण) प्रवाहित धारा को परिवर्तित कर अविक्षेप स्थिति (Null position) प्राप्त कर लेते हैं। इस स्थिति में मानक सेल का वि० वा० ब०, तार की सन्तुलित लम्बाई के बीच विभवान्तर के बराबर होगा। यदि तार की सन्तुलित लम्बाई l से० मी० हो तो

$$E = kl$$

तथा $$k = \frac{E}{l} \quad \text{....(5·12)}$$

यहाँ E = मानक सेल का वि० वा० ब० और
k = विभव प्रवणता है।

E तथा l का मान ज्ञात होने से समीकरण (5·12) के द्वारा k की गणना कर ली जाती है। l का मान अधिक होने के कारण k का मान कम होगा एवं विभवमापी अल्प विभवान्तर का भी सही मापन कर सकेगा। इस प्रकार मानकीकरण करने के पश्चात् विभवमापी के मुख्य परिपथ में कोई भी परिवर्तन नहीं किया जाता।

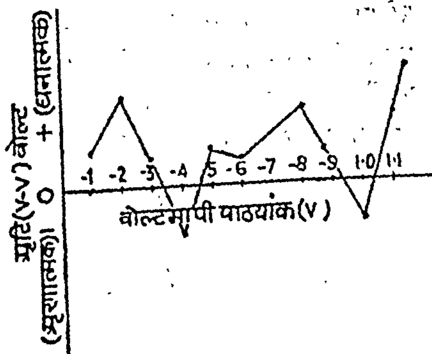
अब द्विपथ कुंजी k के रिक्त स्थान 1 से प्लग निकालकर रिक्त स्थान 2 में प्लग लगा दिया जाता है जिससे सहायक परिपथ का प्रतिरोध बक्स (R. B.) परिपथ में आ जाता है। सहायक परिपथ में कुंजी k_2 को बन्दकर प्रतिरोध बक्स (R. B.) में से उचित प्रतिरोध निकाल लिया जाता है। फिर धारा नियन्त्रक Rh_2 के द्वारा सहायक परिपथ में इतनी धारा प्रवाहित होने देते हैं ताकि प्रतिरोध बक्स (R. B.) के समान्तर क्रम में लगा वोल्टमीटर V वोल्ट पढ़े। अब जौकी J के द्वारा तार AB पर शून्य विक्षेप बिन्दु की स्थिति ज्ञात कर तार की सन्तुलित लम्बाई निकाल लेते हैं। यदि तार की सन्तुलित लम्बाई l_1 से० मी० हो तो

l_1 से०मी० लम्बे तार के बीच विभवान्तर $(V') = kl_1$ वोल्ट

तथा वोल्टमीटर पाठ्यांक में त्रुटि $(V - V')$* वोल्ट होगी। धारा नियन्त्रक Rh_2 को समंजित कर वोल्टमीटर द्वारा प्रदर्शित विभवान्तर V के लिए कई पाठ्यांक लेकर प्रत्येक स्थिति में तार की सन्तुलित लम्बाइयों को ज्ञात कर लेते हैं और उनके

* त्रुटि का मान धनात्मक, ऋणात्मक, या शून्य कुछ भी हो सकता है।

बीच विभवान्तर (V′) की गणना कर ली जाती है। फिर प्रत्येक स्थिति में त्रुटि (V—V′) की गणना कर उसे y—अक्ष के अनुदिश लेकर तथा वोल्टमीटर द्वारा प्रदर्शित विभवान्तर (V) को x-अक्ष के अनुदिश लेते हुए लेखाचित्र (Graph) खींचते हैं। इस प्रकार प्राप्त लेखाचित्र वोल्टमीटर के लिए अंशशोधन वक्र (calibration curve for voltmeter) कहलाता है।



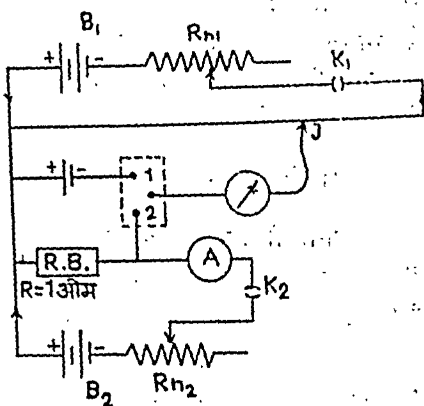
चित्र 5·6

यहाँ यह बता देना उचित ही होगा कि विभवमापी तार AB के बीच विभवान्तर वोल्टमीटर की अंशशोधन परास (range) से अधिक होना चाहिए अर्थात् जितने पाठ्यांक तक अंशशोधन करना है अन्यथा आगे चलकर V के अधिक मान के लिए संतुलन प्राप्त नहीं किया जा सकेगा। अतः प्रारम्भ में ही यह देख लेना चाहिए कि V के अधिकतम मान के लिए भी संतुलन विन्दु आ जाता है।

5·6 विभवमापी द्वारा अमीटर का अंशशोधन (Calibration of Ammeter)

विभवमापी द्वारा अंमापी या अंमीटर का अंशशोधन भी वोल्टमीटर अंशशोधन की भाँति ही किया जाता है।

अमापी अंशशोधन के लिए बनाये गये विद्युत परिपथ में मुख्य परिपथ, वोल्टमीटर अंशशोधन के मुख्य परिपथ जैसा ही होता है। केवल सहायक परिपथ से वोल्टमीटर हटाकर एक अमीटर A जिसका अंशशोधन करना हो, श्रेणीक्रम में लगा दिया जाता है। प्रतिरोध बक्स (R. B.) में या तो 1 ओम का प्रतिरोध रखते हैं या इसके स्थान पर एक ओम का मानक प्रतिरोध (Srandard Resistance) लगा दिया जाता है।



चित्र 5·7

पहले की भाँति मानक सेल द्वारा विभवमापी तार का मानकीकरण कर विभव प्रवणता का मान ज्ञात कर लिया जाता है। इस प्रकार

विभव प्रवणता $k = \frac{E}{l}$ वोल्ट/सेमी०

ज्ञात हो जाता है।

अब द्विपथ कुंजी k के रिक्त-स्थान 1 से प्लग निकालकर रिक्त-स्थान 2 में लगा दिया जाता है जिससे

सहायक परिपथ का प्रतिरोध बक्स या एक ओम का मानक प्रतिरोध परिपथ में आ जाता है। सहायक परिपथ में कुंजी K_2 को बन्द कर धारा नियंत्रक Rh_2 द्वारा I प्रवाहित होने देते हैं जिसका मान अमीटर A के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। फिर जौकी J की सहायता से शून्य विक्षेप बिन्दु की स्थिति ज्ञात कर तार की सन्तुलित लम्बाई ज्ञात कर लेते हैं। माना कि अविक्षेप स्थिति में तार की सन्तुलित लम्बाई l_1 सेमी० है। अतः l_1 सेमी० लम्बे तार के बीच विभवान्तर

$$V = kl_1 \text{ वोल्ट होगा।}$$

क्योंकि kl_1 विभवान्तर, एक ओम प्रतिरोध में I धारा प्रवाहित होने के कारण उत्पन्न विभवान्तर को सन्तुलित करता है अत.

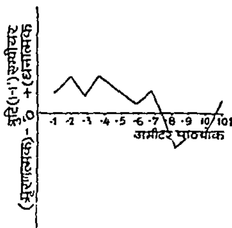
$V = I\ R \quad kl_1$

क्योंकि $R = 1$ ओम,

$V \quad 1$ होगा और

∴ धारा का वास्तविक मान $I' \quad kl_1$ होगा।

अर्थात् विभवान्तर V का मान वही होगा जो कि धारा का है। इस प्रकार अमीटर के पाठ्यांक मे त्रुटि $(I - I')$ होगी। अमीटर द्वारा



चित्र 5·8

प्रदर्शित धारा I के कई पाठ्यांक लेकर प्रत्येक स्थिति में तार की सन्तुलित लम्बाइयों को ज्ञात कर लेते हैं। फिर प्रत्येक स्थिति में वास्तविक धारा I' का मान निकाल कर त्रुटि $(I - I')$ की गणना कर लेते हैं। त्रुटि $(I - I')$ को y-अक्ष के अनुदिश लेकर तथा अमीटर द्वारा प्रदर्शित धारा I को x-अक्ष के अनुदिश लेते हुए लेखाचित्र खींचते हैं जो कि अमीटर के लिए अंशशोधन वक्र कहलाता है।

उदाहरण 5·1—8 मीटर लम्बे विभवमापी तार का प्रतिरोध 8 ओम है। एक उच्च प्रतिरोध बक्स तथा एक 2 वोल्ट का संचायक सेल इसके श्रेणी क्रम में जुड़े हैं। यदि एक माइक्रो वोल्ट प्रति मि० मी० के विभव प्रवणता की आवश्यकता है तो प्रतिरोध बक्स मे प्रतिरोध क्या होना चाहिए।

विभवमापी तार की लम्बाई $= 8$ मीटर

$= 8000$ मि० मी०

विभवमापी तार का प्रतिरोध $= 8$ ओम

संचायक सेल का वि०वा०ब० $= 2$ वोल्ट

तथा विभव प्रवणता $k = 10^{-6}$ वोल्ट/मि० मी०

माना कि प्रतिरोध बक्स में प्रतिरोध का मान R ओम है

क्योंकि विभव प्रवणता $k = i\rho$ ....(1)

यहाँ ρ प्रति मि०मी० तार का प्रतिरोध है

$$\therefore \quad \rho = \frac{8}{8000} \text{ ओम/मि० मी०}$$

$$\text{तथा} \quad i \quad \frac{E}{R+8} = \left(\frac{2}{R+8}\right) \text{ एम्पीयर}$$

∴ समीकरण (1) में मान रखने पर

$$10^{-6} = \frac{2}{(R+8)} \times \frac{8}{8000}$$

$$\text{या} \quad (R+8) = 2 \times 10^3$$

$$\text{या} \quad R - 2000 - 8$$

$$\therefore \quad R = 1992 \text{ ओम}$$

अतः प्रतिरोध बक्स में प्रतिरोध का मान 1992 ओम होना चाहिए।

उदाहरण 5·2—4 मीटर लम्बे तार के एक विभवमापी को स्थायी वोल्टता की बैटरी के सिरों से जोड़ा गया है। लैकलांशी सेल से 100 सेमी० पर सन्तुलन बिन्दु प्राप्त होता है। यदि विभवमापी के तार में 1 मीटर वृद्धि कर दी जावे तो सन्तुलन बिन्दु की स्थिति ज्ञात करो।

प्रथम स्थिति में विभवमापी तार की लम्बाई = 4 मीटर
= 400 सेमी०

तार की सन्तुलित लम्बाई l_1 = 100 सेमी०

द्वितीय स्थिति में विभवमापी तार की लम्बाई = 5 मीटर
= 500 सेमी०

तार की सन्तुलित लम्बाई l_2 - ?

माना कि मुख्य परिपथ में लगी बैटरी का वि०वा०ब० = E वोल्ट

तथा लैकलांशी सेल का विद्युत वाहक बल = E′ वोल्ट

यदि प्रथम स्थिति में विभव प्रवणता k_1 हो तो

$$k_1 = \frac{E}{400} \text{ वोल्ट/सेमी०}$$

$$\text{तथा } E' - k_1 l_1 = \frac{E}{400} \times 100 \qquad ....(1)$$

द्वितीय स्थिति में विभव प्रवणता k_2 हो तो

$$k_2 = \frac{E}{500} \text{ वोल्ट/सेमी०}$$

तथा $$E' = k_2 l_2 = \frac{E}{500} \times l_2 \quad \ldots (2)$$

समीकरण (1) व (2) की सहायता से,

$$\frac{E}{400} \times 100 = \frac{E}{500} \times l_2$$

या $$l_2 = \frac{500}{4}$$

$$l_2 \;\; 125 \text{ सेमी}$$

[उत्तर—अतः सन्तुलन बिन्दु 125 सेमी० पर प्राप्त होगा।]

उदाहरण 5·3—एक सेल के विद्युत वाहक बल को सन्तुलित करने के लिए 150 से०मी० के विभवमापी तार की आवश्यकता होती है। यदि सेल के दोनो सिरो के बीच 3 ओम का प्रतिरोध जोड़ दिया जावे तो केवल 100 से० मी० लम्बे विभवमापी तार की आवश्यकता होती है। सेल के आन्तरिक प्रतिरोध की गणना कीजिए।

सेल का आन्तरिक प्रतिरोध $B = R\left(\frac{l_1}{l_2} - 1\right)$

दिया हुआ $l_1 = 150$ सेमी०

$l_2 = 100$ सेमी०

तथा $R = 3$ ओम

अतः $$B = 3\left[\frac{150}{100} - 1\right]$$

या $$B = 3\left[\frac{150 - 100}{100}\right]$$

या $$B = \frac{3 \times 50}{100}$$

$$B = 1·5 \text{ ओम}$$

[उत्तर—अतः सेल का आन्तरिक प्रतिरोध 1·5 ओम है।]

उदाहरण 5·4—वोल्टमापी के अंशशोधन के प्रयोग में मानक सेल, वि० वा० व० 1·1 वोल्ट का सन्तुलन 220 से० मी० लम्बाई पर होता है। जब सहायक परिपथ में प्रयुक्त नियत प्रतिरोध का विभवान्तर सन्तुलित किया जाता है, तब 94 सेमी० पर सन्तुलन होता है तथा प्रतिरोध के सिरों पर लगा हुआ वोल्टमापी 0·5 वोल्ट पढ़ता है। इस पाठ्यांक पर अशुद्धि क्या है?

मानक सेल के लिए सन्तुलन लम्बाई = 220 सेमी०

$\therefore$ विभव प्रवणता, $k = \frac{1 \cdot 1}{220} = \cdot 005$ वोल्ट/से०मी०

प्रतिरोध के सिरों का विभवान्तर $= kl$

$= \cdot 005 \times 94$ 0·47 वोल्ट

इसी पाठ्यांक को वोल्टमीटर 0·5 वोल्ट पढ़ता है।

अतः अशुद्धि $= 0 \cdot 5 - 0 \cdot 47 = + \cdot 03$

[उत्तर : अशुद्धि = +·03 वोल्ट]

प्रश्न

1. विभवमापी का सिद्धान्त समझाइये।
   विभवमापी द्वारा किसी सेल के वि० वा० व० को कैसे ज्ञात करोगे?
2. विभव प्रवणता से क्या अभिप्राय है?
   विभवमापी द्वारा (a) वोल्टमीटर (b) अमीटर का अंशशोधन किस प्रकार किया जाता है।
3. विभवमापी के सिद्धान्त को समझाओ।
   एक विभवमापी प्रयोग में यह पाया जाता है कि जब सेल के सिरे विभवमापी तार की 125 से० मी० लम्बाई पर जोड़े जाते हैं तो धारामापी में कोई भी धारा प्रवाहित नहीं होती। यदि सेल के समान्तर क्रम में 4 ओम का एक प्रतिरोध लगा दिया जाता है तो सेल को तार की 100 सेमी० लम्बाई पर जोड़ने पर सन्तुलन प्राप्त होता है। सेल का आन्तरिक प्रतिरोध ज्ञात करो। (राज० 1967) [उत्तर 1 ओम]
4. सेल के आन्तरिक प्रतिरोध से क्या अभिप्राय है? किसी सेल का आन्तरिक प्रतिरोध विभवमापी द्वारा कैसे ज्ञात किया जाता है।
5. विभवमापी के प्रयोग में एक सेल का वि० वा० व० 52 से० मी० तार से सन्तुलित होता है। अगर सेल के साथ 5 ओम का पार्श्वपथ लगा देने से सन्तुलित लम्बाई 40 से० मी० हो जाती हो तो सेल का आन्तरिक प्रतिरोध ज्ञात कीजिये। अगर विभवमापी तार पर विभव प्रवणता 0·027 वोल्ट/से० मी० हो तो सेल का वि० वा० व० भी ज्ञात करो। (राज० 1972)

[उत्तर : आन्तरिक प्रतिरोध = 1·5 ओम
वि० वा० ब = 1·404 वोल्ट]

6. एक वोल्टमीटर के अंशाकन के प्रयोग मे मानक सेल का वि० वा० व० 1·1 वोल्ट है और यह विभवमापी के 550 से० मी० तार से सन्तुलित होता है। अगर एक 2·3 ओम के प्रतिरोध में 0·1 एम्पियर धारा प्रवाहित हो तो प्रतिरोध के सिरों पर विभवान्तर के सन्तुलन के लिए तार की लम्बाई ज्ञात करो। (राज० 1970) [उत्तर 115 से० मी०]

7. विभवमापी के एक प्रयोग में डेनियल सेल, जिसका वि० वा० व० 1·08 वोल्ट है विभवमापी तार की 450 से० मी० लम्बाई पर सन्तुलित होना है। जब एक लैक्लांशी सेल के वि० वा० व० को सन्तुलित करते हैं तो सन्तुलित लम्बाई 630 से० मी० है। लैक्लांशी सेल का वि० वा० व० ज्ञात कीजिये।

8. 10 मीटर लम्बे विभवमापी तार का प्रतिरोध 10 ओम है। इस तार के सिरो के बीच एक उच्च प्रतिरोध बक्स और 2 वोल्ट की एक बटरी जुड़ी हुई है। ·0001 वोल्ट/से० मी० के विभव प्रवणता प्राप्त करने के लिए प्रतिरोध बक्स मे कितना प्रतिरोध लगाना पड़ेगा ? [उत्तर 390 ओम]
1902

9. एक नगण्य प्रतिरोध वाली बैटरी 10 मीटर लम्बे तार के सिरों के बीच जुड़ी हुई है। एक लैक्लांशी सेल से 650 सेमी० पर सन्तुलन बिन्दु प्राप्त होता है। यदि विभवमापी तार की लम्बाई 200 से० मी० मे बढा दी जाय तो सन्तुलन बिन्दु की स्थिति ज्ञात करो। [उत्तर : 780 से० मी०]

10. जब एक डेनियल सेल को विभवमापी तार से सन्तुलित किया जाता है तो सन्तुलन बिन्दु 540 से० मी० पर प्राप्त होता है। लेकिन जब एक 16 ओम प्रतिरोध के सिरो के बीच विभवान्तर को सन्तुलित किया जाता है तो सन्तुलन बिन्दु 800 से० मी० पर प्राप्त होता है। यदि डेनियल सेल का विद्युत वाहक बल 1·08 वोल्ट हो तो 16 ओम प्रतिरोध मे प्रवाहित होने वाली धारा की गणना करो। [उत्तर : 0 1 एम्पीयर]

11. एक मानक सेल को जब विभवमापी तार के साथ सन्तुलित करते हैं तो सन्तुलन बिन्दु 990 से० मी० पर प्राप्त होता है। लेकिन एक प्रतिरोध के सिरों के बीच विभवान्तर को सन्तुलित करने पर सन्तुलन बिन्दु 370 8 से० मी० पर प्राप्त होता है। यदि मानक सेल का वि० वा० व० 1·1 वोल्ट हो और एक वोल्टमीटर से नापने पर प्रतिरोध के सिरो के बीच विभवान्तर 0·4 वोल्ट प्राप्त हो तो वोल्टमीटर के पाठ्यांक मे त्रुटि की गणना कीजिये। [उत्तर : 0 012 वोल्ट]

12. एक सेल का वि० वा० व० 1·5 वोल्ट है और यह विभवमापी के 575 से०मी० लम्बे तार से सन्तुलित होता है। सेल के सिरों को 4 ओम प्रतिरोध से जोड़ने पर सन्तुलित लम्बाई 500 से० मी० हो जाती है। सेल का आन्तरिक

प्रतिरोध ज्ञात कीजिए। विभवमापी तार पर विभव प्रवणता का मान भी ज्ञात कीजिये। (राज०,1971) [उत्तर : { 0·6 ओम तथा 0·00261 वोल्ट/से० मी०]

13. तापविद्युत के एक प्रयोग में, ताप विद्युतयुग्म की सन्धियों के बीच एक निश्चित तापान्तर पर उत्पन्न ताप विद्युत वाहक बल (Thermo. *e.m.f.*) विभवमापी तार की 159·2 से० मी० लम्बाई से सन्तुलित होता है। एक मानक सेल (वि० वा० ब० = 1·0186 वोल्ट) के लिए सन्तुलित लम्बाई 60 से० मी० है जबकि तार के श्रेणीक्रम में 400 ओम का प्रतिरोध लगा है। ताप विद्युत वाहक बल की गणना कीजिये। यदि 1 मीटर लम्बे तार का प्रतिरोध 2 ओम हो। [उत्तर : 8·083 मि० वोल्ट]

14. तीन तार परस्पर श्रेणी क्रम में संयोजित हैं तथा इनके प्रतिरोध क्रमानुसार 2, 3 और 4 ओम है। 4·5 वोल्ट वि० वा० ब० और उपेक्षणीय आंतरिक प्रतिरोध की एक बैटरी द्वारा इनमें धारा प्रवाहित की जा रही है। 3 ओम प्रतिरोध के सिरों पर एक अन्य सेल इस प्रकार जोड़ दी जाती है कि उसका धनाग्र प्रतिरोध के अधिक विभव वाले बिन्दु से सम्बन्धित होता है। यदि अब परिपथ में धारा के मान में कोई परिवर्तन न हो तो सेल का वि० वा० ब० ज्ञात करिये। (राज० पी० एम० टी० 1970)
[उत्तर : 1·5 वोल्ट]

15. एक विभवमापी के तार का प्रतिरोध 1 ओह्म व लम्बाई 1 मीटर है। इसको लैक्लांशी सैल से जोड़ दिया गया है। जिसका विद्युत वाहक बल 1·45 वोल्ट है। इस सैल का आन्तरिक प्रतिरोध अधिक से अधिक कितना हो सकता है कि एक डैनियल सैल, वि० वा० बल 1·1 वोल्ट का सन्तुलन हो सके? यदि आन्तरिक प्रतिरोध 0·5 ओह्म हो तो सन्तुलन बिन्दु कहाँ पर होगा?
[उत्तर 0·318 ओह्म ; सतुलन प्राप्त नहीं होगा]

16. एक विभवमापी के तार की लम्बाई 10 मीटर व कुल प्रतिरोध 50 ओह्म है। यह एक 2 वोल्ट वि० वा० ब० की बैटरी और 950 ओह्म के प्रतिरोध के श्रेणीक्रम मे जोड़ा गया है। जब एक 2 ओह्म प्रतिरोध के तार के सिरों के विभवान्तर को संतुलित किया जाता है, तब सन्तुलन बिन्दु 800 से० मी० पर प्राप्त होता है। (अ) विभव प्रवणता की गणना करिये ; (ब) प्रतिरोध में प्रवाहित धारा के मान की गणना करिये।
[उत्तर : (अ) 10^{-4} वोल्ट/से०मी० (ब) 0·04 अम्पीयर]

17. 10 मीटर लम्बे विभवमापी के तार को स्थिर वोल्टता के संचायक सेल से जोड़ा जाता है। एक लैक्लांशी सेल के लिये सन्तुलन बिन्दु 750 से० मी० पर प्राप्त होता है। यदि विभवमापी के तार की लम्बाई 100 से०मी० बढ़ा दी जाय तो सन्तुलन बिन्दु की नवीन स्थिति क्या होगी?
(राजस्थान पी०एम०टी० 1971) [उत्तर : 825 से०मी०]

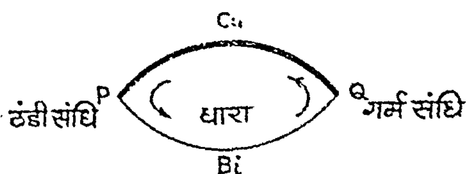
6

ताप-विद्युत्
(THERMO-ELECTRICITY)

6·1. सीबेक प्रभाव (Seeback Effect)

सीबेक नामक वैज्ञानिक ने सर्वप्रथम बताया कि यदि दो विभिन्न धातुओं (Different metals) से बने एक बन्द परिपथ (closed circuit) की एक सन्धि (junction) के ताप को स्थिर रखकर दूसरी संधि के ताप को बढ़ाया जावे, (जिससे दोनों संधियो के बीच तापान्तर हो जावे) तो परिपथ में धारा प्रवाहित होने लगती है। परिपथ में धारा की उपस्थिति, उसमें लगे एक सुग्राही गैल्वैनोमीटर में प्राप्त विक्षेप द्वारा प्रदर्शित की जाती है। यह प्रभाव सीबेक प्रभाव कहलाता है।

दो विभिन्न धातुओं से बने बन्द परिपथ को ताप-वैद्युत-युग्म (Thermo Couple) तथा वह बिन्दु जहाँ पर दो विभिन्न धातुओं को जोड़ कर परिपथ बनाया जाता है संधि (junction) कहते हैं। स्थिर निम्न ताप पर रखी गयी संधि को प्रायः ठन्डी



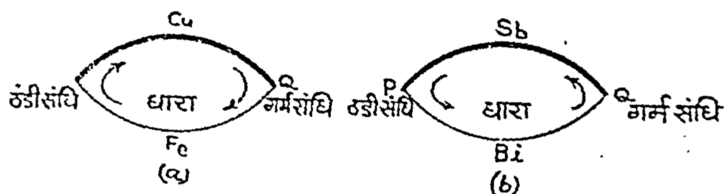
चित्र 6·1

संधि (Cold junction) तथा गर्म की जा रही संधि को गर्म संधि (Hot junction) कहते हैं। संधियों के बीच तापान्तर के कारण, ताप-वैद्युत-युग्म में प्रवाहित धारा को ताप-विद्युत-धारा (Thermoelectric current) कहते हैं। क्योंकि परिपथ में धारा प्रवाहित होने के लिए, वि० वा० ब० का होना अनिवार्य है, इसलिए ताप-वद्युत-युग्म में उत्पन्न वि० वा० ब० को ताप-विद्युत-वाहक-बल (Thermo *e. m. f.*) कहते हैं।

अतः किसी ताप-वैद्युत-युग्म में, विद्युत-वाहक-बल तथा विद्युत धारा के उत्पन्न होने को, जबकि उसकी एक संधि का ताप स्थिर रखकर दूसरी संधि का ताप बढ़ाया जावे, सीबेक प्रभाव (Seeback Effect) कहते हैं।

किसी ताप-वैद्युत-युग्म में उत्पन्न ताप वि० वा० ब० (1) ताप वैद्युत-युग्म में प्रयुक्त धातुओं की प्रकृति और (2) युग्म की संधियों के तापान्तर पर निर्भर करता है।

एक तांबे-लोहे (Copper-Iron) के ताप-वैद्युत-युग्म में यदि P संधि का ताप स्थिर रखकर (ठन्डी संधि), Q संधि को गर्म किया जावे, तो परिपथ में धारा गर्म संधि 'Q' पर तांबे से लोहे (Copper to Iron) की ओर प्रवाहित होती है।



चित्र 6·2

यदि एण्टीमनी-विस्मथ (Antimony-Bismuth) के ताप वैद्युत-युग्म में P संधि का ताप स्थिर रखकर (ठन्डी संधि) Q संधि को गर्म किया जावे तो परिपथ में धारा ठन्डी संधि P पर एण्टीमनी से विस्मथ की ओर प्रवाहित होती है। (चित्र 6·2)।

(a) ताप विद्युत श्रेणी (Thermo Electric Series)

सीबेक ने विभिन्न धातुओं पर प्रयोग कर उन्हें एक निश्चित क्रम में जमाया जिसे ताप विद्युत श्रेणी (Thermo Electric Series) कहते हैं। यह श्रेणी निम्न प्रकार है :—

एण्टीमनी (Antimony), नाइक्रोम (Nichrome), लोहा (Iron), जस्ता (Zinc) तांबा (Copper), सोना (Gold), चांदी (Silver), टिन (Tin), सीसा (Lead), ऐल्यूमीनियम (Aluminium), पारा (Mercury), प्लेटिनम (Platinum) कोबाल्ट (Cobalt), निकिल (Nickel) कान्सटेन्टन (Constantan) और बिस्मथ (Bismuth) ।

यदि दो संधियों पर विभवान्तर क्रमशः v तथा v' हो तो परिणामी वि० वा० व 'e' का मान

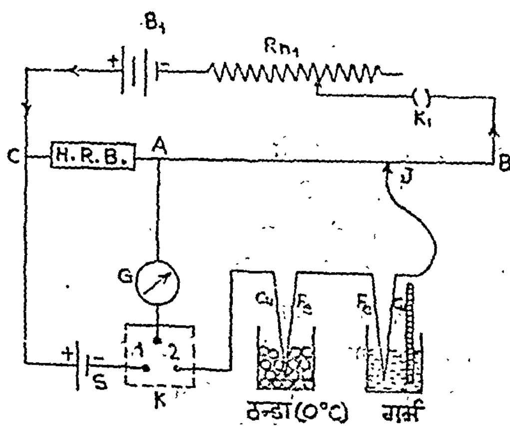
$$e = v - v'$$

होगा। यद्यपि दो विभिन्न धातुओं के लिए संपर्क विभवांतर का मान 0·5 वोल्ट तक हो सकता है परन्तु ताप वि० वा० व० का मान, दोनों संधियों के बीच 100°C तापान्तर के लिए, कुछ मिली वोल्ट कोटि (Order) का ही होता है।

(*c*) ताप वि० वा० व० का मापन (Measurement of thermo *e.m.f.*)

ताप वि० वा० व० का मापन प्रायः विभवमापी की सहायता से किया जाता है। चित्र (6·3) के अनुसार परिपथ बनाया जाता है। माना कि ताँबे-लोहे (*Cu*-Fe) युग्म में उत्पन्न ताप वि० वा० व० का मान संधियों के विभिन्न तापान्तर पर ज्ञात करना है।

मुख्य परिपथ में विभवमापी तार AB के श्रेणीक्रम में एक उच्च प्रतिरोध बक्स (H.R.B.) लगा दिया जाता है। S मानक सेल है जिसका धन सिरा बिन्दु 'C' तथा ऋण सिरा द्विपथ कुंजी K के रिक्त स्थान 1 से होते हुए, गैल्वैनोमीटर G द्वारा A बिन्दु पर जुड़ा है। (*Cu*–*Fe* युग्म का उच्चविभव वाला सिरा द्विपथ कुंजी K के रिक्त स्थान 2 से होते हुए, गैल्वैनोमीटर G द्वारा A पर जुड़ा है और निम्न विभव वाला सिरा जोकी J से सम्बन्धित है।



चित्र 6·3

सर्वप्रथम मुख्य परिपथ में कुंजी K_1 को बन्द कर, द्विपथ कुंजी K के रिक्त स्थान 1 में प्लग लगाकर मानक सेल S को परिपथ में ले लेते हैं। क्योंकि ताप वि० वा० व० मिली वोल्ट (*m.v.*) की कोटि के होते हैं। अतः विभवमापी तार की विभव प्रवणता इससे कम कोटि की होनी चाहिए। इसके लिए प्रतिरोध बक्स (H.R.B.) में उपयुक्त उच्च प्रतिरोध रखकर उसके सिरों के बीच उत्पन्न विभवान्तर को, (जिसका

मान उसमें से प्रवाहित धारा को धारा नियंत्रक ...
जा सकता है) मानक सेल के वि० वा० ब० ...
स्थिति में गैल्वैनोमीटर G कोई विक्षेप नहीं ...
E वोल्ट हो और प्रतिरोध बक्स (H. R. B.) ...

अतः विभवमापी तार मे धारा $i = \frac{E}{R}$ E - ...

यदि तार की प्रति इकाई लम्बाई ...

$$\text{विभव प्रवणता } k = \frac{E}{R}\rho$$

अब द्विपथ कुंजी K के रिक्त स्थान I ... लगाते हैं जिससे (Cu-fe) युग्म परिपथ ... (बर्फ़ में) पर रखकर दूसरी संधि Q के ताप को ... निश्चित तापान्तर पर, युग्म में उत्पन्न ताप वि० ... से विभवमापी तार पर सन्तुलित कर, ... यदि तार की सन्तुलित लम्बाई l से०मी० हो ...

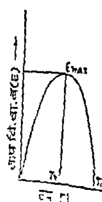
$$\text{ताप वि० वा० ब०} = \frac{E}{R}\rho l$$

गर्म संधि Q के विभिन्न तापों पर ... ताप वि० वा० ब० ज्ञात कर लेते हैं।

[ρ ज्ञात करने के लिए विभवमापी के तार ... मीटर ब्रिज या पो० आ० बाक्स की सहायता ... प्रतिरोध में उसकी लम्बाई का भाग देने पर ... जाता है।]

(*d*) ताप वि० वा० ब० तथा वैद्युत युग्म की संधियों के बीच तापान्तर ...

यदि ताप-विद्युत-युग्म में उत्पन्न ताप-वि० वा० ब० ... युग्म की सन्धियों के बीच तापान्तर को x—अक्ष के साथ लेकर लेखाचित्र बनाया जावे, तो प्राप्त वक्र एक परवलय (Parabola) है।



(Cu-Fe) युग्म के लिए, जिसकी एक संधि को 0°C पर स्थिर रखकर दूसरी संधि को गर्म करते हैं, उत्पन्न ताप वि० वा० ब० का गर्म संधि के ताप के साथ परिवर्तन चित्र (64) में दिखाया गया है। आरम्भ में ताप वि०

वा० व का मान ताप (T) के साथ बढ़ता है। परन्तु गर्म संधि के एक निश्चित तापं पर, ताप वि० वा० व का मान अधिकतम हो जाता है। गर्म संधि का वह ताप जिस पर उत्पन्न ताप वि० वा० व० अधिकतम होता है, 'उदासीन ताप' (Neutral Temperature) कहलाता है। उदासीन ताप को T_n से प्रदर्शित करते हैं। विभिन्न ताप वैद्युत युग्मों के लिए उदासीन ताप भिन्न-भिन्न होता है परन्तु ठण्डी संधि के ताप पर निर्भर नहीं करता। (Cu-Fe) युग्म के लिए उदासीन ताप का मान 270°C है।

यदि गर्म सन्धि के ताप को और बढ़ाया जावे तो ताप वि० वा० व में कमी होने लगती है तथा एक निश्चित ताप पर इसका मान शून्य हो जाता है। अब अगर गर्म संधि का ताप और बढ़ाया जावे तो ताप वि० वा० ब० का मान भी बढ़ता है परन्तु विपरीत दिशा में। अत: गर्म संधि के जिस ताप पर, ताप वि० वा० ब० की दिशा विपरीत हो जाती है व्युत्क्रमण ताप (Temperature of Inversion) कहलाता है। व्युत्क्रमण ताप विभिन्न ताप-वैद्युत-युग्मों के लिए भिन्न-भिन्न होने के साथ युग्म की ठण्डी संधि के ताप पर निर्भर करता है। इसे प्राय: T_i से प्रदर्शित करते हैं तथा (Cu-Fe) युग्म के लिए इसका मान 540°C है जबकि ठण्डी संधि का ताप 0°C है।

ताप वि० वा० व का तापान्तर के साथ परिवर्तन गणितीय रूप में निम्न प्रकार दिया जाता है :

$$E = aT + bT^2 \quad \text{....(6·3)}$$

यहां E = ताप वि० वा० व

T = गर्म संधि का ताप और a तथा b ताप वैद्युत युग्म के लिए स्थिरांक है।

उदासीन ताप पर ताप वि० वा० व अधिकतम होता है। अत: अवकलन से

$$\left(\frac{dE}{dT}\right) = 0, \text{ जब } T = T_n$$

$$\therefore \quad 0 = \frac{d}{dT}[aT + bT^2]$$

या $a + 2bT = 0$

$$\therefore \quad T = T_n = -\frac{a}{2b} \quad \text{....(6·4)}$$

इसी प्रकार व्युत्क्रमण ताप पर ताप वि० वा० व० शून्य होता है।

अत: $E = aT + bT^2 = 0$

जब $T = T_i$

$$\therefore \quad T = T_i = -\frac{a}{b} \quad \text{....(6·5)}$$

ताप-वैद्युत-क्षमता (Thermoelectrio Power)—ताप के साथ ताप वि० वा० ब० के परिवर्तन की दर को ताप-वैद्युत-क्षमता कहते हैं। अतः

$$\text{ताप-वैद्युत क्षमता} = \frac{dE}{dT}$$

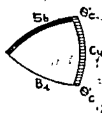
ताप-वैद्युत क्षमता और गर्म संधि के ताप में खींचा गया ग्राफ एक सरल रेखा है तथा इसे ताप-वैद्युत-आरेख कहते हैं।

(c) ताप विद्युत प्रभाव के नियम (Laws of Thermo electric effect).

ताप-वैद्युत-युग्म में उत्पन्न ताप वि० वा० ब० के मापन के लिए परिपथ को पूर्ण करने में प्रायः ताँबे आदि के तारों का प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार अतिरिक्त धातु के आ जाने के कारण, अतिरिक्त संधियाँ बन जाती हैं। इन अतिरिक्त संधियों के समान या अलग-अलग ताप पर होने से, युग्म में उत्पन्न ताप वि० वा० ब पर होने वाले प्रभाव को निम्न नियम द्वारा दिया जाता है।

(1) माध्यमिक धातु सिद्धान्त (Law of Intermediate Metals)

माना कि एन्टीमनी-विस्मथ (Sb-Bi) युग्म की θ°C पर एक संधि को खोल कर एक नया धातु, माना कि ताँबा, लगा दिया गया है। यदि नई धातु के दोनों सिरे θ°C पर ही रहें तो ताप वि० वा० ब० पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता अर्थात् ताप वि० वा० ब० अपरिवर्तित रहता है। अतः इस स्थिति में अतिरिक्त धातु का ताप वि० वा० ब पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। यदि



चित्र 6·5

E_A^B = (A—B) युग्म के लिए ताप वि० वा० ब०

E_C^B = (C—B) युग्म के लिए ताप वि० वा० ब०

E_A^C = (A—C) युग्म के लिए ताप वि० वा० ब०

$$\therefore \quad E_A^B = E_A^C + E_C^B \qquad ....(6·6)$$

(2) माध्यमिक ताप सिद्धान्त (Law of Intermediate Temperature)

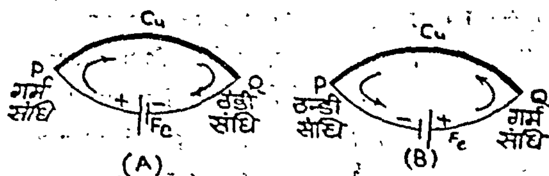
माना कि एक ताप-वैद्युत-युग्म की संधियों का ताप T_1 तथा T_3 है और ताप वि० वा० ब० E_1^3 है। यदि उसी प्रकार के दो अन्य युग्मों को लिया जावे जिनकी संधियों के ताप क्रमशः T_1 व T_2 और T_2 व T_3 हों तथा इन विद्युत वाहक बल E_1^2 व E_2^3 द्वारा प्रदर्शित किये जावें तो इस सिद्धान्त द्वारा

$$E_1^3 = E_1^2 + E_2^3$$

6·2 पेल्टियर-प्रभाव (Peltier Effect)

पेल्टियर नामक वैज्ञानिक ने 1834 में बताया कि यदि किसी ताप वैद्युत युग्म में धारा प्रवाहित की जावे तो एक संधि गर्म हो जाती है तथा दूसरी ठण्डी अर्थात एक संधि पर ऊष्मा उत्पन्न होती है जबकि दूसरी पर ऊष्मा का अवशोषण। यह सीबेक प्रभाव का विपरीत प्रभाव है तथा पेल्टियर प्रभाव कहलाता है।

अतः किसी ताप-वैद्युत युग्म में धारा प्रवाहित होने के कारण उसकी एक संधि पर ऊष्मा के उत्पन्न होने और दूसरी संधि पर ऊष्मा के अवशोषण होने को पेल्टियर-प्रभाव कहते हैं।



चित्र 6·6

(Cu—Fe) युग्म में, सीबेक प्रभाव के कारण, तापविद्युत धारा गर्म संधि Q पर Cu से Fe की ओर प्रवाहित होती है। यदि अब इसी युग्म में, जिसकी दोनों संधियां समान ताप पर हैं, एक बेटरी B द्वारा [चित्र (6·6)] धारा Q संधि पर Cu से Fe की ओर प्रवाहित की जावे तो वह संधि ठन्डी हो जावेगी। अर्थात् Q संधि पर ऊष्मा का अवशोषण होता है। यदि प्रवाहित धारा की दिशा बदल दी जावे तो Q संधि गर्म हो जावेगी तथा P संधि ठन्डी। इस प्रकार पेल्टियर प्रभाव उत्क्रमणीय प्रभाव (Reversible Phenomenon) है।

(*a*) पेल्टियर प्रभाव का स्पष्टीकरण (Explanation of Peltier effect)

इलेक्ट्रान सिद्धान्त के आधार पर सीबेक प्रभाव का स्पष्टीकरण देते समय यह बताया जा चुका है कि मुक्त इलेक्ट्रान के कारण युग्म की संधियों पर सम्पर्क विभवान्तर और वि० वा० ब० पैदा हो जाता है। (Cu–Fe) युग्म की दोनों संधियों पर यह वि० वा० ब० Cu और Fe की ओर प्रभावी होता है। जब युग्म में धारा एक संधि पर वि० वा० ब० के विपरीत दिशा में प्रवाहित होती है तो वह उसके विरुद्ध कार्य करती है। यह कार्य ऊष्मा के रूप में प्रकट होता है जिससे संधि गम हो जाती है। क्योंकि दूसरी संधि पर धारा वि० वा० ब० की दिशा में ही प्रवाहित होती है। अतः धारा पर कार्य होता है और ऊर्जा का अवशोषण होने के कारण संधि ठंडी हो जाती है।

(*b*) पेल्टियर गुणांक (Peltier Coefficient)

पेल्टियर प्रभाव के कारण किसी ताप-वैद्युत युग्म की संधि पर उत्पन्न ऊष्मा या अवशोषित ऊष्मा का मान उस संधि में से प्रवाहित आवेश (charge) पर निर्भर करता है अर्थात्

संधि पर उत्पन्न या अवशोषित ऊष्मा $\propto$ प्रवाहित आवेश

या $Q \propto q$,

$\therefore Q = \pi q$

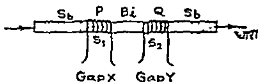
π एक नियतांक है जिसे पेल्टियर गुणांक (Peltier coefficient) कहते हैं। इसका मान संधि के ताप तथा युग्म में प्रयुक्त धातुओं की प्रकृति पर निर्भर करता है

यदि $q=1$ कूलम्ब हो तो $Q=\pi$

अतः किसी ताप-वैद्युत युग्म में एक कूलम्ब आवेश के प्रवाहित होने के कारण उसकी संधि पर उत्पन्न या अवशोषित ऊष्मा की मात्रा (जूल में) को पेल्टियर गुणांक कहते हैं। ऊष्मा उत्सर्जित हो रही संधि पर π का मान ऋणात्मक लिया जाता है जबकि ऊष्मा अवशोषित हो रही संधि के लिए धनात्मक।

(c) पेल्टियर प्रभाव के प्रदर्शन की विधि (Demonstration of Peltier effect)

Bi बिस्मथ की छड़ है जिसके दोनों सिरों P व Q पर एन्टीमनी Sb की छड़ें जुड़ी हुई हैं। P और Q संधियों पर पृथक्कृत तांबे के तार (Insulated copper wire) की कुण्डलियाँ (coils) S_1 व S_2 लपेट दी गई हैं। S_1 तथा S_2 कुण्डलियों के सिरों को मीटरसेतु के दोनों रिक्त स्थानों (gaps) X व Y में जोड़ देते हैं और मीटर सेतु को सन्तुलित कर सन्तुलन बिन्दु ज्ञात कर लेते हैं।



चित्र 6·7

अब छड़ में चित्र (6·7) के अनुसार बायीं से दायीं ओर धारा प्रवाहित की जाती है। इससे P संधि गर्म हो जाती है और Q संधि ठण्डी। अतः P संधि पर लिपटी S_1 कुण्डली का ताप बढ़ जाता है जबकि Q संधि पर लिपटी S_2 कुण्डली का ताप कम हो जाता है। क्योंकि S_1 व S_2 कुण्डली का प्रतिरोध ताप पर निर्भर करता है इसलिए ताप परिवर्तन के कारण उनका प्रतिरोध बदल जाता है। इस कारण मीटर सेतु का संतुलन बिगड़ जाता है। सतुलन बिन्दु की स्थिति बदल जाती है जिसमे गैल्वैनोमीटर विक्षेप देने लगता है।

पेल्टियर प्रभाव उत्क्रमणीय (Reversible) होने के कारण, यदि छड़ में धारा की दिशा बदल दी जावे तो, गैल्वैनोमीटर में प्राप्त विक्षेप की दिशा भी बदल जाती है।

पेल्टियर प्रभाव के प्रदर्शन की यह विधि स्टार्लिंग (Starling) की विधि कहलाती है।

6·3 टॉमसन प्रभाव (Thomson Effect)

टॉमसन के ऊष्मागतिकी के द्वितीय नियम (Second law of Thermodynamics) का प्रयोग कर बताया कि किसी ताप-वैद्युत युग्म में उत्पन्न ताप वि० वा० ब० उसकी संधियों के बीच तापान्तर के समानुपाती होता है; अर्थात

$$E \propto (T_2 - T_1)$$

यहां $E =$ ताप वि० वा० ब०

$T_2 =$ गर्म संधि का ताप तथा

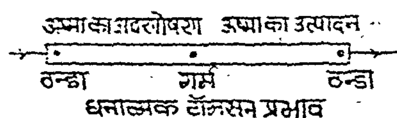
$T_1 =$ ठण्डी संधि का ताप

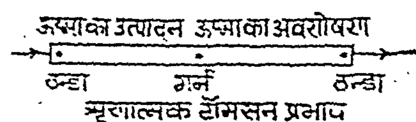
अतः E और $(T_2 - T_1)$ में खींचा गया लेखाचित्र (graph) एक सरल रेखा (Straight line) होना चाहिए । परन्तु यह सरल रेखा न होकर एक परवलय (Parabola) है जिसका वर्णन पहले किया जा चुका है । इस कारण टॉमसन ने यह निष्कर्ष निकाला कि ताप वैद्युत-युग्म में पेल्टियर वि० वा० ब० के अतिरिक्त अवश्य ही कोई और भी वि० वा० ब० का स्रोत है । इस अतिरिक्त वि० वा० ब० के स्रोत के पैदा होने का कारण टॉमसन ने निम्न प्रकार समझाया ।

जब किसी धात्विक चालक (Metallic conductor) में, जिसके विभिन्न भाग भिन्न भिन्न ताप पर हों, धारा प्रवाहित की जावे, तो उस चालक में ऊष्मा का उत्पादन या अवशोषण होता है। इस प्रभाव को टॉमसन प्रभाव कहते हैं। यह प्रभाव उत्क्रमणीय (Reversible) है।

किसी धातु की एक छड़ में, जिसके विभिन्न भाग भिन्न-भिन्न ताप पर हैं, धारा उच्चताप वाले सिरे से निम्नताप वाले सिरे की ओर प्रवाहित करने पर ऊष्मा का उत्पादन और निम्नताप वाले सिरे से उच्चताप वाले सिरे की ओर प्रवाहित करने पर ऊष्मा का अवशोषण हो तो उस धातु के लिए टॉमसन प्रभाव धनात्मक (Positive) माना जाता है। तांबा, एन्टीमनी, जस्ता, चाँदी आदि के लिए टॉमसन प्रभाव धनात्मक माना (Positive) है।

यदि प्रभाव इसके विपरीत है अर्थात् धारा के गर्म (उच्च ताप वाले) सिरे से ठण्डे (निम्नताप वाले) सिरे की ओर प्रवाहित होने पर ऊष्मा का अवशोषण (Absorption) और ठण्डे सिरे से गर्म सिरे की ओर प्रवाहित होने पर ऊष्मा का उत्पादन हो तो उस धातु के लिए टॉमसन प्रभाव ऋणात्मक (Negative) माना जाता है। लोहा, बिस्मथ, प्लेटिनम आदि के लिए टॉमसन प्रभाव ऋणात्मक है।





चित्र 6·8

सीसे के लिए टॉमसन प्रभाव का मान शून्य है। सीबेक और पेल्टियर प्रभाव की भाँति, टॉमसन प्रभाव को भी समझाया जा सकता है।

(a) टॉमसन गुणांक (Thomson Coefficient)

किसी चालक के दो बिन्दुओं के बीच, जिनका तापान्तर 1°C है, एक कूलम्ब आवेश प्रवाहित करने पर, उत्पादित या अवशोषित ऊष्मा के मान को उस चालक का टॉमसन गुणांक (Thomson Coefficient) कहते हैं। टॉमसन गुणांक को प्रायः σ से प्रदर्शित करते हैं और इसका मान भी टॉमसन प्रभाव की भाँति धनात्मक व ऋणात्मक लिया जाता है।

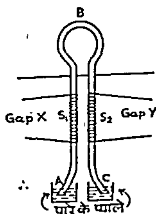
एक चालक A में जिसके सिरे T_1 और T_2 ताप पर हैं, टॉमसन प्रभाव के कारण उत्पन्न या अवशोषित ऊष्मा का

मान $\int_{T_1}^{T_2} \sigma A \, dT$ होगा। यहाँ σA उस चालक का टॉमसन गुणांक है।

(b) टॉमसन प्रभाव के प्रदर्शन की विधि (Demonstration of Thomson Effect)

एक लोहे की छड़ ABC को मोड़कर [चित्र (6·9)] उसकी दोनों भुजाओं पर समान प्रतिरोध वाली पृथक्कृत ताँबे के तार की कुण्डलियाँ S_1 व S_2 लपेट देते हैं। दोनों कुण्डलियों को ऐस्बेस्टॉस (Asbestos) जैसे कुचालक पदार्थ से ढक देते हैं। छड़ के A व C सिरों को पारे के प्यालों (mercury cups) में रखते हैं। S_1 व S_2 कुण्डलियों के सिरों को मीटर सेतु के दोनों रिक्त स्थानों X व Y में जोड़ देते हैं और मीटर सेतु को सन्तुलित कर लेते हैं।

अब छड़ के B सिरे को गर्म करते हैं जिससे B से A और B से C के बीच ताप प्रवणता पैदा हो जाती है। यदि अब छड़ में धारा ABC दिशा में प्रवाहित की जावे तो टामसन प्रभाव के कारण एक भुजा में ऊष्मा का अवशोषण और दूसरी पर ऊष्मा का उत्पादन होता है। जिससे एक भुजा का ताप थोड़ा कम व दूसरी का ताप थोड़ा बढ़ जाता है। इस प्रकार हुए ताप परिवर्तन के कारण, कुण्डलियों S_1 व S_2 के प्रतिरोध में भी परिवर्तन हो जाता है जिससे मीटर सेतु का संतुलन बिगड़ जाता है और गैल्वेनोमीटर विक्षेप देने लगता है। धारा की दिशा बदल देने पर गैल्वेनोमीटर में प्राप्त विक्षेप की दिशा भी बदल जाती है। अतः टामसन प्रभाव, उत्क्रमणीय प्रभाव है।



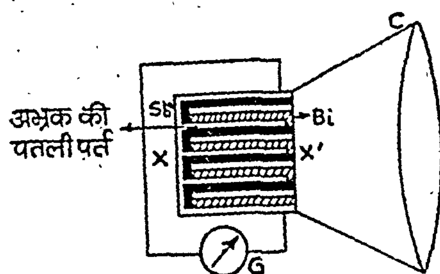
चित्र 6·9

टॉमसन प्रभाव के प्रदर्शन की यह विधि स्टार्लिंग की विधि कहलाती है।

6·4 ताप-वैद्युत पुंज (Thermopile)

ताप-विद्युत-पुंज, सीवेक प्रभाव पर आधारित एक उपकरण है जिसके द्वारा सूक्ष्म तापान्तर को ज्ञात किया जा सकता है।

एन्टीमनी और विस्मथ की कई छड़ों को एक दूसरे पर एकान्तर क्रम में रखकर एक पुंज के रूप में जमा लिया जाता है। ये छड़ें चित्र (6·10) के अनुसार एक दूसरे से श्रेणी क्रम में जोड़ दी जाती हैं जिससे कई एन्टीमनी-विस्मथ युग्म श्रेणीकम में आ जाते हैं। दो छड़ों के बीच प्रयुक्त अभ्रक (Mica) की पतली पर्तें विद्युत रोधी (Electric Insulator) के रूप में कार्य करती हैं। इस प्रकार प्राप्त पुंज के X तल में स्थित सभी संधियों को समान ताप पर रखने के लिए उसे पीतल की एक प्लेट से ढक देते हैं। X′ तल, जिसमें पुंज की दूसरी संधियां स्थित हैं, को काला कर दिया जाता है, तथा उस पर एक शंकु C लगा दिया जाता है। ताप-विद्युत-पुंज के सिरों के बीच एक सुग्राही गैल्वैनोमीटर जोड़ देते हैं।



चित्र 6·10

ऊष्मा उत्सर्जित कर रहे स्रोत से विकिरण, जब शंकु C में होते हुए ताप-वैद्युत-पुंज के X′ तल पर गिरते हैं, उनका अवशोषण हो जाता है। इस कारण X′ तल में स्थित सभी संधियों का ताप बढ़ जाता है। क्योंकि X तल में स्थित सभी संधियां समान एवं स्थिर ताप पर हैं अतः तापान्तर के कारण ताप वि० वा० ब पैदा हो जाता है। इससे परिपथ में तापविद्युत धारा प्रवाहित होने लगती है और गैल्वैनोमीटर विक्षेप देने लगता है।

उदाहरण 6·1. किसी ताप-विद्युत-युग्म के लिए $E=at+bt^2$ जहाँ $t°c$ गर्म संधि का ताप है और ठण्डी संधि 0°C पर है, $a=10\mu v/°c$ और $b=-\frac{1}{40}\mu v/°c$ युग्म के लिए उदासीन ताप और उत्क्रमण ताप की गणना करो।

दिया हुआ $E=at+bt^3$

$$\therefore \quad \frac{dE}{dt}=a+2bt$$

जब $$\frac{dE}{dt}=0, \; t=t_n$$

$\therefore$ उदासीन ताप $(t_n) = \frac{dE}{dt} = 0$

$\therefore \quad a + 2bt_n = 0$

$\therefore \quad t_n = -\frac{a}{2b}$

a और b का मान रखने पर

$$t_n = +\frac{10}{2 \times \frac{1}{40}} = 200°C$$

क्योंकि उत्क्रमणताप पर, $E = 0$

$$\therefore \quad t_i = -\frac{a}{b}$$

$$= +\frac{10}{\frac{1}{40}} = 400°C$$

अतः उदासीनताप और उत्क्रमणताप क्रमशः 200°C और 400°C हैं।

उदाहरण 6·1. एक प्रयोग में विभवमापी के 10 मीटर लम्बे तार का प्रतिरोध 50 ओह्म है तथा इसके श्रेणीक्रम में लगे हुए 1080 ओह्म प्रतिरोध पर डैनियल सैल (वि॰ वा॰ ब॰ = 1·08 वोल्ट) सन्तुलित होता है। जब गर्म-संधि का ताप 100°C है तब तार की 50 से॰ मी॰ लम्बाई पर सन्तुलन होता है। इस ताप पर उत्पन्न वि॰ वा॰ बल के मान की गणना करिये। ताप वि॰ वा॰ ब॰ का रेखिक-परिवर्तन मानते हुए 130°C पर संतुलन बिन्दु ज्ञात करिये। शीत सन्धि 0°C पर मानिये। [राज॰ पू॰ 1972]

डैनियल सैल का वि॰ वा॰ व॰ बल = 1·08 वोल्ट।

इसका संतुलन 1080 ओह्म के प्रतिरोध के विभवान्तर पर होता है। अतः उसमें से प्रवाहित धारा

$$I = \frac{1 \cdot 08}{1080} = \frac{1}{1000} \text{ अम्पीयर}$$

अतः विभवमापी के पूर्ण तार पर विभव पात $= I \times 50$

$$= \frac{1}{1000} \times 50 \text{ वोल्ट}$$

$\therefore$ विभव प्रवणता $k = \frac{50}{1000} \Big/ 1000$ वोल्ट/से० मी०

$= 5 \times 10^{-5}$ वोल्ट/से० मी०

अतः गर्म-संधि 100°C पर होने पर वि० वा० बल

$= k\,l$

$= 5 \times 10^{-5} \times 50 = 25 \times 10^{-4}$ वोल्ट

$= 2 \cdot 5$ मिली वोल्ट, उत्तर

रेखीय परिवर्तन मानने पर 130°C पर ताप वि० वा० बल

$= 2 \cdot 5$ मिली वोल्ट $\times \frac{130}{100}$

$= \frac{2 \cdot 5 \times 130}{100}$ मिली वोल्ट $= \frac{130}{40}$

$= \frac{13}{4}$ मि० वोल्ट

अतः सन्तुलन लम्बाई $= \frac{\text{वि० वा० बल}}{\text{विभव प्रवणता}}$

$= \frac{13 \times 10^{-3}}{4 \times 5 \times 10^{-5}} = \frac{130}{20} \times 10$

$= 65$ से० मी०

[उत्तर : 65 **से० मी०**]

प्रश्न

1. सीवेक प्रभाव से आप क्या समझते हैं ? इस प्रभाव के उत्पन्न होने के कारण को स्पष्ट रूप से समझाइये । सीवेक प्रभाव के कारण उत्पन्न ताप वि० वा० व० का मापन प्रयोगशाला में किस प्रकार किया जाता है ।
2. ताप वि० वा० व०, ताप-वैद्युत-युग्म की संधियों के तापान्तर से किस प्रकार प्रभावित होता है ? समझाइये । उदासीन ताप और व्युत्क्रमण ताप से क्या अभिप्राय है ?

   ताप-वैद्युत-क्षमता की परिभाषा दीजिये ।
3. पेल्टियर प्रभाव क्या है ? इस प्रभाव के उत्पन्न होने के कारण को समझाइये ।

   प्रयोगशाला में इस प्रभाव को कैसे प्रदर्शित किया जा सकता है ?

4. टॉमसन प्रभाव को स्पष्ट रूप से समझाओ।

टामसन प्रभाव का प्रदर्शन प्रयोगशाला में किस प्रकार किया जा सकता है ?

5. निम्न के बारे में संक्षेप में लिखिये—
(a) पेल्टियर और टॉमसन गुणांक
(b) ताप विद्युत प्रभाव के नियम
(c) ताप-वैद्युत-पुंज
(d) पेल्टियर तथा जूल के प्रभाव में अन्तर।

6. सीसे-लोहे (Lead-Iron) के एक ताप-वैद्युतयुग्म में उत्पन्न ताप वि० वा० ब० $E=(1784)t-2{\cdot}4t^2$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। यदि युग्म की एक संधि $\Delta°C$ पर हो और t सेन्टिग्रेड स्केल में ताप को प्रदर्शित करे तो *उदासीन ताप तथा व्युत्क्रमण ताप की गणना कीजिये।*

[उत्तर 371·6°C और 743·3°C]

7. एक 100 से० मी० लम्बे और 4 ओह्म प्रतिरोध वाले विभवमापी तार के श्रेणीक्रम में R ओह्म का एक प्रतिरोध तथा 2 वोल्ट की एक बैटरी है। सहायक परिपथ में एक ताप-वैद्युत-युग्म जुड़ा है। सन्तुलन की स्थिति में, जौकी को तार के मध्य बिन्दु पर दबाने से गैल्वैनोमीटर कोई विक्षेप नही देता है। यदि इस स्थिति में ताप वि० वा० ब० का मान 4 मि० वोल्ट हो *तो R का मान ज्ञात करो। R के मान में 4 ओह्म वृद्धि कर देने के कारण* सन्तुलन बिन्दु की स्थिति में कितना परिवर्तन हो जावेगा ?

[उत्तर 996 ओह्म तथा 0·2 से० मी०]

8. 4 ओह्म प्रतिरोध और 200 से० मी० लम्बे एक विभवमापी तार के सिरों के बीच एक सचायक सेल, प्रतिरोध बक्स और धारा नियन्त्रक श्रेणीक्रम में जोड़े गये हैं। प्रतिरोध बक्स में 100 ओह्म प्रतिरोध रखकर, धारा-नियन्त्रक द्वारा उससे में इतनी धारा प्रवाहित होने देते हैं जिससे उसके सिरो *के बीच उत्पन्न विभवान्तर,* एक 1·018 *वोल्ट वि० वा० ब० वाले मानक* सेल से पूर्ण रूप से सन्तुलित हो जावे। यदि एक ताप-वैद्युत-युग्म में उत्पन्न ताप वि० वा० ब० के लिए, विभवमापी तार पर सन्तुलन बिन्दु 124 से० मी० से 126 से० मी० तक प्राप्त हो तो ताप वि० वा० ब० की गणना करो।

[उत्तर : 2·54 मि० वोल्ट]

9. ताप-वैद्युत-वाहक बल क्या होता है ? विभवमापी की सहायता से ताप-विद्युत-वाहक बल नापने की विधि का, परिपथ चित्र देकर, वर्णन कीजिये। यह एक *ताप-वैद्युत-युग्म के सगमों के तापान्तर के साथ किस प्रकार बदलता है ?*
(देखिये चित्र 6·4) (राजस्थान वि० वि० 1973)

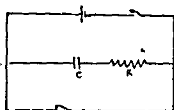
7 प्रत्यावर्त्ती धारा
(ALTERNATING CURRENT)

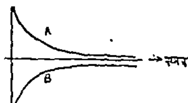
7·1. परिचय : दिष्ट धारा, परिवर्त्ती धारा तथा प्रत्यावर्त्ती धारा

एक सामान्य सेल या बैटरी के परिपथ में प्रतिरोध लगाकर जो विद्युतधारा हम प्रयोगशाला में प्राप्त करते हैं, वह दिष्टधारा (Direct current) कहलाती है। यह एक दिये हुये विद्युत परिपथ में एक निश्चित दिशा में (वि० वा० बल के धन सिरे से ऋण सिरे की ओर,) प्रवाहित होती है तथा इसका मान स्थिर रहता है ।

जब सेल या बैटरी के साथ एक संधारित्र, अथवा संधारित्र और प्रतिरोध दोनों लगा दिये जाते हैं, तब धारा का मान समय के साथ परिवर्तित होता है। प्रारम्भ में कुंजी K_1 दबाकर परिपथ पूर्ण करने पर संधारित्र आवेशित होना प्रारम्भ होता है, तब धारा का मान अधिकतम होता है। (देखिये चित्र 7·1) जैसे-जैसे संधारित्र पर आवेश बढ़ता जाता है, धारा का मान कम होता जाता है और अन्ततः शून्य हो जाता है। (देखिये चित्र 7·1 में वक्र A) इसी प्रकार आवेशित संधारित्र को प्रतिरोध में से निरावेशित करते समय धारा विपरीत दिशा में प्रवाहित होती है और समय के साथ उसका मान कम होता जाता है। वक्र B इस प्रकार की धारा परिवर्त्ती धारा (Varying current) कहलाती है ।

आवेशित करने के लिये k_1 बन्द, k_2 खुली हुई, निरावेशित करने के लिये k_2 बन्द, k_1 खुली हुई।





चित्र 7·1

इनके अतिरिक्त अब हम एक अन्य प्रकार की धारा से परिचित होना चाहते हैं जिसको प्रत्यावर्त्ती धारा कहते हैं इसमें धारा का मान तथा दिशा समय के साथ आवर्त्ती रूप में परिवर्तित होते हैं। प्रत्यावर्त्ती धारा के व्यापक अर्थ में यह परिवर्तन किसी भी आकार के तरंग-रूप (Wave form) के अनुसार हो सकता है, जैसे आरा-दन्ती तरंग (Saw-tooth wave), आयताकार तरंग (Rectangular wave), साइन तरंग (Sine wave) आदि (देखिए चित्र 7·2) इन चित्रों की सहायता से हम देख सकते हैं कि एक निश्चित समय के बाद तरंग के मान की पुनरावृत्ति होती है तथा एक सैकण्ड में कई बार धारा की दिशा में परिवर्तन होता है।

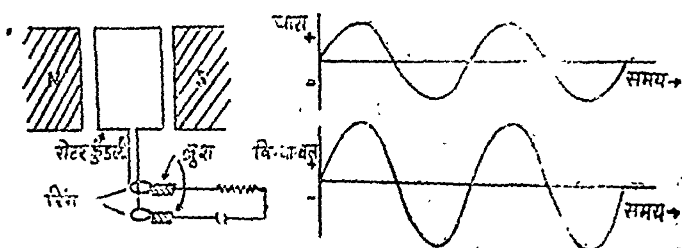
समय→
आरा दंती तरंग
(SAW TOOTH WAVE)
(a)

समय→
आयताकार तरंग
(RECTANGULAR WAVE)
(b)

समय →
(c)
साइन तरंग
(Sine Wave)

चित्र 7·2

सबसे सरल प्रकार की प्रत्यावर्त्ती धारा साइन तरंग (अथवा कोसाइन तरंग) के रूप की होती है तथा हम इसी का अध्ययन करेंगे। ऐसी धारा एक सामान्य प्रत्यावर्ती धारा जनित्र की सहायता से प्राप्त की जा सकती है। चित्र 7·3 (अ) में प्रत्यावर्त्ती धारा जनित्र के सैद्धान्तिक अवयव प्रदर्शित किये गये हैं तथा चित्र 7·3 (ब) में उत्पन्न प्रत्यावर्त्ती धारा तथा उससे सम्बद्ध विद्युत वाहक बल दिखाये गये हैं।



चित्र 7·3

चित्र (ब) में धारा के परिवर्तन वक्र से हम देखते हैं कि धारा का मान शून्य से प्रारम्भ होकर अधिकतम मान i_0 तक पहुँचता है, फिर कम होना प्रारम्भ होता है तथा शून्य होकर धारा विपरीत दिशा में बढ़ने लगती है। विपरीत दिशा में उतने ही अधिकतम मान i_0 तक पहुँच कर, कम होना प्रारम्भ होती है और शून्य हो जाती है। यह एक चक्र (Cycle) कहलाता है। इसके बाद पुनः धारा के बढ़ने का क्रम प्रारम्भ हो जाता है। उपर्युक्त प्रकार की धारा को निम्न समीकरण द्वारा व्यक्त कर सकते हैं :—

$$i = i_0 \sin \omega t \qquad ....(7·1)$$

जबकि i धारा का "क्षणिक मान" और 'ω' कोणीय आवृत्ति (angular frequency) कहलाती है। i_0 धारा का अधिकतम मान है जिसे 'शिखर मान' कहते हैं। स्पष्ट ही जब परिपथ में धारा प्रवाहित हो रही तो हो उसमें धारा के अनुरूप विद्युत वाहक बल विद्यमान होना चाहिये। इस प्रकार की प्रत्यावर्त्ती धारा उत्पन्न करने वाला वि० वा० ब० निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :—

$$v = v_0 \sin \omega t \qquad ....(7·2)$$

यहाँ v_0 वि० वा० ब० का शिखर मान है।

प्रत्यावर्त्ती धारा का आवर्त्तकाल तथा आवृत्ति

प्रत्यावर्त्ती धारा में होने वाले परिवर्तन के एक पूर्ण चक्र में लिया गया समय (चित्र 7·3 ब में a से c तक) उसका आवर्त्तकाल कहलाता है। इसको सामान्यतः T से व्यक्त करते हैं। a से b तक के परिवर्तन को अर्द्ध-चक्र (Half cycle) कहते हैं।

एक सेकण्ड में इस प्रकार के कितने पूर्ण चक्र होंगे ? स्पष्ट ही एक सेकण्ड में धारा के परिवर्तन के पूर्ण चक्रों की संख्या $= 1/T$। इसको आवृत्ति (Frequency)

कहते हैं और माना कि हम इसको f द्वारा प्रदर्शित करते हैं । समीकरण (7·1) की सहायता से भी हम T, ω और आवृत्ति (f) का सम्बन्ध प्राप्त कर सकते हैं ।

समीकरण (7·1) में 't' के स्थान पर $\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)$ रखने पर धारा का वही मान प्राप्त हो जाता है :—

't' समय पर धारा :—

$$i = i_0 \sin \omega t$$

अतः $\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)$ समय पर धारा,

$$i' = i_0 \sin \omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)$$
$$= i_0 \sin (\omega t + 2\pi)$$
$$= i_0 \sin \omega t = i$$

अतः $\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$ समय मे धारा के मान की पुनरावृत्ति होती है ।

यही आवर्त्तकाल 'T' है । इस प्रकार $T = \frac{2\pi}{\omega}$

तथा $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ....(7·3)

जैसा कि ऊपर लिखा जा चुका है,

आवृत्ति $\boxed{f = \frac{1}{T}}$

अतः $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

तथा $\boxed{\omega = 2\pi f}$ ....(7·4)

यह कोणीय आवृत्ति और आवृति का सम्बन्ध है ।

आवृत्ति की इकाई चक्र प्रति सैकण्ड (Cycles/second) होती है जिसे अब हर्टज् (Hertz, संक्षेप Hz) का नाम दिया गया है । घरों में प्राप्त होने वाली प्रत्यावर्ती धारा की आवृत्ति सामान्यतः 50Hz होती है ।

7·2 प्रत्यावर्ती धारा का शिखर मान (Peak value) तथा माध्यमान (Mean value)

प्रत्यावर्ती धारा का अधिकतम मान (Maximum value), धारा का शिखर मान (Peak value) कहलाता है। इसी प्रकार प्रत्यावर्ती विभवान्तर का अधिकतम मान, विभवान्तर का शिखर मान कहलाता है। यदि प्रत्यावर्ती धारा तथा विभवान्तर को निम्न समीकरण द्वारा प्रदर्शित किया जावे

$$i = i_0 \sin \omega t$$

$$v = v_0 \sin \omega t$$

तो i_0=धारा का शिखरमान तथा

v_0=विभवान्तर का शिखर मान होगा।

प्रत्यावर्ती धारा का माध्यमान (Mean value of Alternating current)

आधे चक्र के लिए, प्रत्यावर्ती धारा का माध्यमान, आधे चक्र के लिए (Half cycle) धारा का औसत मान है जबकि धारा केवल एक ही दिशा में प्रवाहित होती है। क्योंकि अगले आधे चक्र के लिए (Next half cycle) धारा विपरीत दिशा में बहती है इसलिए पूर्णचक्र के लिए धारा का माध्यमान शून्य होगा। इसी प्रकार प्रत्यावर्ती विभवान्तर का एक पूर्ण चक्र (complete cycle) के लिए माध्यमान, शून्य होगा।

यदि धारा (t क्षण पर)

$i = i_0 \sin \omega t$ से दी जावे तो, पहले आधे चक्र के लिए धारा का माध्यमान $\frac{2i_0}{\pi}$ तथा अगले आधे चक्र के लिए जब धारा विपरीत दिशा में प्रवाहित होती है, धारा का माध्यमान $-\frac{2i_0}{\pi}$ होगा।

अतः पूर्ण चक्र के लिए धारा का माध्यमान$=\frac{2i_0}{\pi}-\frac{2i_0}{\pi}=0,$

किसी आधे चक्र के लिए, धारा का माध्यमान निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है।

यदि धारा पहले आधे चक्र ($t=0$ से $t=\frac{T}{2}$ समय) के लिए प्रवाहित होती है तो इस आधे चक्र के लिए धारा का माध्यमान

$$i_m = \frac{\int_0^{T/2} i\,dt}{T/2} \qquad \ldots(7\cdot5)$$

$$\text{या} \qquad i_m = \frac{\int_0^{T/2} i_0 \sin \omega t \, dt}{T/2}$$

$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$ रखने पर

$$i_m = \frac{i_0 \int_0^{\pi/\omega} \sin \omega t \, dt.}{\pi/\omega}$$

$$\text{या} \qquad i_m = \frac{\omega i_0}{\pi} \left[- \frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{\pi/\omega}$$

$$\therefore \qquad i_m = \frac{2 i_0}{\pi} \qquad \ldots (7 \cdot 5)$$

अर्थात् आधे चक्र के लिए धारा का माध्यमान

$$= \frac{2}{\pi} \times \text{धारा का शिखर मान}$$

$$i.\ e. \qquad i_m = 0{\cdot}637 \times i_0 \qquad \ldots (7 \cdot 6)$$

इसी प्रकार आधे चक्र के लिए विभवान्तर का माध्यमान $= \frac{2 v_0}{\pi}$

$$i.\ e. \qquad v_m = \frac{2}{\pi} \times \text{विभवान्तर का शिखर मान}$$

$$\therefore \qquad v_m = 0{\cdot}637 \times v_0 \qquad (7 \cdot 7)$$

अगले आधे चक्र के लिए (for next half cycle) धारा और विभवान्तर के माध्यमान की गणना भी इसी प्रकार की जा सकती है। इस आधे चक्र में विभवान्तर का माध्यमान $-\frac{2 v_0}{\pi}$ होगा।

7·3. प्रत्यावर्ती धारा का वर्ग माध्यमूल मान (Root mean square value of A. C)

प्रत्यावर्ती धारा का वर्ग माध्यमूल मान (Root mean square value) एक पूर्ण चक्र के लिए, धारा के वर्ग के औसत मान का वर्गमूल है। इसको प्राय: $i_{r.m.s.}$ या I से प्रदर्शित करते हैं। धारा के वर्ग माध्य मूल मान की गणना निम्न प्रकार की जा सकती है।

माना कि प्रत्यावर्ती धारा का मान (t क्षण पर)

$$i = i_0 \sin \omega t \qquad \text{....(7·7)}$$

अतः एक पूर्ण चक्र के लिए, धारा के वर्ग के औसत मान वर्गमूल

$$i_{r \cdot m \cdot s \cdot} = I = \sqrt{\frac{\int_0^T i^2 dt}{T}} \qquad \text{....(7·8)}$$

i तथा $T = \frac{2\pi}{\omega}$ का मान रखने पर

$$i_{r \cdot m \cdot s \cdot} = \sqrt{\frac{\int_0^{2\pi/\omega} i_0^2 \sin^2 \omega t \; dt}{2\pi/\omega}}$$

क्योंकि $\sin^2 \omega t = 1 - \cos^2 \omega t$

$$= \left[\frac{1 - \cos 2\omega t}{2}\right]$$

$$\therefore \quad i_{r \cdot m \cdot s \cdot} = \sqrt{\frac{i_0^2 \omega}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\omega} [1 - \cos 2\omega t] dt}$$

लेकिन $\int_0^{2\pi/\omega} [1 - \cos 2\omega t] dt = \left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^{2\pi/\omega}$

$$= \frac{2\pi}{\omega}$$

अतः $\quad i_{r \cdot m \cdot s \cdot} = \sqrt{\frac{i_0^2 \omega}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega}}$

$$\therefore \quad I = i_{r \cdot m \cdot s \cdot} = \frac{i_0}{\sqrt{2}} \qquad \text{....(7·9)}$$

अर्थात् $\quad \boxed{I = i_{r \cdot m \cdot s \cdot} = 0 \cdot 707 \times i_0} \qquad \text{....(7·10)}$

प्रत्यावर्ती धारा का वर्ग माध्य मूल मान निम्न प्रकार भी निकाला जा सकता है क्योंकि

$i_{r.m.s.} = I = \sqrt{\text{एक चूर्ण चक्र के लिए } i^2 \text{ का औसत मान}}$

$= i_0 \sqrt{\text{एक पूर्ण चक्र के लिए } \sin^2 \omega t \text{ का औसत मान}}$

[प्रत्यावर्ती धारा $i = i_0 \sin \omega t$]

लेकिन $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t$

एक पूर्ण चक्र के लिए $\cos 2\omega t$ का मान शून्य होता है अतः

$\sin^2 \omega t$ का औसत मान $= \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad I = i_{r.m.s.} = i_0 \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad i_{r.m.s.} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$$

या $\quad I = i_{r.m.s.} = 0{\cdot}707 \times i_0$

प्रत्यावर्ती धारा की भाँति ही प्रत्यावर्ती विभवान्तर (या वि० वा० ब०) का वर्ग माध्य मूल मान (Root mean square value of potential), एक पूर्ण चक्र के लिए, विभवान्तर (या वि० वा० ब०) के वर्ग के औसत मान का वर्गमूल है। इसको प्रायः $v_{r.m.s.}$ या V से प्रदर्शित करते हैं तथा

$$v_{r.m.s.} = V = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \qquad (7{\cdot}11)$$

$$\text{या} \quad \boxed{v_{r.m.s.} = V = 0{\cdot}707 \times v_0} \qquad (7{\cdot}12)$$

प्रत्यावर्ती धारा के वर्ग माध्य मूल मान को निम्न प्रकार भी समझाया जा सकता है।

यदि किसी प्रतिरोध R में प्रत्यावर्ती धारा

$i = i_0 \sin \omega t$ प्रवाहित तो उत्पन्न ऊष्मा की दर

$$\omega = i^2 R \qquad (7{\cdot}13)$$

धारा प्रत्यावर्ती होने के कारण i का मान समय के साथ परिवर्तित होगा अतः एक पूर्ण चक्र के लिए उत्पन्न ऊष्मा की औसत दर

$=$(एक पूर्ण चक्र के लिए i^2 का औसत मान) $\times R$

लेकिन $\sqrt{(\text{एक पूर्ण चक्र के लिए } i^2 \text{ का औसत मान})} = i_{r.m.s.} = I$

अतः प्रति सेकण्ड उत्पन्न ऊष्मा का औसत मान $(i^2_{r.m.s.}) \times R$

$= I^2 R \quad ...(7{\cdot}14)$

अर्थात् यदि $i_{r.m.s.} = I$ सामर्थ्य की दिष्ट धारा प्रतिरोध R में से प्रवाहित हो तो उत्पन्न ऊष्मा की दर I^2R होगी जोकि वास्तविक प्रत्यावर्ती धारा i के द्वारा

प्रवाहित होने से होती है। इसलिए प्रत्यावर्ती धारा के वर्ग माध्य मूल मान का निम्न भौतिक आशय स्पष्ट है :

प्रत्यावर्ती धारा का वर्ग माध्य मूल मान, दिष्ट धारा के उस मान के बराबर है जिसके किसी प्रतिरोध में प्रवाहित होने से प्रति सेकण्ड उतनी ही ऊष्मा उत्पन्न हो जितनी कि उस प्रत्यावर्ती धारा के प्रवाहित होने से होती है। प्रत्यावर्ती धारा के वर्ग माध्य मूल मान को प्रभावी मान (Effective value) आभासी मान (Virtual value) भी कहते हैं।

इसी प्रकार प्रत्यावर्ती विभवान्तर (या वि० वा० व०), दिष्ट विभवान्तर (या वि० वा० व०) के उस मान के बराबर है जिसे आरोपित करने पर किसी प्रतिरोध में प्रति सेकण्ड उतनी ही ऊष्मा उत्पन्न हो जितनी कि उस प्रत्यावर्ती विभवान्तर (या वि० वा० व०) से होती है। प्रत्यावर्ती विभवान्तर (या वि० वा० व०) के वर्ग माध्य मूल मान को प्रभावी भाव (Effective value) तथा आभासी मान (virtual value) भी कहते हैं।

प्रत्यावर्ती धारा के वर्ग माध्य मूल तथा माध्यमान में सम्बन्ध

समीकरण (7·5) द्वारा

$$i_m = \frac{2i_o}{\pi}$$

तथा समीकरण (7·9) द्वारा

$$I = i_{r.m.s.} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{i_{r.m.s.}}{i_m} = \frac{i_o}{\sqrt{2}} \times \frac{\pi}{2i_o}$$

अतः $$i_{r.m.s.} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \times i_m$$

या $I = i_{r.m.s.} = 1{\cdot}11 \times i_m$ ....[7·15(a)]

इसी प्रकार $V = v_{r.m.s.} = 1{\cdot}11 \times v_m$ ....[7·15(b)]

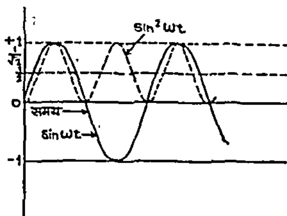
प्रत्यावर्ती धारा के प्रभावीमान या वर्गमाध्यमूल मान तथा शिखर मान (i_o) में सम्बन्ध चित्र (7·4) द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

क्योंकि $I = i_{r.m.s.} = \sqrt{i^2 \text{ का औसत मान}}$

$= i_o\sqrt{\sin^2\omega t \text{ का औसत मान}}$

लेकिन $\sin^2\omega t$ का औसतमान $= \frac{1}{2}$ अतः $\sin^2\omega t$ का वक्र हमेशा धनात्मक

होगा। यह वक्र चित्र में बिन्दुकित (Dotted) रेखा से दिखाया गया है जो कि O तथा 1 के बीच 2f आकृति से परिवर्तित होता है। sin वक्र को पूर्ण रेखा द्वारा दर्शाया गया है।

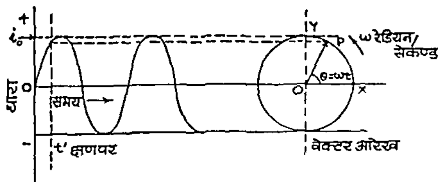


चित्र 7·4

7·4. वेक्टर आरेख (Vector Diagram)

किसी प्रत्यावर्ती धारा का विभवान्तर का वेक्टर द्वारा प्रदर्शन वेक्टर-आरेख (Vector Diagram) कहलाता है। ज्या वक्रीय या साइन वक्रीय (Sinusoidal) प्रत्यावर्ती धारा को वेक्टर-आरेख द्वारा प्रदर्शित करने के लिए (a) धारा का शिखर मान (b) धारा की आकृति तथा (c) कला के सम्बन्ध में ज्ञान होना आवश्यक है।

चित्र (7·5) में साइन वक्रीय प्रत्यावर्ती धारा का लेखाचित्र एवं वेक्टर-आरेख दिया गया है। माना कि प्रत्यावर्ती धारा का मान



चित्र 7·5

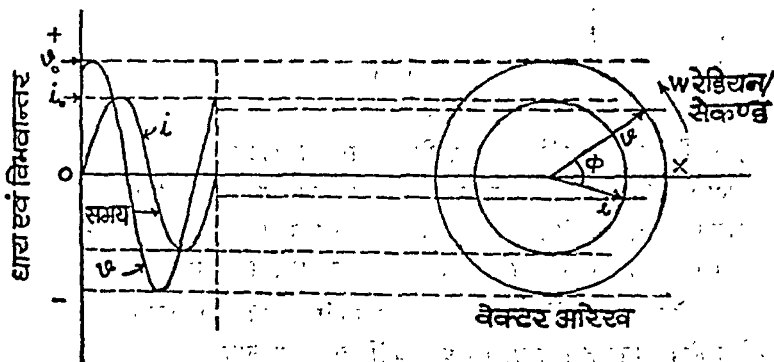
$i = i_0 \sin \omega t$ है

अतः धारा शिखर मान $= i_0$

कोणीय वेग $= \omega = 2\pi f$

एवं धारा की प्रारम्भिक कला = 0 है।

OP एक वेक्टर है जिसका परिमाण (Magnitude) धारा के शिखर मान i_0 के बराबर है [वेक्टर का परिमाण शिखर मान के समानुपाती भी लिया जा सकता है], $t=0$, क्षण पर, जब परिपथ में धारा प्रवाहित होने लगती है, OP अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX (क्योंकि प्रारम्भिक कला का मान शून्य है) से एक समान कोणीय वेग ω से वामावर्त (Anticlock wise) दिशा में गति करने लगता है। t क्षण पर धारा का मान, OP वेक्टर द्वारा प्रदर्शित किया गया है। $\angle POX = \theta = \omega t$, t समय में वेक्टर का कोणीय विस्थापन है। आवश्यकतानुसार OP वेक्टर को दो समकोणिक घटकों (components) में विभाजित (Resolve) किया जा सकता है।



चित्र 7·6

चित्र (7·6) में एक प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में धारा तथा विभवान्तर का लेखाचित्र और वेक्टर-आरेख प्रदर्शित किया गया है। धारा तथा विभवान्तर का मान निम्न समीकरण द्वारा दिया जाता है।

$$i = i_0 \sin \omega t$$

$$v = v_0 \sin(\omega t + \phi)$$

अतः यहाँ i_0 = धारा का शिखर मान

v = विभवान्तर का शिखर मान

ϕ – विभवान्तर तथा धारा में कलान्तर

और ω = दोनों में समान है।

किसी क्षण t पर, धारा एवं विभवान्तर के लिए वेक्टर-आरेख चित्र (7·6) में दिया गया है। i वेक्टर तथा v वेक्टर के बीच का कोण ϕ, उनके बीच कलान्तर को बनाता है तथा v वेक्टर कला में i वेक्टर से आगे है।

7·5 प्रत्यावर्ती धारा एवं विभवान्तर के बीच कलांतर (Phase difference) या कला सम्बन्ध (Phase Relation)

किसी प्रत्यावर्ती धारा परिपथ मे यह आवश्यक नहीं कि धारा एवं विभवांतर दोनो ही समान कला में हों। धारा एवं विभवान्तर का समान कला में होने का अर्थ है कि जिस समय विभवान्तर का मान अधिकतम है, धारा का मान भी अधिकतम हो। प्रत्यावर्ती धारा परिपथ मे प्रायः विभवान्तर तथा धारा में कुछ कलांतर होता है जो परिपथ अवयव (circuit elements) पर निर्भर करता है। यदि परिपथ में केवल प्रतिरोध (Resistance) है तो विभवान्तर और धारा के बीच कोई कलातर नही होता अर्थात् दोनो समान कला मे होते हैं। लेकिन परिपथ में जब प्रेरकत्व (Inductance) या धारिता (Capacitance) होती है, तब विभवान्तर और धारा समान कला में नहीं होने अर्थात् उनमे कलांतर होता है। विभिन्न परिपथों के लिए, धारा एवं विभवान्तर के बीच कलातर की गणना नीचे विस्तृत रूप में दी जा रही है।

(अ) जब परिपथ में केवल प्रतिरोध (Resistance) है :—

माना कि परिपथ मे केवल R प्रतिरोध है। प्रतिरोध R के सिरो के बीच एक प्रत्यावर्ती विभवान्तर v आरोपित किया गया है।

माना कि किसी t क्षण पर: प्रत्यावर्ती विभवान्तर का मान

$$v = v_o \sin \omega t \qquad ....(7·16)$$

यदि t क्षण पर, प्रतिरोध R में से प्रवाहित धारा का मान i है तो, प्रतिरोध के सिरों के बीच विभवान्तर

$$v = i \times R$$

v का मान रखने पर

$$i \times R = v_o \sin \omega t$$

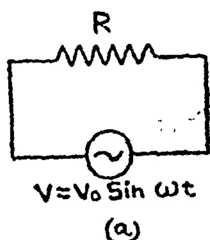
या

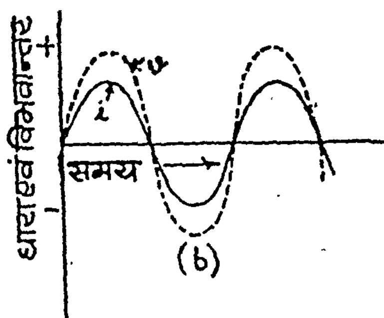
$$i = \frac{v_o}{R} \sin \omega t$$

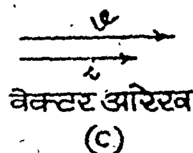
$$\therefore \quad i = i_o \sin \omega t \qquad ....(7·17)$$

जबकि $\frac{v_o}{R} = i_o =$ धारा का शिखर या अधिकतम मान है।

समीकरण (7·16) व (7·17) से स्पष्ट है कि जब परिपथ में केवल प्रतिरोध होता है, प्रत्यावर्ती धारा और विभवान्तर एक ही कला में होते हैं (कलान्तर शून्य होता है)। अतः इस प्रकार के परिपथ में जब विभवान्तर अधिकतम होता है,







चित्र 7·7

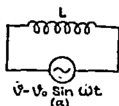
धारा भी अधिकतम होती है और जब विभवान्तर न्यूनतम (शून्य) तब धारा भी न्यूनतम (शून्य) होती है। इस तथ्य का स्पष्टीकरण लेखाचित्र व वेक्टर-आरेख द्वारा चित्र (7·7) में किया गया है।

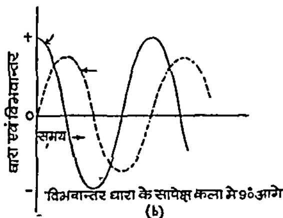
(ब) जब परिपथ में केवल प्रेरकत्व (Inductance) है :—

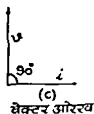
माना कि परिपथ में एक कुण्डली (coil) है जिसका प्रेरकत्व L है। माना कि इस कुण्डली का प्रतिरोध नगण्य है तथा इसके सिरों के बीच प्रत्यावर्ती विभवान्तर v आरोपित किया गया है।

प्रत्यावर्ती विभवान्तर के आरोपित करने के कारण प्रेरकत्व कुण्डली (Inductance coil) में प्रत्यावर्ती धारा प्रवाहित होती है। क्योंकि धारा प्रत्यावर्ती है, अतः धारा में परिवर्तन के कारण, कुण्डली से सम्बन्धित चुम्बकीय फ्लक्स में परिवर्तन

होता है। फलस्वरूप में परिवर्तन होने से, कुण्डली में प्रेरित वि० वा० य० 'e' (Induced e. m. f.) उत्पन्न होता है तथा आरोपित विभवान्तर के विपरीत दिशा में क्रिया करता है। प्रेरित वि० वा० य० कुण्डली में से प्रवाहित धारा को प्रभावित







चित्र 7 8

करता है जिससे धारा एवं विभवान्तर में कलान्तर आ जाता है। विभवान्तर, धारा के सापेक्ष कला में आगे (leading) रहता है तथा दोनों में 90° का कलान्तर होता है जैसा कि चित्र 7·8 में दिखाया गया है।

*[गणितीय विधि—

माना कि t क्षण पर, प्रेरकत्व कुण्डली से प्रवाहित होने वाली धारा का मान

$$I = i_0 \sin \omega t \qquad \text{....(7·11)}$$

यदि e कुण्डली में प्रेरित वि० वा० य० है तो

$$e = -L\frac{di}{dt} \left(\frac{di}{dt} = \text{धारा के मान में परिवर्तन की दर} \right.$$

i का मान रखने पर

$$e = -L\frac{d}{dt}\left(i_0 \sin \omega t \right)$$

या $\quad e = -L\, i_0\, \omega \cos \omega t$

$\therefore \quad e = -\omega L\, i_0 \cos \omega t \qquad \ldots(7{\cdot}19)$

क्योंकि प्रेरकत्व कुण्डली का प्रतिरोध नगण्य है एवं 'e', विभवान्तर v के विपरीत दिशा में क्रिया करता है अतः आरोपित विभवान्तर

$$v = -e$$

या $\quad v = +\omega L.\, i_0 \cos \omega t$

$\therefore \quad v = v_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \qquad \ldots(7{\cdot}20)$

जबकि $\quad v_0 = \omega L\, i_0$

या $\quad i_0 = \frac{v_0}{\omega L}$

तथा $\quad \frac{v_0}{i_0} = \frac{V}{I} = \omega L$

[I = धारा का वर्ग माध्य मूल मान $I_{r.m.s.}$

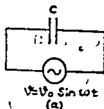
V = विभवान्तर का वर्ग माध्य मूल मान $V_{r.m.s.}$

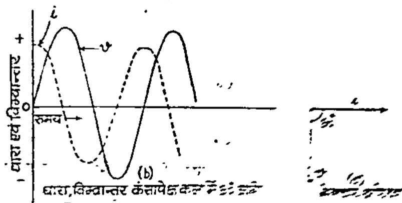
तथा $\frac{V}{I} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{i_0} = \frac{v_0}{i_0}$]

समीकरण (7·18) व (7·20) से स्पष्ट है कि विभवान्तर, धारा के सापेक्ष कला में 90° या $\frac{\pi}{2}$ आगे है या धारा आरोपित विभवान्तर से कला में 90° पीछे है।] अतः जिस समय विभवान्तर अधिकतम होगा, धारा का मान न्यूनतम(शून्य) होगा। परिपथ में प्रवाहित धारा ω तथा L दोनों के प्रतिलोमानुपाती है तथा ωL को 'प्रेरण प्रतिघात' (Inductive Reactance) कहते हैं। प्रेरण प्रतिघात प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में वही कार्य करता है जो साधारण परिपथ में एक प्रतिरोध करता है अतः इसका मात्रक ओह्म में लिया जाता है।

(स) जब परिपथ में केवल धारिता है —

माना कि परिपथ में C धारिता का एक संधारित्र (Condenser) है। संधारित्र के प्लेटों के बीच प्रत्यावर्ती विभवान्तर v आरोपित किया गया है।





चित्र [illegible]

संधारित्र की प्लेटों पर आवेश [illegible] है। अतः जब आरोपित विभवान्तर [illegible] लिए स्थिर रहता है, तब प्लेटों पर आवेश [illegible] इस कारण परिपथ में धारा प्रवाहित [illegible] है। इसी प्रकार जब आरोपित [illegible] पर आवेश में परिवर्तन [illegible] का मान [illegible] होता है। अतः [illegible] तथा आरोपित विभवान्तर [illegible] दी गई [illegible] द्वारा [illegible]

[illegible]

माना कि [illegible]

$v = v_0 \sin \omega t$

यदि संधारित्र की प्लेटों पर आवेश [illegible]

[illegible]

$q = C\,v$

या $$q = Cv_0 \sin \omega t$$

लेकिन धारा $$i = \frac{dq}{dt}$$

$\therefore$ $$i = \frac{d}{dt}(Cv_0 \sin \omega t)$$

या $$i = Cv_0\omega . \cos \omega t$$

अतः धारा $$i = i_0 \cos \omega t = i_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad ....(7 \cdot 22)$$

जबकि $$i_0 = V_0 c\omega \frac{v_0}{\frac{1}{C\omega}}$$

तथा $$\frac{v_0}{i_0} = \frac{V}{I} = \frac{1}{C\omega}$$

समीकरण (7·21) व (7·22) से स्पष्ट है कि धारा, विभवान्तर के सापेक्ष 90° या $\frac{\pi}{2}$ आगे (Leading in Phase) है, अथवा आरोपित विभवान्तर, धारा से कला में 90° या $\frac{\pi}{2}$ पीछे (Lagging in Phase) है।] अतः जिस समय परिपथ में धारा अधिकतम होगी, विभवान्तर न्यूनतम (शून्य) होगा। परिपथ में प्रवाहित [illegible] तथा C दोनों के ही समानुपाती है तथा $\frac{1}{\omega C}$ को 'धारितीय प्रति-

$$i = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \phi) \qquad ....(7{\cdot}23)$$

यहाँ $$i_0 = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$ और

$$\phi = tan^{-1}\left[\frac{\omega L}{R}\right]$$

इसी प्रकार किसी परिपथ मे संधारित्र जिसकी धारिता C तथा एक प्रतिरोध R श्रेणीक्रम मे हैं। यदि एक प्रत्यावर्ती विभवान्तर $v = v_0 \sin \omega t$ इस परिपथ मे आरोपित किया जावे तो t क्षण पर, धारा का मान

$$i = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \sin(\omega t + \phi) \qquad ... (7{\cdot}24a)$$

यहाँ $$i_0 = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$ और

$$\phi = tan^{-1}\left[\frac{1}{R\omega C}\right]$$

इसी प्रकार यदि एक परिपथ में एक C धारिता का संधारित्र, L प्रेरकत्व की कुण्डली और R प्रतिरोध श्रेणीक्रम में हो और प्रत्यावर्ती विभवान्तर $v = v_0 \sin \omega t$ इस परिपथ मे आरोपित किया जावे तो t क्षण पर, धारा का मान

$$i = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + (\omega l - \frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\omega t - \phi) ....(7{\cdot}24b)$$

यहाँ $$i_0 = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

और $$\phi = tan^{-1}\left[\frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R}\right]$$

समीकरण (7·23), (7·24a) व (7·24b) में i_0 के मान की 'ओह्म के नियम' से तुलना करने पर

$\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$ पहले परिपथ में

$\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}$ दूसरे परिपथ में

और $\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ तीसरे परिपथ में प्रभावी प्रतिरोध है।

इस प्रभावी प्रतिरोध को प्रत्यावर्ती धारा परिपथ की प्रतिबाधा (Impedence) कहते हैं।

प्रतिबाधा (Impedence)—प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में लगने वाले प्रभावी प्रतिरोध को प्रतिबाधा कहते हैं तथा इसका मान परिपथ में आरोपित प्रत्यावर्ती विभवान्तर (या वि०वा०व०) की आवृति (Frequency) और परिपथ की प्रकृति (Nature of the circuit) पर निर्भर करता है। प्रतिबाधा को प्राय: Z से प्रदर्शित करते हैं।

अत: L एवं R परिपथ (पहले प्रकार के परिपथ) में प्रतिबाधा

$$Z=\sqrt{R^2+\omega^2L^2} \quad (7\cdot25a)$$

तथा C एव R परिपथ (दूसरे प्रकार के परिपथ) में प्रतिबाधा

$$Z \quad \sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}} \quad ....(7\cdot25b)$$

L, C एवं R परिपथ में प्रतिबाधा

$$\boxed{Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad ....(7\cdot25c)$$

प्रतिबाधा, प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में वही कार्य करता है जो ओह्मिक प्रतिरोध (Ohmic Resistance) दिष्ट धारा परिपथ में करता है।

प्रवेश्यता (Admittance)—किसी प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में, प्रतिबाधा का प्रतिलोम प्रवेश्यता कहलाता है तथा इसे Y द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

अर्थात $\quad$ प्रवेश्यता $=\dfrac{1}{\text{प्रतिबाधा}}$

$$\therefore \quad Y=\frac{1}{Z}$$

अतः L एवं R परिपथ के $Y = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ ...[illegible]

C एवं R परिपथ के, $Y = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$ ...[illegible]

एवं L, C तथा R परिपथ के $Y = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$ ...[illegible]

प्रतिघात (Reactance)—

क्योंकि L एवं R परिपथ के लिए

प्रतिबाधा $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$

$= \sqrt{(\text{प्रतिरोध})^2 + (\text{प्रेरण प्रतिघात})^2}$ ... [illegible]

अर्थात् केवल प्रेरकत्व (Inductance) या केवल धारिता (capacitance) के कारण, प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में प्रभावी प्रतिरोध, प्रतिघात कहलाता है। प्रेरकत्व द्वारा प्रतिघात प्रेरण प्रतिघात (Inductive Reactance) और धारिता द्वारा प्रतिघात धारितीय प्रतिघात (Capacitive Reactance) कहलाता है।

प्रेरण प्रतिघात X_L द्वारा प्रदर्शित किया जाता है जबकि धारितीय प्रतिघात X_C के द्वारा।

अतः प्रेरण प्रतिघात $X_L = \omega L$ और धारितीय प्रतिघात $X_C = \frac{1}{\omega C}$

एक L, C तथा R परिपथ में प्रतिघात (Reactance)

$$= \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = (X_L - X_C)$$

प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में प्रतिघात वही कार्य करता है [illegible] रोध दिष्ट धारा परिपथ में करता है। प्रतिघात का मान [illegible] विभवान्तर (या वि० वा० ब०) की आवृत्ति और परिपथ [illegible] करता है, अर्थात्

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$\therefore \quad X_C = \frac{1}{2\pi f C}$ यदि [illegible] 0 (आवृत्ति शून्य हो) [illegible]

दिष्टधारा हो तो $X_C = \infty$

अतः दिष्ट धारा के लिए धारितीय प्रतिघात अनन्त होता है और जैसे-जैसे आवृति f का मान बढ़ता जाता है वैसे ही धारितीय प्रतिघात का मान कम होता जाता है।

सस्सेप्टेन्स (Susceptance)

किसी प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में, प्रतिघात का प्रतिलोम सस्सेप्टेन्स (Susceptance) कहलाता है। अर्थात

$$(\text{Susceptance}) = \frac{1}{\text{प्रतिघात}}$$

$$\text{अतः संधारित्र का सस्सेप्टेन्स} = \frac{1}{X_C} = \omega C$$

$$\text{प्रेरकत्व का सस्सेप्टेन्स} = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}$$

इसी प्रकार प्रतिरोध का प्रतिलोम चालकता (Conductance) कहलाता है।

7·7. प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में शक्ति (Power in an A. C. Circuit) तथा शक्ति-गुणांक (Power factor)

यदि एक दिष्टधारा परिपथ में प्रवाहित धारा की तीव्रता I तथा विभवान्तर का मान V हो तो t समय में धारा द्वारा किया गया कार्य W का मान

$$W = I \times V \times t \qquad \text{....(7·28)}$$

$$\text{लेकिन शक्ति (Power), } P = \frac{\text{कार्य}}{\text{समय}} = \frac{W}{t}$$

$$\therefore \qquad P = V \times I \qquad \text{....(7·29)}$$

अतः शक्ति, धारा और विभवान्तर के गुणनफल के बराबर होती है। परन्तु प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में शक्ति (Power) का निर्धारण करने में धारा एवं विभवान्तर (या वि० वा० ब०) के बीच कलान्तर ϕ आवश्यक रूप से प्रविष्ट होता है। यदि एक प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में, t क्षण पर धारा तथा विभवान्तर का मान

$$i = i_0 \sin \omega t$$

$$\text{तथा} \qquad v = v_0 \sin(\omega t + \phi) \qquad \text{....(7·30)}$$

हो तो उस क्षण परिपथ में शक्ति

$$= i \times v \qquad \text{....(7·31)}$$

यहाँ ϕ, विभवान्तर और धारा में कलान्तर है। i तथा v का मान समी-करण (7·31) में रखने पर

$$\text{परिपथ में शक्ति} = i_o \sin \omega t \times v_o \sin(\omega t + \phi)$$
$$= i_o v_o \sin \omega t \sin(\omega t + \phi)$$

$$\text{लेकिन } \sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(B-A) - \cos(B+A)]$$

$$\text{अतः } \sin \omega t \sin(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}[\cos\phi - \cos(2\omega t + \phi)]$$

$$\therefore \quad \text{परिपथ में शक्ति} = \frac{i_o v_o}{2}[\cos\phi - \cos(2\omega t + \phi)] \quad ....(7·32)$$

समीकरण (7·32) में, क्योंकि ϕ समय पर निर्भर नहीं करता। अतः $\cos \phi$ नियतांक है। परन्तु $\cos(2\omega t + \phi)$ का मान समय के साथ परिवर्तित होता है। धारा के प्रत्यावर्ती होने के कारण, एक पूर्ण चक्र के लिए

$\cos(2\omega t + \phi)$ का मान

$$\int_O^T \cos(2\omega t + \phi) dt = 0$$ होगा। अतः प्रत्यावर्ती परिपथ में

$$\text{औसत शक्ति } P = \frac{i_o v_o}{2} \cos\phi$$

या
$$P = \frac{i_o}{\sqrt{2}} \times \frac{v_o}{\sqrt{2}} \times \cos\phi$$

$$\therefore \quad \boxed{P = VI \cos \phi} \quad ....(7·33)$$

अर्थात वास्तविक या औसत शक्ति = (आभासी विभवान्तर) × (आभासी धारा) × $\cos \phi$

यदि आभासी विभवान्तर × आभासी धारा को आभासी शक्ति कहा जाय तो

वास्तविक शक्ति = आभासी शक्ति × $\cos \phi$.

$\cos \phi$ को परिपथ का शक्ति गुणाक (Power factor) कहते हैं।

शक्ति-गुणांक (Power factor)

$$\cos \phi = \frac{\text{वास्तविक शक्ति}}{\text{आभासी शक्ति}}$$

यहाँ cos ϕ शक्ति गुणांक कहलाता है और प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में वास्तविक शक्ति तथा आभासी शक्ति के अनुपात के बराबर होता है। शक्ति गुणांक का मान परिपथ की प्रकृति पर निर्भर करता है।

एक ऐसे परिपथ जिसमें केवल प्रतिरोध है, धारा तथा विभवान्तर के बीच कालान्तर ϕ, शून्य होगा, अर्थात्

$$\phi = 0$$

$$\therefore \quad \cos\phi = \cos 0 = 1$$

अतः वास्तविक शक्ति=आभासी शक्ति

$$\therefore \quad P = VI = \frac{1}{2} v_0 i_0 \qquad \text{....(7·35)}$$

एक L तथा R परिपथ में

शक्ति गुणांक $\cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ होता है।

क्योंकि $\tan\phi = \frac{\omega L}{R}$.

7·8. वाट-हीन धारा तथा चोक कुण्डली—

यदि विभवान्तर और धारा में कालान्तर ϕ, $90°$ हो तो

$$\cos\phi = \cos 90° = 0$$

अर्थात वास्तविक शक्ति $P = 0$

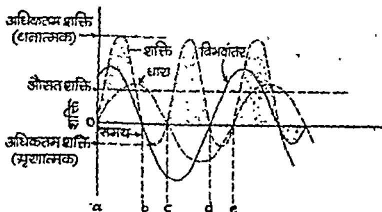
अतः परिपथ में प्रत्यावर्ती धारा प्रवाहित होने से, ऊर्जा का ह्रास (Dessipation of energy) नहीं होगा।

प्रत्यावर्ती धारा जिसके परिपथ में प्रवाहित होने से शक्ति का कोई व्यय या ह्रास न हो, वाटहीन धारा (Wattless current) के नाम से सम्बोधित की जाती है।

इस प्रकार की स्थिति $(\phi = \pi/2)$ केवल उन प्रत्यावर्ती धारा परिपथों में सम्भव हो सकती है जिनमें या तो केवल प्रेरकत्व हो या केवल धारिता हो।

चित्र (7·10) में एक C तथा R प्रत्यावर्ती परिपथ के लिए, धारा, विभवान्तर और शक्ति को प्रदर्शित किया गया है। a से e तक एक पूर्ण चक्र का समय है। a से b तथा c से d के बीच शक्ति धनात्मक है जबकि b से c तथा d से e के बीच ऋणात्मक। अतः जबकि शक्ति धनात्मक है तब ऊर्जा स्रोत के द्वारा परिपथ को दी जाती है और जब शक्ति ऋणात्मक है तब ऊर्जा परिपथ द्वारा स्रोत को दे दी जाती

है। क्योंकि धनात्मक शक्ति का मान ऋणात्मक शक्ति से अधिक है। इसलिए परिपथ में ऊर्जा का व्यय हो रहा है जो कि ऊष्मीय रूप में रूपान्तरित हो जाता है। अतः



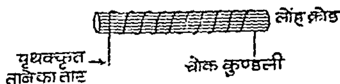
चित्र 7 10

यदि धारा तथा विभवान्तर के बीच कलान्तर 90° हो तो ऊर्जा का ह्रास नहीं होगा।

चोक कुण्डली (Choke coil)

एक दिष्ट धारा परिपथ में धारा की प्रबलता को कम करने के लिए प्रायः प्रतिरोध लगा दिया जाता है। इसी प्रकार प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में भी धारा की प्रबलता को कम करने के लिए प्रतिरोध का प्रबलता को कम करने के लिए प्रतिरोध का प्रयोग किया जा सकता है। परन्तु परिपथ में प्रतिरोध लगाने के कारण प्रति चक्र (per cycle) विद्युत ऊर्जा का ह्रास $\frac{i_0^2 R}{2}$ या I^2R होगा। यहाँ i_0 प्रत्यावर्ती धारा का शिखरमान और I वर्ग माध्य मूल मान है। ऊर्जा का यह ह्रास ऊष्मा के रूप में प्रकट होता है।

अत. प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में धारा की प्रबलता को कम करने के लिए चोक कुण्डली का प्रयोग करते हैं। चोक कुण्डली द्वारा विद्युत ऊर्जा का ह्रास, प्रति-



चित्र 7·11

रोध की अपेक्षा, बहुत कम होता है। चोक-कुण्डली साधारणतया पृथक्कृत

ted) तांबे के तार के कई फेरे लोह-क्रोड पर लपेटकर बनाई जाती है। चोक-कुण्डली का प्रतिरोध बहुत कम होता है।

जब चोक कुण्डली को प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में लगाते हैं। तो वह $\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$ के बराबर प्रतिबाधा उत्पन्न करती है। यहाँ L कुण्डली का प्रेरकत्व तथा $\omega=2\pi f$, जहाँ f प्रत्यावर्ती धारा की आवृति है। नगण्य प्रतिरोध (R) के प्रेरकत्व L को परिपथ में लगाने पर प्रत्यावर्ती धारा और विभवान्तर (वि० वा० व०) के बीच लगभग 90° कलान्तर आ जाता है। इसलिए चोक कुण्डली में ऊर्जा का ह्रास लगभग नगण्य होता है। क्योंकि प्रति चक्र विद्युत ऊर्जा का ह्रास

$$=\frac{i_o}{\sqrt{2}}\times\frac{v_o}{\sqrt{2}}\times\cos\phi$$

एवं $\phi=90^\circ$ अतः $\cos\phi=0$.

और ऊर्जा का ह्रास शून्य है।

वास्तव में चोक कुण्डली का प्रतिरोध R शून्य नहीं होता जिससे ϕ का मान 90° से कम होता है। इसलिए थोड़ी विद्युत ऊर्जा का ह्रास चोक कुण्डली में भी होता है। यह ऊर्जा का ह्रास ऊष्मा के रूप में प्रकट होता है।

उदाहरण 7·1. एक 'विद्युत उत्पादक यन्त्र' (Generator), 130 वोल्ट और 1000 हर्ट्ज की प्रत्यावर्ती धारा पैदा कर रहा है। यदि इसे एक विद्युत परिपथ में जोड़ दिया जावे जिसमें 100 ओह्म का प्रतिरोध, $\frac{150}{\pi}$ mH (मिलीहैनरी) का प्रेरकत्व तथा $\frac{100}{12\pi}$ μf (माइक्रो फेरेड) की धारिता श्रेणीक्रम में है तो ज्ञात कीजिये—

(a) प्रेरण प्रतिघात (Inductive Reactance)
(b) धारितीय प्रतिघात (Capacitive Reactance)
(c) प्रतिबाधा (Impedence)
(d) परिपथ में धारा का मान (Current in the circuit)
(e) परिपथ में प्रत्येक अवयव के विभवान्तर का मान (Potential difference across each element of the circuit)

(a) प्रेरण प्रतिघात $=X_L=\omega L$

क्योंकि $\omega=2\pi f$

$\therefore$ $X_L=2\pi fL$

दिया हुआ $f = 1000$ हर्ट्ज़

तथा $L = \frac{150}{\pi}$ मिली हेनरी $= \frac{150}{\pi} \times 10^{-3}$ हेनरी

$\therefore \quad X_L = 2\pi \times 1000 \times \frac{150}{\pi} \times 10^{-3}$

$= 300$ ओह्म

(*b*) धारितीय प्रतिघात $= X_C = \frac{1}{\omega C}$

या $X_C = \frac{1}{2\pi f C}$ लेकिन $C = \frac{100}{12\pi}$ माइक्रो फेरेड $= \frac{100}{12\pi} \times 10^{-6}$ फ़ेरेड

$\therefore \quad X_C = \frac{1}{2\pi \times 1000 \times (100/12\pi) \times 10^{-6}}$

$= 60$ ओह्म

(*c*) प्रतिघात $= \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ $(R = 100$ ओह्म)

$\therefore \quad Z = \sqrt{(100)^2 + (300-60)^2}$

या $\quad Z = \sqrt{100 \times 100 + 240 \times 240}$

या $\quad Z = \sqrt{10000 + 57600}$

या $\quad Z = \sqrt{67600}$

$\therefore \quad Z = 260$ ओह्म

(*d*) परिपथ में धारा का मान

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{130}{260}$$

$\therefore \quad I = 0{\cdot}5$ एम्पियर

(*e*) प्रतिरोध के सिरों के बीच विभवान्तर

$V_R = IR$

या $\quad V_R = 0{\cdot}5 \times 100$

$\therefore \quad V_R = 50$ वोल्ट

इसी प्रकार $\quad V_C = I \times C$

या $\quad V_C = 0{\cdot}5 \times 60$

$\therefore \quad V_C = 30$ वोल्ट

तथा $\quad V_L = I \times L$

या $V_L = 0 \cdot 5 \times 300$

$\therefore$ $V_L = 150$ वोल्ट

उदाहरण 7·2. यदि एक 'जनित्र' (Generator) से 230 वोल्ट की प्रत्यावर्ती धारा प्राप्त हो रही है तो धनात्मक आधे चक्र में औसत वि० वा० व० की गणना करो।

प्रश्न में 230 वोल्ट प्रत्यावर्ती वि० वा० व० का आभासी या वर्ग-माध्य-मूल मान है।

अतः $E_{r.m.s.} = V_{r.m.s.} = 230$ वोल्ट

धनात्मक आधे चक्र के लिए

$$\text{औसत वि० वा० व० } E_m = V_m = \frac{2V_o}{\pi} \qquad ....(1)$$

लेकिन $$V_{r.m.s.} = \frac{V_o}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad V_o = 1 \cdot 414 \times 230 = 325 \cdot 22 \text{ वोल्ट} \qquad ....(2)$$

V_o का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\text{औसत वि० वा० व०} = E_m = V_m = \frac{2 \times 325 \cdot 22}{3 \cdot 14}$$

$$= 207 \cdot 1 \text{ वोल्ट}$$

अतः आधे (धनात्मक) चक्र के लिए औसत वि० वा० व० 207·1 वोल्ट है।

उदाहरण 7·3. 5 हेनरी तथा 200 ओह्म की चोक कुण्डली पर 10 वोल्ट तथा 100 हर्ट्ज का एक प्रत्यावर्ती विभवान्तर आरोपित किया जाता है। शक्ति गुणांक तथा शक्ति के ह्रास (Power loss) ज्ञात करो।

$$\text{शक्ति गुणांक, } \cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L{}^2}}$$

दिया हुआ $R = 200$ ओह्म

$\omega = 2\pi f = 2 \times 3 \cdot 14 \times 100 = 628$

$L = 5$ हेनरी

$\therefore$ $X_L = \omega L = 628 \times 5$

$= 3140$ ओह्म

$$\cos\phi = \frac{200}{\sqrt{(200)^2 + (3140)^2}}$$

या $\cos\phi = 0.064$ (लगभग)

$\therefore$ शक्ति का ह्रास $= I^2R$

परिपथ में धारा $I = \frac{\text{विभवान्तर}}{\text{प्रतिबाधा}} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$

$$\therefore \quad I = \frac{10}{\sqrt{(20)^2 + (3140)^2}}$$

$= 0.0031$ एम्पियर

अत. शक्ति का ह्रास $= I^2R$

या $= (0.0031)^2 \times (200)^2$

$\therefore$ $I^2R = 0.0019$ वाट

अतः शक्ति गुणांक का मान 0·064 तथा शक्ति का ह्रास 0·0019 वाट है।

उदाहरण 7·4. एक विद्युत बल्ब जो 100 वोल्ट तथा 10 एम्पियर की दिष्ट धारा पर प्रकाशित होता है, 220 वोल्ट, 50 चक्र के प्रत्यावर्ती धारा स्रोत से जोड़ा गया है। प्रयुक्त चोक कुण्डली के प्रेरकत्व का मान निकालो। यदि बल्ब को 220 वोल्ट 10 एम्पियर की दिष्ट धारा से प्रकाशित करना पड़े तो श्रेणीक्रम में कितना प्रतिरोध लगाना होगा तथा कितनी शक्ति का ह्रास होगा।

बल्ब 100 वोल्ट तथा 10 एम्पियर की धारा पर प्रकाशित होता है।

अतः बल्ब का प्रतिरोध $R = \frac{100}{10} = 10$ ओह्म

माना कि परिपथ में लगाई गई चोक कुण्डली के प्रेरकत्व का मान L हैनरी है। अतः

परिपथ में धारा $I' = \frac{\text{वि० वा० ब०}}{\text{प्रतिबाधा}}$

क्योंकि प्रत्यावर्ती वि० वा० ब० या विभवान्तर

$= 220$ वोल्ट

$\omega = 2\pi f = 2 \times \pi \times 50$

धारा $= 10$ एम्पियर

$$\therefore \quad 10 = \frac{220}{\sqrt{(10)^2 + (100\pi L)^2}}$$

या $\sqrt{(10)^2 + (100\pi L)^2} = 22$

या $100 + 10000\pi^2 L^2 = 22 \times 22$

या $10000(3{\cdot}14)^2 L^2 = 484 - 100$

या $$L^2 = \frac{384}{10000 \times (3{\cdot}14)^2}$$

या $$L = \sqrt{\frac{384}{314}}$$

$\therefore$ $L = 0{\cdot}062$ हैनरी

यदि बल्ब को 220 वोल्ट तथा 10 एम्पियर की दिष्ट धारा से प्रकाशित करना पड़े तो परिपथ का कुल प्रतिरोध $R' = \frac{220}{10}$

$= 22$ ओह्म

क्योंकि बल्ब का प्रतिरोध $R = 10$ ओह्म

$\therefore$ श्रेणीक्रम में लगाया जाने वाला प्रतिरोध $= R' - R$

$= 22 - 10 = 12$ ओह्म

प्रतिरोध $(R' - R)$ में शक्ति का ह्रास $= I^2(R' - R)$

$= (10)^2 \times 12$

$\therefore$ शक्ति का ह्रास $= 1200$ वाट

प्रश्न

1. प्रत्यावर्ती धारा किसे कहते हैं ? दिष्टधारा से यह किस प्रकार भिन्न है ? प्रत्यावर्ती धारा के (1) आयाम (2) आवर्तकाल तथा (3) आवृत्ति से आप क्या समझते हैं ?
2. प्रत्यावर्ती धारा के माध्यमान तथा वर्ग-माध्य-मूल मान को समझाते हुए उनका मान निकालिए। इनमें सम्बन्ध भी स्थापित करो।
3. प्रत्यावर्ती धारा की अग्रता (Lead) और पश्चता (Lag) से क्या अभिप्राय है ? एक परिपथ में, जिसमें केवल प्रतिरोध है प्रवाहित प्रत्यावर्ती धारा व विभवान्तर में क्या कलान्तर होगा ? स्पष्ट रूप से समझाइये।
4. एक प्रत्यावर्ती धारा परिपथ जिसमें (*a*) केवल प्रेरकत्व है (*b*) केवल धारिता है, धारा व विभवान्तर के बीच कलान्तर की गणना करो।
   प्रेरकत्व, प्रतिघात और धारितीय प्रतिघात का क्या अर्थ है ?
5. 50 चक्र (cycles) तथा 180 वोल्ट की प्रत्यावर्ती धारा सप्लाई से 0·2 हैनरी प्रेरकत्व तथा 100 ओह्म प्रतिरोध की एक कुण्डली जोड़ी गई है। परिपथ में बहने वाली धारा का वर्ग-माध्य-मूल मान ज्ञात करो।

[उत्तर 0·0129 एम्पियर]

6. एक कुण्डली का प्रेरकत्व 0 10 हैनरी और प्रतिरोध 12 ओह्म है । इसे 220 वोल्ट, 50 चक्र की लाइन में जोड़ा जाता है । (*a*) कुण्डली का प्रतिघात (*b*) कुण्डली की प्रतिबाधा तथा (*c*) परिपथ में जुड़े वाटमीटर का पाठ्यांक ज्ञात करो । (राज० 1967)

[उत्तर (*a*) 31·4 ओह्म (*b*) 33·6 ओह्म (*c*) 514 वाट]

7. एक संधारित्र जिसकी धारिता 1200μμ f है, 600 कि० हर्ट्ज आवृति वाली प्रत्यावर्ती धारा में जुड़ा है (*a*) संधारित्र की धारितीय प्रतिघात की गणना करो । (*b*) यदि परिपथ में धारा का मान 1·50 मि० एम्पियर हो तो संधारित्र की प्लेटों के बीच विभवान्तर क्या होगा ? (*c*) यदि प्रत्यावर्ती धारा की आकृति दुगनी कर दी जावे तो धारा के उसी मान के लिए संधारित्र की प्लेटों के बीच विभवान्तर क्या होगा ?

[उत्तर (*a*) 221 ओह्म, (*b*) 332 मि० वोल्ट (*c*) 166 मि० वोल्ट]

8. प्रतिबाधा, प्रतिघात और प्रवेश्यता से क्या अभिप्राय है ? एक संधारित्र जिसके श्रेणीक्रम में एक 30 ओह्म का प्रतिरोध है, 200 वोल्ट की प्रत्यावर्ती धारा लाइन से जुड़ा है । यदि संधारित्र का प्रतिघात 40 ओह्म है तो धारा तथा विभवान्तर के बीच कलान्तर निकालिये । (राज० 1968)

[उत्तर $\tan^{-1}\frac{4}{3}$]

9. $\frac{500}{\pi}$ मि० हैनरी प्रेरकत्व की एक कुण्डली, $\frac{500}{\pi}$ माइक्रो फैरेड धारिता का एक संधारित्र और 40 ओह्म का एक प्रतिरोध श्रेणीक्रम में जुड़े हैं। यदि परिपथ में 60 हर्ट्ज और 120 वोल्ट का एक प्रत्यावर्ती धारा स्रोत जोड़ दिया जावे तो (*a*) परिपथ की प्रतिबाधा (*b*) परिपथ में धारा का मान ज्ञात करो ।

[उत्तर (*a*) 59 ओह्म (*b*) 2·03 एम्पियर]

10. प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में व्यय होने वाली वास्तविक औसत शक्ति के लिए सूत्र की स्थापना करो ।

शक्ति गुणांक व वाट-हीन धारा से क्या अभिप्राय है ? किस परिपथ में धारा पूर्णतः वाट हीन होगी ?

11. प्रेरकत्व L तथा R प्रतिरोध की एक कुण्डली के सिरों के बीच एक प्रत्यावर्ती वि० वा० ब० $E=E_0 \sin\omega t$ आरोपित किया गया है । सिद्ध करो कि शक्ति व्यय की औसत दर $\frac{E_0^2 R}{2(R^2+\omega^2L^2)}$ है । (राज० 1964)

12. एक प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में 120 वोल्ट पर 2·50 एम्पियर की धारा प्रवाहित हो रही है। यदि परिपथ का प्रतिरोध 12 ओह्म हो तो (*a*) परिपथ की प्रतिबाधा (*b*) शक्ति गुणांक और (*c*) क्षय होने वाली शक्ति की गणना कीजिये ?

[उत्तर (*a*) 48 ओह्म (*b*) 0·25 (*c*) 75·0 वाट]

13. एक प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में 220 वोल्ट, 60 हर्ट्ज आवृति का एक स्रोत लगा है। यदि परिपथ में प्रवाहित धारा एवं शक्ति क्रमशः 0·4 एम्पियर और 44·0 वाट है तो (*a*) शक्ति गुणांक (*b*) परिपथ की प्रतिबाधा और (*c*) परिपथ का प्रतिरोध ज्ञात करो।

[उत्तर (*a*) 0·5 (*b*) 550 ओह्म (*c*) 275 ओह्म]

14. स्पष्ट रूप से समझाइये।

(*a*) आभासी धारा

(*b*) आभासी विभवान्तर

(*c*) प्रतिबाधा व प्रवेश्यता और

(*d*) शक्ति गुणांक

एक परिपथ में 0·1μF का संधारित्र और 10 ओह्म का प्रतिरोध श्रेणी क्रम में जुड़ा है। यदि परिपथ में 100 वोल्ट तथा 50 हर्ट्ज का एक प्रत्यावर्ती धारा स्रोत लगा दिया जावे तो धारा का मान निकालो।

15. 'चोक कुण्डली' से आप क्या समझते हैं ?

एक बल्ब 10 एम्पियर, 70 वोल्ट पर प्रकाशित होता है। यदि इसको 230 और 50 हर्ट्ज वाली प्रत्यावर्ती धारा सप्लाई से प्रकाशित करना हो तो परिपथ में लगाये जाने वाले प्रेरकत्व के मान की गणना करो।

[उत्तर 0·0697 हैनरी]

16. एक 60 वोल्ट, 10 वाट बल्ब को 60 हर्ट्ज, 100 वोल्ट की प्रत्यावर्ती धारा सप्लाई से प्रकाशित किया जाता है। परिपथ के लिए उपयुक्त चोक-कुण्डली के प्रेरकत्व की गणना करो।

यही कार्य कराने के लिए परिपथ में कितना शुद्ध प्रतिरोध लगाना पड़ेगा ? परिपथ में शुद्ध प्रतिरोध लगाने से क्या हानि है ? (राज० 1960)

[उत्तर 1·27 हैनरी; 240 ओह्म]

8

परमाणु की संरचना
(STRUCTURE OF ATOM)

8·1. बोहर के अभिगृहीत

परमाणु की संरचना के सम्बन्ध मे सही धारणा बनाने का श्रेय वैज्ञानिक रदरफोर्ड को है। उन्होने अपने प्रसिद्ध प्रयोगों, आल्फा-कणों के धातुओं की पतली चादर पर आपतन होने पर प्रकीर्णन होने के परिणामों के आधार पर परमाणु के नाभिकीय मॉडल की धारणा बनाई। इसके अनुसार परमाणु के केन्द्र मे अत्यन्त लघु आकार मे उसका सम्पूर्ण धन आवेश (अर्थात् प्रोटोन-कण) तथ लगभग सम्पूर्ण संहति केन्द्रित होती है तथा इलेक्ट्रॉन उससे काफी दूर वृत्ताकार कक्षाओ (Orbits) मे चक्कर लगाते हैं। नाभिक में ही आवेश विहीन कण न्यूट्रान होते हैं।

रदरफोर्ड के मॉडल मे परमॉणु की स्थिरता को नहीं समझा जा सकता और न ही परमाणुओं द्वारा उत्सर्जित स्पैक्ट्रमी रेखाओं का उद्गम समझा जा सकता है। परम्परागत धारणा के अनुसार इस प्रकार वृत्त मे गति करता हुआ इलेक्ट्रॉन सतत वि० चु० तरगें उत्सर्जित करेगा और उसकी कक्षा छोटी होती जायगी तथा शीघ्र ही वह नाभिक में आत्मसात हो जायगा। नील्स बोहर ने परमाणविक घटनाओं की व्याख्या के लिए क्वाण्टम-सिद्धान्त को ही उपयुक्त समझा तथा परमाणु की संरचना समझने के लिए निम्न अभिगृहीत प्रस्तावित किये—

1. एक परमाणु कुछ निश्चित स्थिर अवस्थाओ मे रह सकता है जिनकी

निश्चित उर्जा होती है। जब परमाणु इनमें से किसी अवस्था में होता है, तब उर्जा उत्सर्जित नहीं करता।

2. परमाणु द्वारा विकिरण का उत्सर्जन अथवा अवशोषण दो स्थिर अवस्थाओं के बीच संक्रमण (transition) से सम्बन्धित होता है। यह उर्जा के एक क्वाण्टम के रूप में होता है जो दोनों अवस्थाओं के उर्जा के अन्तर के बराबर होता है। अर्थात्

$$h\nu = E_A - E_B \quad \text{....(8·1)}$$

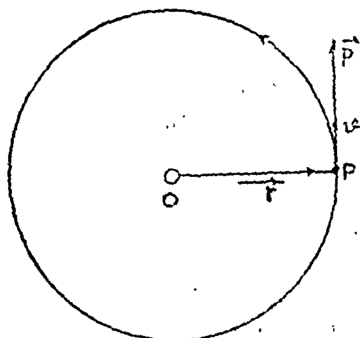
यहाँ h प्लांक-नियतांक है, ν विकिरण की आवृत्ति है तथा E_A और E_B प्रारम्भिक तथा अन्तिम अवस्थाओं की उर्जा है।

इस प्रकार परमाणु की अवस्थाओं का क्वाण्टम-करण हो जाने के कारण इलेक्ट्रॉन के चक्कर लगाने पर भी सतत विकिरण का उत्सर्जन नहीं हो सकता तथा परमाणु में इलेक्ट्रॉन स्थायी तथा कुछ विशिष्ट कक्षाओं में ही चक्कर लगा सकता है।

8·2. हाइड्रोजन के स्पेक्ट्रम की व्याख्या

हाइड्रोजन के नाभिक में एक प्रोटोन होता है। एक बाहरी इलेक्ट्रॉन की संहति की तुलना में वह काफी भारी होता है। अतः हम नाभिक को स्थिर तथा इलेक्ट्रॉन को उसके चारों ओर वृत्त में गति करता हुआ मान सकते हैं। नाभिक के धन आवेश और इलेक्ट्रॉन के ऋण आवेश के बीच आकर्षण बल (नाभिक की ओर) उसकी वृत्तीय गति के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल प्रस्तुत करता है।

[चित्र में इलेक्ट्रॉन को r अर्द्धव्यास की कक्षा में चक्कर लगाते हुए दिखाया गया है। नाभिक केन्द्र O पर स्थित है और P बिन्दु इलेक्ट्रॉन की क्षणिक स्थिति को व्यक्त करता है।]



चित्र 8·1

$$\text{अतः} -\frac{m_e v^2}{r}\hat{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_e.e}{r^2}\hat{r} \quad \text{....(8·2)}$$

यहाँ $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\times10^9$ न्यूटन मीटर^2/कूलम्ब^2 के बराबर है,

(Ze) नाभिक पर आवेश है तथा e इलेक्ट्रॉन का आवेश है

$$\text{अर्थात्} \quad \frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} \quad \text{....(8·3)}$$

समीकरण (8·3) के द्वारा इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा निम्न होगी

$$T=\frac{1}{2}m_e v^2=\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad ....(8\cdot4)$$

नाभिक पर आवेश Ze के कारण इलेक्ट्रॉन की स्थिति पर

$$\text{विभव}=\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r}$$

अतः उसकी विद्युतीय स्थितिज ऊर्जा,

$$U=\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r}\ (-e)=\frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad ....(8\cdot5)$$

अतः इलेक्ट्रॉन की कुल ऊर्जा,

$$E=T+U=-\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad ..(8\ 6)$$

विशेष—कुल ऊर्जा ऋणात्मक आती है।

कक्षाओं के अर्द्धव्यास

प्रथम अभिगृहीत के अनुसार किसी स्थायी अवस्था की कुल ऊर्जा E के कुछ विशिष्ट मान ही हो सकते हैं जो कि क्वाण्टम-कृत (quantized) होते हैं। बोहर ने यह क्वाण्टमकरण करने के लिए कक्षाओं में चक्कर लगाते हुए इलेक्ट्रॉन के कोणीय संवेग को $\frac{h}{2\pi}$ का पूर्ण गुणक माना।

इलेक्ट्रॉन का कोणीय संवेग,

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$$

जब कि $\vec{p}$ इलेक्ट्रॉन का संवेग है, $\vec{p}=m\vec{v}$

जैसा कि चित्र 8·1 से स्पष्ट है $\vec{r}$ और $\vec{p}$ सदैव लम्बवत होंगे, अतः कोणीय संवेग का मान $=rm_e v$ इसका मान उपर्युक्त क्वाण्टम $\frac{h}{2\pi}$ का पूर्ण गुणक ही हो सकता है, अतः $rm_e v=\frac{nh}{2\pi}$

जब कि n शून्य के अतिरिक्त कोई भी पूर्णांक हो सकता है। अर्थात् प्रथम कक्षा के लिए $n=1$, द्वितीय के लिए $n=2$, आदि। क्रमांक n की कक्षा के लिए अर्द्धव्यास r_n से तथा इलेक्ट्रॉन वेग v_n से व्यक्त करने पर सूत्र 8·3 के अनुसार

$$\frac{m_0 v_n^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{4\pi \in_0 r_n^2}$$

तथा सूत्र (8·7) से, $m_0 v_n r_n = \frac{nh}{2\pi}$

उपर्युक्त समीकरणों में v_n का विलोपन (elimination) करने पर,

$$r_n = \frac{\in_0 h^2 n^2}{m_0 \pi Z e^2} \quad \text{....(8·8)}$$

इस प्रकार स्थायी कक्षाओं के अर्द्धव्यास धन पूर्णाङ्कों 1, 2 3, आदि के वर्ग के समानुपाती होते हैं।

कुल उर्जा के सूत्र (8·6) में r_n का उपर्युक्त मान प्रयुक्त करने पर n क्रमांक की कक्षा की कुल उर्जा

$$E_n = -\frac{Ze^2}{8\pi \in_0 r_n}, \text{ अर्थात्}$$

$$\boxed{E_n = -\frac{m_0 Z^2 e^4}{8 \in_0^2 h^2 n^2}} \quad \text{....(8·9)}$$

इस प्रकार स्थायी कक्षाओं में इलेक्ट्रॉन की कुल उर्जा कक्षा के क्रमांक n के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होती है तथा ऋणात्मक होती है। अतः उर्जा का मान n के बढ़ने पर कम होता जाता है परन्तु उर्जा अधिक होती जाती है। प्रथम कक्षा, $n=1$, की उर्जा सबसे कम होती है।

उत्सर्जित विकिरण की आवृत्ति तथा तरंग संख्या

हाइड्रोजन में एक ही इलेक्ट्रॉन होता है अतः वह सामान्यतः प्रथम कक्षा ($n=1$) में रहता है। यह निम्नतम अवस्था (Ground state) कहलाती है। किसी भी प्रकार, परमाणु को उत्तेजित किये जाने पर इलेक्ट्रॉन किसी उच्च उर्जा की अवस्था में जा सकता है और उच्च उर्जा की कक्षा में से जब इलेक्ट्रॉन का निम्न उर्जा की कक्षा में स्थानान्तरण होता है तो दोनों की उर्जा के अन्तर के

बराबर उर्जा का फोटोन उत्सर्जित होता है। यदि इलेक्ट्रॉन उच्च कक्षा n_1 से निम्न कक्षा n_2 में उतरता है तो ν आवृत्ति (अर्थात उर्जा $h\nu$) का फोटोन उत्सर्जित होगा :

$$h\nu = -\frac{m_e Z^2 e^4}{8 \epsilon_o^2 h^2}\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)$$

अर्थात
$$\boxed{\nu = \frac{m_e Z^2 e^4}{8 \epsilon_o^2 h^3}\left(\frac{1}{n_2^2}-\frac{1}{n_1^2}\right)} \quad \text{....(8·10)}$$

आवृत्ति की बजाय अधिकांशतः तरंग संख्या बताई जाती है। यह मी० कि० से० प्रणाली में, एक मीटर में तरंगों की संख्या के बराबर है। यदि तरंग दैर्घ्य λ हो,

तो तरंग संख्या $= \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{c/\nu} = \frac{\nu}{c}$

इसको सामान्यतः $\bar{\nu}$ से व्यक्त किया जाता है अतः

$$\bar{\nu} = \frac{m_e Z^2 e^4}{8 \epsilon_o^2 h^3 c}\left(\frac{1}{n_2^2}-\frac{1}{n_1^2}\right) \quad \text{....(8·11)}$$

उपर्युक्त समीकरणो मे हमने नाभिक पर आवेश Ze के बराबर माना है, अतः ये समीकरण ऐसे परमाणुओं के लिए मान्य (valid) जिनमें एक बाहरी इलेक्ट्रॉन हो तथा नाभिक मे Z प्रोटोन हों; उदाहरण के लिए आयनित हीलियम (जिसमें से एक बाहरी इलेक्ट्रॉन परमाणु में से बाहर निकाल दिया गया हो) के लिए उपर्युक्त समीकरण (Z = 2) रखने पर लागू होंगे।

हाइड्रोजन में नाभिक पर आवेश 'e' होता है (Z = 1) अतः सूत्र (8·8) (8·9), (8·10) और (8·11) निम्न प्रकार होंगे—

$$r_n = \frac{\epsilon_o h^2}{\pi m_e e^2} n^2 \quad \text{... (8·12)}$$

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8 \epsilon_o^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{... (8·13)}$$

$$\nu = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_o^2 h^3}\left(\frac{1}{n_2^2}-\frac{1}{n_1^2}\right) \quad \text{....(8·14)}$$

तथा
$$\bar{\nu} = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_o^2 h^3 C}\left(\frac{1}{n_2^2}-\frac{1}{n_1^2}\right) \quad \text{... (8·15)}$$

बोह्र के हाइड्रोजन स्पैक्ट्रम का सैद्धान्तिक विश्लेषण किये जाने के पूर्व ही वैज्ञानिक रीड्बर्ग (Rydberg) द्वारा उसका प्रायोगिक अध्ययन किया गया था। उन्होंने कई

रेखाओं की तरंग संख्या ज्ञात कर उनके लिए निम्न आनुभविक (empirical) सूत्र बतलाया था :—

$$\bar{\nu} = R_H \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad ....(8 \cdot 16)$$

जबकि R_H एक नियतांक था जिसे 'रीड्बर्ग-नियतांक' कहा गया। उनके स्पैक्ट्रमी-मापन के आधार पर इसका मान निम्न निकाला गया :—

$$R_H = 10967 \cdot 576 \; C_m^{-1} = 10967757 \cdot 6 \; m^{-1}$$

बोह्र सिद्धान्त के अनुसार भी तरंग संख्या के लिए (8·16) के समरूप ही सूत्र (8·15) प्राप्त हुआ। दोनों सूत्रों की तुलना करने पर हाइड्रोजन के लिये रीड्बर्ग नियतांक का मान आता है :—

$$R_H = \frac{me\, e^4}{8 \in_0^2 h^3 c} \quad ....(8 \cdot 17)$$

हाइड्रोजन परमाणु के उत्तेजित किए जाने पर कई तरंग दैर्घ्य की रेखायें उत्सर्जित होंगी जिनको पांच श्रेणियों में वर्गीकृत किया गया है। द्वितीय, तृतीय, चतुर्थ आदि कक्षाओं से प्रथम कक्षा पर, तृतीय, चतुर्थ, पंचम आदि से द्वितीय कक्षा पर, इस प्रकार संक्रमण होता है कि किसी एक कक्षा पर संक्रमण होने से बनी रेखायें एक श्रेणी बनाती हैं।

सारणी 8·1 में इन रेखीय-श्रेणियों (Line series) की सम्बन्धित सूचनायें दी गई हैं।

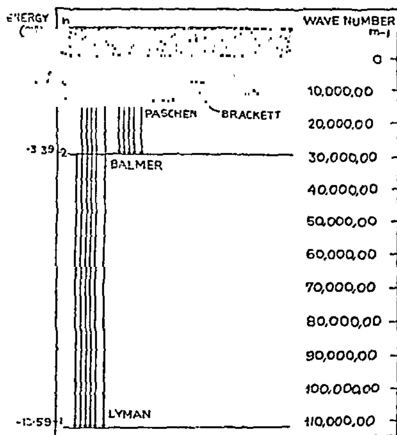
सारणी 8·1

श्रेणी	स्पैक्ट्रमी प्रदेश	कक्षा जिस पर संक्रमण होता है	तरंग संख्या के लिए सूत्र
लाइमन	पराबैंगनी	प्रथम ($n_2 = 1$)	$\bar{\nu} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$
बामर	दृश्य-तथा निकट-पराबैंगनी	द्वितीय ($n_2 = 2$)	$\bar{\nu} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$
पाश्चन	अवरक्त	तृतीय ($n_2 = 3$)	$\bar{\nu} = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$
ब्रैकट	अवरक्त	चतुर्थ ($n_2 = 4$)	$\bar{\nu} = R_H \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$
फुण्ड	अवरक्त	पंचम ($n_2 = 5$)	$\bar{\nu} = R_H \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$

स्पष्ट ही लाइमन श्रेणी मे $n_2=1$ और $n_1=2, 3, 4, 5$ आदि बामर श्रेणी में $n_2=2$, और $n_1=3, 4, 5$ आदि

हमने हाइड्रोजन के परमाणु के लिए अनुमत अवस्थाओं की उर्जा की गणना की है। हमने पाया कि कक्षा के क्रमांक के साथ उर्जा बढ़ती है तथा क्रमांक के साथ क्रमागत कक्षाओं में उर्जा का अन्तर कम होता जाता है।

अतः अलग-अलग कक्षाओं की उर्जा के एक स्वेच्छ (Arbitray) पैमाने पर प्रदर्शित किया जा सकता है। चित्र 8·2 में ऐसा उर्जा-स्तर का चित्र (Energy level diagram) बनाया गया है। भिन्न-भिन्न रेखा-श्रेणियाँ उत्पन्न करने वाले सक्रमण भी



चित्र 8·2

दिखलाये गये हैं। प्रत्येक श्रेणी मे दाहिनी ओर अन्तिम सक्रमण न्यूनतम तरग दैर्घ्य की सीमा-रेखा को व्यक्त करता है। निम्नतम अवस्था जिसके लिए $n=1$ है परमाणु की सामान्य अवस्था होती है। जब इलेक्ट्रॉन इस न्यूनतम उर्जा की सामान्य अवस्था

से उत्तेजित होकर अन्य उच्च उर्जा की अवस्था में पहुँच जाता है और वहाँ से वापस किसी निम्न उर्जा की अवस्था में संक्रमण करता है, तव विकिरण उत्सर्जित होता है। चित्र में दायीं ओर उर्जा स्तर से सम्बन्धित तरंग संख्या भी दी हुई है।

कक्षाओं की उर्जा का अन्तर उच्च कक्षाओं में कम होता जाता है तथा अन्ततः शून्य उर्जा की अवस्था आ जाती है जिसके पश्चात् सन्तत उर्जा का क्षेत्र आ जाता है; अब इलेक्ट्रॉन की उर्जा का कुछ भी धनात्मक मान हो सकता है।

जैसा कि हम देख चुके हैं, कक्षाओं में उर्जा ऋणात्मक होती है इसका केवल यही तात्पर्य है कि इलेक्ट्रॉन परमाणु मे वद्ध (Bound) है तथा उसको स्वतन्त्र करने (अर्थात शून्य उर्जा की स्थिति में करने) के लिए उतनी ही उर्जा देना आवश्यक है। उदाहरणार्थ हाइड्रोजन की निम्नतम अवस्था में इलेक्ट्रॉन की उर्जा —13·6 *ev* है और इलेक्ट्रॉन को मुक्त करने के लिए 13·6 *ev* उर्जा देनी पड़ेगी।

* (v) हाइड्रोजन के समरूप परमाणु

हाइड्रोजन के समरूप अन्य परमाणु के लिए भी उपर्युक्त सैद्धान्तिक विश्लेषण प्रयुक्त हो सकता है। उदाहरण—आयनित हीलियम तथा द्वि—आयनित लीथियम —दोनों में एक ही इलेक्ट्रॉन रह जाता है। अतः सूत्र (8-8), (8-9), (8-10) और (8-11) इनके लिए प्रयुक्त किये जा सकते हैं तथा इनमें हीलियम के लिये $Z=2$ और लीथियम के लिए $Z=3$ रखा जाना चाहिए। अतः सूत्र (8-10) के द्वारा देखा जा सकता है कि आयनित हीलियम के उत्सर्जन स्पैक्ट्रम में हाइड्रोजन स्पैक्ट्रम के समान ही, परन्तु चौगुनी आवृत्ति की रेखायें होनी चाहिए (क्योंकि $Z^2=4$) वास्तव में भी आयनित हीलियम से उत्सर्जित रेखायें लगभग चौगुनी आवृत्ति की ही होती हैं।

8·3. वोहर के सिद्धान्त की कमियाँ तथा सीमाएँ

उपर्युक्त वर्णित वोहर के सिद्धान्त के अनुसार अधिकांश घटनाओं की व्याख्या संभव होती है तथा यह पूर्णतः सन्तोषप्रद लगता है। परन्तु कई अन्य प्रेक्षणों और घटनाओं की व्याख्या करने में यह असमर्थ है। नई घटनाओं की व्याख्या करने के लिए इसमें कुछ सुधार और अभिवृद्धि भी की गई, परन्तु इस पर भी परमाणविक घटनाओं की सफल व्याख्या करने में यह अक्षम ही रहा।

वोहर के सिद्धान्त की मुख्य कमियाँ

1. इसके अन्तर्गत परमाणु में द्वितीय या और आगे के इलेक्ट्रान का गणना में समावेश करने का कोई सहज तरीका नहीं है।

2. इसमें नाभिक को स्थिर माना गया है। वस्तुतः दो कणों के इस प्रकार के तन्त्र में दोनों को उनके द्रव्यमान केन्द्र के चारों ओर घूमते हुए मानना चाहिये। परन्तु नाभिक की गति को गणना में शामिल करने पर कोई विशेष अन्तर नहीं

पड़ता और उसकी गति के प्रभाव को, सूत्रों में केवल इलेक्ट्रान का समानीत द्रव्यमान (reduced mass) प्रयुक्त कर, शामिल किया जा सकता है। इसके कारण इलेक्ट्रान की संहति me के स्थान पर समानीत द्रव्यमान μ $\left(=\frac{me}{1+me/m_p}\right)$ आ जाता है।

3. इसके द्वारा स्पैक्ट्रमी रेखाओं की सूक्ष्म सरचना* की व्याख्या नहीं की जा सकती। इनकी व्याख्या करने के लिये सॉमरफेल्ड ने दीर्घवृत्तीय कक्षाओं की कल्पना की और एक नये क्वाण्टम अंक $n\phi$ का समावेश किया।

4. चुम्बकीय क्षेत्र लगाने पर स्पैक्ट्रमी रेखायें एक से अधिक रेखाओं में विभक्त हो जाती हैं, इस घटना की व्याख्या भी बोहर के सिद्धान्त द्वारा नहीं की जा सकती। इसकी व्याख्या करने के प्रयत्न में एक अन्य क्वाण्टम अंक 'चुम्बकीय क्वाण्टम अंक m'' का समावेश करना पड़ा।

5. कई तत्वों के परमाणु की स्पैक्ट्रमी रेखाओं की बहुत सरचना (multiplit structure) पाई जाती है। यह घटना भी बोहर के सिद्धान्त द्वारा नहीं समझी जा सकती।

6. इसकी सबसे बड़ी दुर्बलता यह है कि ऊर्जा या कोणीय संवेग का क्वाण्टमकरण स्वेच्छ (arbitrary) रूप में किया गया है।

सारणी 8·2.

प्रमुख उपयोगी नियतांकों के मान :—

इलेक्ट्रॉन का आवेश,	$e=1{\cdot}6\times10^{-19}$ coul.
इलेक्ट्रॉन की संहति,	$m_e=9{\cdot}1\times10^{-31}$ Kg
प्लांक का नियतांक,	$h=6{\cdot}62\times10^{-34}$ J. sec.
हाइड्रोजन परमाणु की संहति,	$m_H=1{\cdot}6734\times10^{-27}$ Kg. $=1{\cdot}008145$ amu
प्रोटोन की संहति	$m_p=1{\cdot}6725\times10^{-27}$ Kg. $=1{\cdot}00760$ amu
न्यूट्रॉन की संहति	$m_n=1{\cdot}6748\times10^{-27}$ Kg $=1{\cdot}00898$ amu
निर्वात का परावैद्युतांक	$\in_o=8{\cdot}85\times10^{-12}$ N^{-1} m^{-2} $Coul^2$.
गुरुत्वाकर्षण नियतांक,	$G=6{\cdot}67\times10^{-11}$ $N-m^2/Kg^2$.
एवोगाड्रो संख्या	$N_o=6{\cdot}02\times10^{23}$ molecule/mole

* सूक्ष्म सरचना (Fine structure) शक्तिशाली उपकरण से स्पैक्ट्रमी रेखाओं के सूक्ष्म परीक्षण पर एक रेखा कई निकटस्थ रेखाओं के समूह के रूप में प्रकट होती है।

उदाहरण 2·1 हाइड्रोजन के लिए रीड्बर्ग नियतांक की गणना करें।

सूत्र $R_H = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_o^2 h^3 C}$

$$= \frac{9{\cdot}1 \times 10^{-31} \times (1{\cdot}6 \times 10^{-19})^4}{8 \times (8{\cdot}85 \times 10^{-12})^2 \times (6{\cdot}62 \times 10^{-34})^3 \times 3 \times 10^8}$$

$$= 10930000 \ m^{-1}$$

उदाहरण 2·2. हाइड्रोजन की निम्नतम अवस्था में इलेक्ट्रॉन के वेग की गण..। कीजिये। r का मान $= 5{\cdot}3 \times 10^{-11}$ m.

सूत्र (8·3) द्वारा

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_o r^2}$$

$$\therefore \qquad v^2 = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_o m_e r}$$

$$v^2 = \frac{(1{\cdot}6 \times 10^{-19})^2}{4 \times 3{\cdot}14 \times 8{\cdot}85 \times 10^{-12} \times 9{\cdot}1 \times 10^{-31} \times 5{\cdot}3 \times 10^{-11}}$$

$$v = 2{\cdot}18 \times 10^6 \ m/sec$$

उदाहरण 2·3. जब हाइड्रोजन परमाणु में इलेक्ट्रॉन कक्षा $n=2$ से कक्षा $n=1$ में स्थानान्तर होता है, तो उत्सर्जित फोटोन की तरंग दैर्घ्य की गणना करो। क्या यह दृश्य प्रकाश का फोटोन है ?

ऊर्जा के लिये सूत्र—

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8 \epsilon_o^2 h^2 n^2}$$

अतः $\qquad h\nu = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_o^2 h^2}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)$

या $\qquad \frac{hC}{\lambda} = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_o^2 h^2}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$

$$\therefore \ \lambda = \frac{h^3 C . 8 \epsilon_o^2 4}{3 m_e e^4}$$

$$= \frac{(6{\cdot}62 \times 10^{-34})^3 \times 3 \times 10^{8} \times 8 \times (8{\cdot}85 \times 10^{-12})^2 \times 4}{3 \times 9{\cdot}1 \times 10^{-31} \times (1{\cdot}6 \times 10^{-19})^4}$$

$\therefore \ \lambda = 1{\cdot}22 \times 10^{-7}$ m. लगभग

अतः यह दृश्य प्रकाश का फोटोन नहीं है।

उदाहरण 2·4. आयनित हीलियम के लिये बामर श्रेणी की प्रथम दो रेखाओं तथा अन्तिम रेखा की तरंग दैर्घ्य की गणना करो।

हीलियम के लिये $Z = 2$

$$\therefore \quad E_n = -\frac{m_e \times 4 \times e^4}{8 \in_o^2 h^2 n^2}$$

अतः बामर श्रेणी की प्रथम रेखा के लिए

$$h\nu = \frac{hC}{\lambda} = -\frac{4 m_e e^4}{8 \in_o^2 h^2}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)$$

$$= \frac{m_e e^4}{2 \in_o^2 h^2}\left(\frac{5}{36}\right)$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{2h^3 C \in_o^2 \times 36}{m_e e^4 . 5}$$

$$= \frac{2 \times (6\ 62 \times 10^{-34})^3 \times 3 \times 10^8 \times (8{\cdot}85 \times 10^{-12})^2 \times 36}{9\ 1 \times 10^{-31} \times (1{\cdot}6 \times 10^{-19})^4 \times 5}$$

$$\lambda = 1{\cdot}646 \times 10^{-7}\ m$$

इसी प्रकार, द्वितीय रेखा ($n_2 = 2, n_1 = 4$) के लिए $\lambda = 1{\cdot}22 \times 10^{-7} m$ तथा अन्तिम रेखा की तरंग दैर्घ्य, $\lambda = {\cdot}99 \times 10^{-7} m$.

8·4. क्वाण्टम संख्यायें

परमाणु के उत्सर्जन स्पैक्ट्रम सम्बन्धी कई अन्य घटनाओं का पता लगने के साथ ही बोहर के सिद्धान्त की अक्षमता प्रकट होती गई। प्रथम तो उनके सिद्धान्त मे ही सुधार करने के प्रयत्न किए गये। सॉमरफैल्ड ने स्पैक्ट्रमी रेखाओं की सूक्ष्म संरचना की व्याख्या के लिए दीर्घवृत्तीय कक्षाओं की कल्पना की। उन्होंने इलेक्ट्रान के कोणीय संवेग को दो घटकों दिगंशीय (agimuthal) और त्रिज्य (radial) से मिलकर बना हुआ माना तथा इनका क्वाण्टमी करण क्रमश क्वाण्टम सख्याओं n^{ϕ} और n_r द्वारा किया। इनके मान बोहर के सिद्धान्त मे प्रयुक्त क्वाण्टम संख्या n से निम्न प्रकार से सम्बन्धित माने गये —

$$n = n^{\phi} + n_r$$

और n को मुख्य क्वाण्टम सख्या कहा गया। इस नवीन विचार के साथ ही इलेक्ट्रान की संहति के आपेक्षिकीय (relativistic variation) की धारणा का समावेश कर उन्होंने हाइड्रोजन और आयनित हीलियम की रेखाओं की सूक्ष्म संरचना की व्याख्या करने मे आंशिक सफलता प्राप्त की।

इसके अतिरिक्त एक अन्य क्वाण्टम संख्या की संकल्पना भी की गई जिसका सम्बन्ध दीर्घवृत्तीय कक्षाओं का दिक में दिक विन्यास (Orientation) से था; इसको चुम्बकीय क्वाण्टम संख्या (magnetic quantum number, m) कहा गया। बाह्य चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में दीर्घवृत्तीय कक्षाओं की कुछ विशिष्ट दिशायें होना संभव माना गया। परन्तु बहुक संरचना (multiplet structure) तथा एक से अधिक बाह्य इलेक्ट्रान वाले परमाणु की संरचना सम्बन्धी कई कठिनाइयाँ ऐसी थीं जिनको बोहर के सिद्धान्त में उपर्युक्त प्रकार के स्वेच्छ सुधार करके भी हल नहीं किया जा सकता था। वैज्ञानिक यह अनुभव करने लगे थे कि परमाणविक भौतिकी की व्याख्या के लिये कोई नवीन ही विधि अपनायी जानी चाहिए।

सन् 1924 में वैज्ञानिक लुई डि ब्रोगली ने द्रव्य-तरंगों की संकल्पना को जन्म दिया तथा वैज्ञानिक श्रेंडिगर ने उसके आधार पर एक नवीन यांत्रिक-तरंग यांत्रिकी (Wave mechanics) का विकास किया। परमाणविक तथा अन्य सूक्ष्म कणों के लिए यही यांत्रिकी उपयुक्त है। इस क्षेत्र के लिए वैज्ञानिक हैजनवर्ग बोर्न (Born) आदि ने स्वतन्त्र रूप से एक अन्य यांत्रिक-क्वाण्टम यांत्रिकी (quantum-mechanics) का विकास किया। दोनों विधियों से एक समान परिणाम प्राप्त होते हैं। इन नई धारणाओं मे इलेक्ट्रान को किन्हीं सुनिश्चित कक्षाओं में चक्कर लगाते हुए नहीं माना जाता, वरन् इलेक्ट्रान के किसी स्थल पर होने की संभावना (probability) की ही गणना की जा सकती है। इन नई विधियों में जब एक इलेक्ट्रान युक्त परमाणु की त्रिविमीय (three dimensional) गणना की जाती है, तो तीन क्वाण्टम संख्यायें स्वतः ही परिणाम में प्रकट हो जाते हैं। ये हैं : मुख्य क्वाण्टम संख्या *'n'* कक्षीय क्वाण्टम सख्या *'l'* तथा चुम्बकीय क्वाण्टम संख्या *'me'*। इन नवीन धारणाओं के अनुसार परमाणु के वर्णन को 'वैक्टर मॉडल' के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इस मॉडल में चुम्बकीय कक्षीय क्वाण्टम संख्या *me* को कक्षीय कोणीय संवेग के बाह्य चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा में प्रक्षेप के बराबर माना जाता है। अर्थात कोई चुम्बकीय क्षेत्र लगने पर दीर्घवृत्तीय कक्षा दिक में कुछ विशिष्ट दिशा में ही हो सकती है जिसका क्षेत्र की दिशा में प्रक्षेप $\frac{h}{2\pi}$ का गुणक होता है $\left(me\frac{h}{2\pi}\right)$

अतः परमाणु में इलेक्ट्रान से सम्बन्धित क्वाण्टम संख्यायें निम्न हैं—
मुख्य क्वाण्टम संख्या *'n'*

यह बोहर के सिद्धान्त में प्रयुक्त क्वाण्टम संख्या *'n'* के ही समरूप है तथा सम्बन्धित अवस्था में इलेक्ट्रान की उर्जा मुख्यतः इसी पर निर्भर करती है। इसका मान प्राकृतिक धन पूर्ण सख्यायें ही हो सकती हैं जैसे 1, 2, 3, 4 आदि। *'n'* के किसी एक मान से सम्बन्धित इलेक्ट्रान एक ही कक्षा (shell) में माने जाते हैं। *'n'*

के अलग-अलग मान की कक्षाओं का निम्न प्रकार नामकरण किया गया है—

n	1	2	3	4	5	
कक्षा	K	L	M	N	O	आदि

कक्षीय क्वाण्टम संख्या l

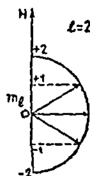
इस क्वाण्टम संख्या द्वारा इलेक्ट्रॉन का कक्षीय कोणीय संवेग निर्धारित होता है $\left(pl = l\frac{h}{2\pi}\right)^*$। यह सॉमरफेल्ड के द्वारा प्रस्तावित दिगंशीय क्वाण्टम संख्या n_ϕ के समरूप है। इसका मान शून्य से $(n-1)$ तक कोई भी पूर्ण संख्या हो सकती है। अर्थात यदि $n=4$, तब l का मान, 0, 1, 2 या 3 हो सकता है। परम्परानुसार 'l' के अलग-अलग मान से सम्बन्धित इलेक्ट्रॉन को निम्न प्रकार से नामांकित किया जाता है—

l →	0	1	2	3	
नामांकन	s	p	d	f	आदि

एक कक्षा में (अर्थात n के किसी एक मान के लिए) l के अलग-अलग मान को अलग-अलग उपकोश (Subshell) माना जाता है।

चुम्बकीय कक्षीय क्वाण्टम संख्या ml

वैक्टर माडल के अनुसार दीर्घ वृत्तीय कक्षाओं का दिक में दिकविन्यास (Orientation) क्वाण्टम में बदलता है अर्थात कुछ विशिष्ट दिक विन्यास ही हो सकता है जिससे कि कोणीय संवेग का प्रक्षेप इस क्वाण्टम संख्या ml द्वारा निर्धारित होता है। किसी विशिष्ट दिशा (जैसे किसी बाह्य चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा) में कक्षीय कोणीय संवेग के प्रक्षेप का मान क्वाण्टम में बदलता है; यह प्रक्षेप $ml\frac{h}{2\pi}$ के बराबर ही हो सकता है, जबकि ml का मान l से $-l$ तक हो सकता है। अर्थात इसका मान, l, $(l-1)$, $(l-2)$........1, 0, (-1),.... $-(l-1)$, $-l$ हो सकता है। इस प्रकार एक दिये हुए 'l' के मान के लिये ml के $(2l+1)$ मान हो सकते हैं।



चित्र 8·5

---

* क्वाण्टम-यान्त्रिकी के अनुसार l क्वाण्टम संख्या वाले इलेक्ट्रॉन का कक्षीय कोणीय संवेग $= \sqrt{l(l+1)}\ \frac{h}{2\pi}$

उदाहरण—जब $l=1$, $ml=1$, 0 और −1

जब $l=2$, $ml=$ 2, 1, 0, −1 और −2

यह चित्र 8·3 में प्रकट किया गया है।

8·5 इलेक्ट्रॉन स्पिन

वैज्ञानिक उल्हेनवेक और गाउडस्मिट (Uhlenbeck and Goudsmit) ने सर्वप्रथम सन् 1925 में इलेक्ट्रॉन स्पिन की धारणा प्रस्तावित की। यह धारणा उन्हें कुछ प्रेक्षण जैसे स्पेक्ट्रमी रेखाओं की बहुत-संरचना और असंगत जीमन प्रभाव की व्याख्या करने के लिए आवश्यक प्रतीत हुई। उन्होंने सुझाव दिया कि कक्षा में चक्कर लगाने के अतिरिक्त इलेक्ट्रॉन को उसके स्वयं के अक्ष के चारों ओर चक्कर लगाते हुए (Spinning) मानना चाहिए* तथा इस घूर्णन गति के कारण भी उसमें कोणीय संवेग होना चाहिए। साथ ही आवेशित होने के कारण इस गति से सम्बन्धित चुम्बकीय आघूर्ण भी होगा। इस चक्रण गति का क्वाण्टमकरण स्पिन-क्वाण्टम संख्या S के द्वारा किया गया अर्थात इससे सम्बन्धित कोणीय संवेग $=S\frac{h}{2\pi}$ माना गया। तथापि स्पिन क्वाण्टम संख्या का मान $\frac{1}{2}$ ही होता है।

यद्यपि प्रारम्भ में इलेक्ट्रॉन-स्पिन की धारणा आनुभविक रूप से ही प्रस्तावित की गई, तथापि बाद में जब वैज्ञानिक डिराक (Dirac) ने परमाणु से सम्बन्धित श्रोडिंगर समीकरण को आपेक्षिकता की दृष्टि से अक्षर रूप में लिखा और हल किया तो इलेक्ट्रॉन स्पिन स्वतः ही सैद्धान्तिक रूप से प्रविष्ट हो गया।

किसी विशिष्ट दिशा जैसे बाह्य चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा में स्पिन S का प्रक्षेप के भी कुछ विशिष्ट मान ही हो सकते हैं, जो चुम्बकीय स्पिन क्वाण्टम संख्या m_S द्वारा निर्धारित होते हैं। परन्तु इसके दो ही प्रक्षेप मान सम्भव हैं, जब $m_S=+\frac{1}{2}$ या $-\frac{1}{2}$ होता है।

8·6 पॉली का अपवर्जन नियम—परमाणु में इलेक्ट्रॉन का वितरण किस प्रकार हो यह समझने के लिए यह समझना होगा कि किसी कक्षा में कितने इलेक्ट्रॉन हो सकते हैं। अर्थात परमाणु में किसी इलेक्ट्रॉन की क्वाण्टम संख्या क्या हो सकती हैं? इसके विषय में एक मौलिक नियम है, जिसे पॉली का अपवर्जन नियम कहते हैं। यह निम्न प्रकार है :

---

* आधुनिक विचारों के अनुसार इलेक्ट्रॉन को एक द्रव्य-कण के समान समझकर उसके घूर्णन की कल्पना करना अर्थहीन ही है; केवल यही समझना चाहिए कि कोणीय संवेग $l\frac{h}{2\pi}$ के अतिरिक्त एक अन्य निज कोणीय संवेग $S\frac{h}{2\pi}$ और भी है।

किसी एक परमाणु में कोई दो इलेक्ट्रॉन की चारों क्वान्टम संख्यायें एक समान नहीं हो सकती। यद्यपि पॉली ने भी यह नियम आनुमानिक आधार पर ही बनाया था तथापि यह सदैव लागू होता पाया गया है तथा परमाणुओं की इलेक्ट्रानीय संरचना समझने के लिए यह अत्यन्त महत्त्वपूर्ण एवं उपयोगी है। इस नियम के द्वारा ही हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि मुख्य क्वान्टम संख्या n के लिए कुल इलेक्ट्रॉन की संख्या $2n^2$ होती है। इसी प्रकार एक दिए हुए l के मान के लिए इलेक्ट्रॉन की कुल सख्या $2(2l+1)$ होती है। इस हेतु कुछ उदाहरण दिये जा सकते हैं—

जब $n=1$ हो, तत्व $l=0$, अतः ml भी शून्य ही होगा। m_s का मान $+\frac{1}{2}$ या $-\frac{1}{2}$ हो सकता है, अतः प्रथम कक्षा $(n=1)$ में दो ही इलेक्ट्रॉन हो सकते हैं।

जब $n=2$ हो l के दो मान हो सकते हैं, 0 और 1 (एक) उपर्युक्त वर्णन के अनुसार $l=0$ होने पर, 2 इलेक्ट्रॉन हो सकते हैं। $l=1$ होने पर ml का मान 1, 0 और -1 हो सकता है तथा इनमें से प्रत्येक मान के लिये m_s का मान $+\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{2}$ हो सकता है अतः कुल 6 इलेक्ट्रॉन हो सकते हैं। इस प्रकार $n=2$ होने पर इलेक्ट्रॉन की कुल सख्या $=8$

इसी प्रकार गणना करने पर ज्ञात होगा कि $n=3$ होने पर कुल 18, $n=4$ होने पर कुल 32 इलेक्ट्रॉन हो सकते हैं। n के मान के क्रम में कक्षाओं को नामांकित किया जाता है तथा इन्हें क्रमशः K, L, M, N, O आदि कोश कहते हैं।

l के अलग-अलग मान को एक उप-कोश (Sub shell) के रूप में माना जाता है। जैसे $n=2$, होने पर $l=0$ और 1 हो सकता है, इस प्रकार द्वितीय कोश (L कोश) की दो उपकोश हैं। इसी प्रकार हम देखेंगे कि n क्रमांक की कोश में n उपकोश होती है।

8·7 परमाणुओं में इलेक्ट्रॉन-कणों का वितरण

जैसा कि पॉली के नियम से स्पष्ट होता है, परमाणु में सभी इलेक्ट्रॉन एक ही कोश मे नहीं रह सकते। उनका भिन्न-भिन्न कोशों में वितरण दो मूल नियमों द्वारा निर्धारित होता है :

(i) पॉली का अपवर्जन नियम, तथा

(ii) इलेक्ट्रॉन सबसे पहले निम्न उर्जा की अवस्था में जाते हैं। इन मूल-धारणाओं के आधार पर विभिन्न तत्त्वों के परमाणुओं में इलेक्ट्रॉन-विन्यास ज्ञात किया जा सकता है।

हाइड्रोजन मे एक ही इलेक्ट्रॉन होता है और यह न्यूनतम उर्जा की अवस्था,

K कोश में रहेगा। यह उसकी निम्नतम अवस्था (Ground state) होती है। स्पष्ट ही इसके लिए $l=0$ अतः इसका इलेक्ट्रॉन विन्यास इस प्रकार लिखा जाता है—$1s^1$ परमाणुओं में इलेक्ट्रॉन विन्यास व्यक्त करने की परिपाटी इस प्रकार है कि पहले मुख्य क्वाण्टम संख्या लिखी जाती है। उसके बाद l—के मान के अनुसार इलेक्ट्रॉन की अवस्था s, p, d, f....आदि लिखते हैं तथा अवस्था के चिन्ह के ऊपरी कोने पर उस अवस्था में इलेक्ट्रॉन की संख्या लिखी जाती है जैसा कि निम्न पैरा में भिन्न-भिन्न परमाणुओं के इलेक्ट्रॉन विन्यास में बतलाया गया है।

हीलियम में दो इलेक्ट्रॉन होते हैं और यह दोनों प्रथम कोश (K-कोश) में ही आ जाते हैं, अतः हीलियम परमाणु की सामान्य की निम्नतम अवस्था का इलेक्ट्रॉन विन्यास है। $1s^2$ (अर्थात प्रथम कक्षा में 2 s – इलेक्ट्रॉन) हम जानते हैं कि प्रथम कक्षा में 2 ही इलेक्ट्रॉन आ सकते हैं, इसलिए अब प्रथम कोश 'बन्द' या संतृप्त हो गया है।

लीथियम में दो इलेक्ट्रॉन तो प्रथम K-कोश में जायेंगे और तीसरा इलेक्ट्रॉन द्वितीय कोश, L–कोश की s–उपकोश में ($l=0$) अतः हीलियम का इलेक्ट्रॉन विन्यास होगा $1s^2 2s^1$ **बरीलियम** (Be) में चार इलेक्ट्रॉन होने के कारण उसका इलेक्ट्रॉन विन्यास होगा $1s^2 2s^2$। **बोरोन** (B) में पाँचवां इलेक्ट्रॉन अगली उपकोश ($l=1$) में जायगा अतः $1s^2 2s^2 2p^1$ इस प्रकार आगे आने वाले तत्त्वों के परमाणुओं में p–उपकोश में इलेक्ट्रॉन जुड़ते जायेंगे जब तब कि **नियोन** (Ne) में 10 इलेक्ट्रॉन होने के कारण L–कोश भी संतृप्त हो जायगी।

इसके बाद के तत्त्व **सोडियम** में 11 इलेक्ट्रॉन हैं, अतः ग्याहरवां इलेक्ट्रॉन तृतीय कोश (M) में जायगा और उसके लिए $l=0$ अतः सोडियम का इलेक्ट्रॉन-विन्यास होगा $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ इसी प्रकार तृतीय कोश में इलेक्ट्रॉन बढ़ते रहेंगे और आरगन (18 इलेक्ट्रॉन) से तृतीय कोश के s और p उपकोश सम्पूर्ण हो जायेंगे। इसके बाद आने वाले तत्त्वों, पोटेशियम और कैलशियम में इलेक्ट्रॉन चतुर्थ कोश (N) में जाते हैं यद्यपि तृतीय कोश (m) में उपकोश d ($l=2$) अभी रिक्त ही है। इसी प्रकार रूबीडियम (37) में भी N–कोश सम्पूर्ण होने के पूर्व ही पंचम कोश, O-कोश, में इलेक्ट्रॉन भरना प्रारम्भ हो जाते हैं। इससे यह समझना संगत नहीं होगा कि इलेक्ट्रॉन के वितरण में कुछ अनियमितता या असंगति है। इलेक्ट्रॉन वितरण के सम्बन्ध में निर्देशक सिद्धान्त यह है कि —**इलेक्ट्रॉन परमाणु में इस प्रकार वितरित होते हैं कि परमाणु की कुल उर्जा न्यूनतम रहे** तथा इसके लिए सदैव यह शर्त नहीं है कि कम n-संख्या वाली कोश पूर्णतः भरने पर ही उससे अगली कोश भरना प्रारम्भ हो। पोटेशियम से ही यह व्यतिक्रम प्रारम्भ हो जाता है तथा कई अन्य परमाणुओं में ऐसा होता है।

निम्न सारिणी 8·2 में कुछ तत्वों के परमाणुओं के इलेक्ट्रॉन विन्यास दिये गये हैं—

सारिणी 8·3

Z	तत्व	इलेक्ट्रॉन-विन्यास
2	× हीलियम He	$1s^2$
10	× नियोन Ne	$1s^2\ 2s^2p^6$
11	सोडियम Na	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^1$
12	मैगनीशियम Mg	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^2$
19	पोटेशियम K	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^2p^6\ 4s^1$
21	स्कैन्डीयम Sc	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^2p^6\ d^1\ 4s^2$
22	टिटेनियम Ti	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^2p^6\ d^2\ 4s^2$
31	गैलियम Ga	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^2p^6\ d^{10}\ 4s^2p^1$
36	× क्रिप्टन Kr	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^2p^6\ d^{10}\ 4s^2p^6$
37	रूबीडियम Rb	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^2p^6\ d^{10}\ 4s^2p^6\ 5s^1$
54	× जेनन Xe	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^2p^6\ d^{10}\ 4s^2p^6d^{10}\ 5s^2p^6$
55	सीजियम Cs	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^2p^6d^{10}\ 4s^2p^6d^{10}\ 5s^2p^6\ 6s^1$
86	× रेडन Rn	$1s^22s^2p^63s^2p^6d^{10}4s^2p^6d^{10}f^{14}5s^2p^6d^{10}6s^2p^6$
88	रेडियम Ra	$1s^22s^2p^63s^2p^6d^{10}4s^2p^6d^{10}f^{14}5s^2p^6d^{10}6s^2p^6\ 7s^2$
	— × सतृप्त	कोश सरचना वाले परमाणु

सारणी से ज्ञात होता है कि हीलियम, नियोन, क्रिप्टन और जेनन (तथा पूर्व वर्णित आरगन भी) में कोश या उपकोश सतृप्त हो गई है अथवा 'बन्द' (Closed) हो गई है अर्थात उनमें और अधिक इलेक्ट्रॉन नहीं जा सकते। आरगन में तृतीय (M) कोश के प्रथम दो उपकोश 'बन्द' हो चुके हैं और क्रिप्टन में पंचम (O) कोश के प्रथम दो उपकोश भर चुके हैं, जब कि हीलियम और नियान में क्रमश प्रथम (K) और द्वितीय (L) कोश भर चुके हैं। यह सब गैस अक्रिय (inert) होती हैं। इस प्रकार की बन्द-कोश संरचना (Closed shell structure) अक्रियता अथवा स्थिरता का कारण होती है। हम सहज ही देख सकते हैं कि इस प्रकार की बन्द कोश या बन्द उपकोश होने पर कोणीय संवेग का संतुलन हो जाता है तथा कुल कोणीय संवेग शून्य होता है। उपर्युक्त वर्णित परमाणुओं के आगे आने वाले परमाणु यथा लीथियम, सोडियम, पोटेशियम, रूबीडियम, सीजियम आदि में इनके पूर्व के बन्द कोश परमाणु में एक इलेक्ट्रॉन अधिक होता है जो अगली कोश या उपकोश में जाता है (लीथियम, सोडियम और पोटेशियम में यह क्रमशः $2s$, $3s$ और $4s$ इलेक्ट्रॉन होता है)। अतः इन सबका इलेक्ट्रॉन-विन्यास समरूप है और हम यह आशा

K कोश में रहेगा। यह उसकी निम्नतम अवस्था (Ground state) होती है। स्पष्ट ही इसके लिए $l=0$ अतः इसका इलेक्ट्रॉन विन्यास इस प्रकार लिखा जाता है—$1s^1$ परमाणुओं में इलेक्ट्रॉन विन्यास व्यक्त करने की परिपाटी इस प्रकार है कि पहले मुख्य क्वाण्टम संख्या लिखी जाती है। उसके बाद l—के मान के अनुसार इलेक्ट्रॉन की अवस्था s, p, d, f....आदि लिखते हैं तथा अवस्था के चिन्ह के ऊपरी कोने पर उस अवस्था में इलेक्ट्रॉन की संख्या लिखी जाती है जैसा कि निम्न पैरा में भिन्न-भिन्न परमाणुओं के इलेक्ट्रॉन विन्यास में बतलाया गया है।

हीलियम में दो इलेक्ट्रॉन होते हैं और यह दोनों प्रथम कोश (K-कोश) में ही आ जाते हैं, अतः हीलियम परमाणु की सामान्य की निम्नतम अवस्था का इलेक्ट्रॉन विन्यास है। $1s^2$ (अर्थात प्रथम कक्षा में 2 s – इलेक्ट्रॉन) हम जानते हैं कि प्रथम कक्षा में 2 ही इलेक्ट्रॉन आ सकते हैं, इसलिए अब प्रथम कोश 'बन्द' या संतृप्त हो गया है।

लीथियम में दो इलेक्ट्रॉन तो प्रथम K-कोश में जायेंगे और तीसरा इलेक्ट्रॉन द्वितीय कोश, L–कोश की s–उपकोश में ($l=0$) अतः हीलियम का इलेक्ट्रॉन विन्यास होगा $1s^2 2s^1$ **बरीलियम** (Be) में चार इलेक्ट्रॉन होने के कारण उसका इलेक्ट्रॉन विन्यास होगा $1s^2 2s^2$। **बोरोन** (B) में पाँचवां इलेक्ट्रॉन अगली उपकोश ($l=1$) में जायगा अतः $1s^2 2s^2 2p^1$ इस प्रकार आगे आने वाले तत्त्वों के परमाणुओं में p–उपकोश में इलेक्ट्रॉन जुड़ते जायेंगे जब तब कि **नियोन** (Ne) में 10 इलेक्ट्रॉन होने के कारण L–कोश भी संतृप्त हो जायगी।

इसके बाद के तत्त्व **सोडियम** में 11 इलेक्ट्रॉन हैं, अतः ग्याहरवां इलेक्ट्रॉन तृतीय कोश (M) में जायगा और उसके लिए $l=0$ अतः सोडियम का इलेक्ट्रॉन-विन्यास होगा $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ इसी प्रकार तृतीय कोश में इलेक्ट्रॉन बढ़ते रहेंगे और **आरगन** (18 इलेक्ट्रॉन) से तृतीय कोश के s और p उपकोश सम्पूर्ण हो जायेंगे। इसके बाद आने वाले तत्त्वों, **पोटेशियम** और **कैलशियम** में इलेक्ट्रॉन चतुर्थ कोश (N) में जाते हैं यद्यपि तृतीय कोश (m) में उपकोश d ($l=2$) अभी रिक्त ही है। इसी प्रकार **रूबीडियम** (37) में भी N–कोश सम्पूर्ण होने के पूर्व ही पंचम कोश, O–कोश, में इलेक्ट्रॉन भरना प्रारम्भ हो जाते हैं। इससे यह समझना संगत नहीं होगा कि इलेक्ट्रॉन के वितरण में कुछ अनियमितता या असंगति है। इलेक्ट्रॉन वितरण के सम्बन्ध में निर्देशक सिद्धान्त यह है कि—**इलेक्ट्रॉन परमाणु में इस प्रकार वितरित होते हैं कि परमाणु की कुल उर्जा न्यूनतम रहे** तथा इसके लिए सदैव यह शर्त नहीं है कि कम n-संख्या वाली कोश पूर्णतः भरने पर ही उससे अगली कोश भरना प्रारम्भ हो। पोटेशियम से ही यह व्यतिक्रम प्रारम्भ हो जाता है तथा कई अन्य परमाणुओं में ऐसा होता है।

निम्न सारिणी 8·2 में कुछ तत्वों के परमाणुओं के इलेक्ट्रॉन विन्यास दिये गये हैं—

सारिणी 8·3

Z	तत्त्व	इलेक्ट्रॉन-विन्यास
2	× हीलियम He	$1s^2$
10	× नियोन Ne	$1s^2\ 2s^2\ p^6$
11	सोडियम Na	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^1$
12	मैगनीशियम Mg	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^2$
19	पोटेशियम K	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^2p^6\ 4s^1$
21	स्केन्डीयम Sc	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^2p^6\ d^1\ 4s^2$
22	टिटेनियम Ti	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^2p^6\ d^2\ 4s^2$
31	गैलियम Ga	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^2p^6\ d^{10}\ 4s^2p^1$
36	× क्रिप्टन Kr	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^2p^6\ d^{10}\ 4s^2p^6$
37	रूबीडियम Rb	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^2p^6\ d^{10}\ 4s^2p^6\ 5s^1$
54	× जेनन Xe	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^2p^6\ d^{10}\ 4s^2p^6d^{10}5s^2p^6$
55	सीजियम Cs	$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^2p^6d^{10}\ 4s^2p^6d^{10}\ 5s^2p^6\ 6s^1$
86	× रेडन Rn	$1s^22s^2p^63s^2p^6d^{10}4s^2p^6d^{10}f^{14}5s^2p^6d^{10}6s^2p^6$
88	रेडियम Ra	$1s^22s^2p^63s^2p^6d^{10}4s^2p^6d^{10}f^{14}5s^2p^6d^{10}6s^2p^6$ $7s^2$

— × सतृप्त कोश सरचना वाले परमाणु

सारणी से ज्ञात होता है कि हीलियम, नियोन, क्रिप्टन और जेनन (तथा पूर्व वर्णित आरगन भी) में कोश या उपकोश सतृप्त हो गई है अथवा 'वन्द' (Closed) हो गई है अर्थात उनमें और अधिक इलेक्ट्रॉन नहीं जा सकते। आरगन मे तृतीय (M) कोश के प्रथम दो उपकोश 'वन्द' हो चुके हैं और क्रिप्टन मे पचम (O) कोश के प्रथम दो उपकोश भर चुके हैं, जब कि हीलियम और नियान मे क्रमश: प्रथम (K) और द्वितीय (L) कोश भर चुके हैं। यह सब गैस अक्रिय (inert) होती है। इस प्रकार की वन्द-कोश संरचना (Closed shell structure) अक्रियता अथवा स्थिरता का कारण होती है। हम सहज ही देख सकते हैं कि इस प्रकार की वन्द कोश या वन्द उपकोश होने पर कोणीय सवेग का सतुलन हो जाता है तथा कुल कोणीय सवेग शून्य होता है। उपर्युक्त वर्णित परमाणुओं के आगे आने वाले परमाणु यथा लीथियम, सोडियम, पोटेशियम, रूबीडियम, सीजियम आदि मे इनके पूर्व के वन्द कोश परमाणु मे एक इलेक्ट्रॉन अधिक होता है जो अगली कोश या उपकोश मे जाता है (लीथियम, सोडियम और पोटेशियम मे यह क्रमश: 2s, 3s और 4s इलेक्ट्रॉन होता है)। अत. इन सबका इलेक्ट्रॉन-विन्यास समरूप है और हम यह आशा

—तालिका (Periodic Table)

	श्रेणियाँ (Series)	I A	I B	II A	II B	III A	III B	IV A	IV B	V A	V B	VI A	VI B	VII A	VII B	VIII संक्रमण तत्त्व (Transitional Elements)	O
	1	1 H 1·008													1 H 1·008		2 He 4·003
छोटी आवृत्ति (Short Period)	2	3 Li 6·94		4 Be 9·013			5 B 10·82		6 C 12·01		7 N 14·008		8 O 16·00		9 F 19·00		10 Ne 20·183
छोटी आवृत्ति (Short Period)	3	11 Na 22·997		12 Mg 24·32			13 Al 26·97		14 Si 28·06		15 P 30·975		16 S 32·066		17 Cl 35·457		18 A 39·944
बड़ी आवृत्ति (Long Period)	4	19 K 39·10	29 Cu 63·54	20 Ca 40·08	30 Zn 65·38	21 Sc 45·10	31 Ga 69·72	22 Ti 47·9	32 Ge 72·60	23 V 50·95	33 As 74·91	24 Cr 52·01	34 Se 78·96	25 Mn 54·93	35 Br 79·916	26 Fe 55·85, 27 Co 58·94, 28 Ni 58·69	36 Kr 83·80
बड़ी आवृत्ति (Long Period)	5	37 Rb 85·43	47 Ag 107·88	38 Sr 87·63	48 Cd 112·41	39 Y 88·92	49 In 114·76	40 Zr 91·22	50 Sn 118·7	41 Nb 92·91	51 Sb 121·76	42 Mo 95·95	52 Te 127·61	43 Tc 99	53 I 126·91	44 Ru 101·7, 45 Rh 102·9, 46 Pd 106·7	54 Xe 31·3
बड़ी आवृत्ति (Long Period)	6	55 Cs 132·91	79 Au 197·2	56 Ba 137·36	80 Hg 200·61	57-71 Rare Earths*	81 Tl 204·39	72 Hf 178·6	82 Pb 207·21	73 Ta 180·88	83 Bi 209·0	74 W 183·92	84 Po 210	75 Re 186·31	85 At 211	76 Os 190·2, 77 Ir 192·2, 78 Pt 195·3	86 Rn 222·0
बड़ी आवृत्ति (Long Period)	7	87 Fr 223		88 Ra 226·05		89 Ac 227·0		90 Th 232·12		91 Pa 231		92 U 238·07		93—102 Transuranic Elements			

… अंक परमाणु-संख्या, तथा तत्त्वोंके नामोंके नीचे दिये गये अंक परमाणु-भार प्रदर्शित करते हैं।

… Pr, Nd, Pm, Sm, Eu, Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Yb, Lu.

कर सकते हैं कि इनके रासायनिक गुण तथा उत्सर्जन विशेषताएं (emission characteristics) भी समरूप होंगे। वास्तव मे ऐसा ही पाया गया है और इन सभी अलकली धातुओं (alkali metals) के गुण काफी कुछ एक जैसे है। इस प्रकार तत्त्वों के रासायनिक एवं प्रकाशकीय-उत्सर्जन सम्बन्धी गुण बन्द कोश या उपकोश के बाहर के इलेक्ट्रॉन-कणों पर निर्भर करते हैं तथा इन इलेक्ट्रॉन कणों को 'संयोजकता-इलेक्ट्रॉन' या 'प्रकाशित-इलेक्ट्रॉन' (optical electron) कहते हैं। उपर्युक्त वर्णित अलकली धातुओ की संयोजकता एक ज्ञात है। इसी प्रकार मैगनीशियम (12), कैलशियम (20) स्ट्रॉन्शियम (38), बेरियम (56) और रेडियम (88) में सबसे बाहरी अपूर्ण कोश में दो इलेक्ट्रॉन हैं। इन सभी के गुण एक एक जैसे हैं और संयोजकता दो है। बन्द-कोश संरचना वाली अक्रिय गैसों के पहले के तत्त्वो फ्लोरीन (9), क्लोरीन (17), ब्रोमीन (35) और आयोडीन (53) में निकटस्थ बन्द कोश संरचना से एक इलेक्ट्रॉन कम है, और इनमें एक इलेक्ट्रॉन प्राप्त करने की प्रकृति होती है। अतः इनकी संयोजकता एक ऋणात्मक होती है।

इस सारिणी में तत्त्वो को सात क्षैतिज पंक्तियो (horizontal rows) में लिखा गया है तथा इनमें नौ ऊर्ध्वाधर खानें (vertical columns) बनाये गये हैं। क्षैतिज पंक्तियो को पीरियड (periods) की संज्ञा दी गई है तथा ऊर्ध्वाधर खानो को ग्रुप (Group) कहा गया है। नवाँ ग्रुप अक्रिय (inert) गैसों का है। एक क्षैतिज खाने (period) मे आने वाले प्रथम से आठवें ग्रुप तक के तत्त्वो के गुणों में क्रमशः परिवर्त्तन (gradual variation) होता है जैसे कि लीथियम बरीलियम, बोरोन से लेकर फ्लोरीन तक। इसके पश्चात तीसरे पीरियड मे फिर इसी प्रकार से सोडियम, मैग्नीशियम से लेकर क्लोरीन तक इसी क्रम से रासायनिक आदि गुणों मे परिवर्त्तन होता है। इस प्रकार ऊर्ध्वाधर खानो (vertical groups) में आने वाले तत्त्वो के रासायनिक गुणो मे काफी समानता होती है और उनसे बनने वाले उत्सर्जन स्पैक्ट्रम भी समरूप (similer) होते हैं, जैसे प्रथम ग्रुप में हाइड्रोजन, सोडियम, पोटेशियम, रूबीडियम, सीजियम आदि इनकी संयोजकता एक होती है। इसी प्रकार दूसरे ग्रुप मे बरीलियम, मैगनीशियम, कैलशियम आदि के गुण भी समरूप हैं और संयोजकता दो होती हैं।

तत्त्वो के गुणो मे इस प्रकार का आवर्ती परिवर्त्तन इस बात का परिचायक है कि कोई एक निश्चित इलेक्ट्रॉन-विन्यास के बाद, उसके आगे होने वाले समरूप इलेक्ट्रॉन वितरण के कारण ही गुणों मे समानता होती है। इस प्रकार प्रारम्भ मे आनुभविक (empirically) तौर पर तैयार की गई तत्त्वो की सारिणी की व्याख्या तत्त्वों के परमाणुओं के इलेक्ट्रॉन विन्यास द्वारा हो जाती है। सारणी में एक विशेषता यह है कि इस प्रकार तत्त्वों को लिखने में वे स्वतः ही अपने परमाणु क्रमांक 'Z' (atomic number) के क्रम में आ जाते हैं। और यही मार्मिक के बाहर के

इलेक्ट्रॉन की संख्या के बराबर भी होता है। तत्त्वों की आवर्त्त सारणी 8·4 में दिखाई गई है। अनुच्छेद 8·7 में वर्णित इलेक्ट्रॉन विन्यास में हमने देखा कि प्रथम ग्रुप में आने वाले सोडियम पोटेशियम आदि तत्त्वों के परमाणुओं के इलेक्ट्रॉन-विन्यास समरूप हैं; बन्द-कोश संरचना के बाद एक इलेक्ट्रॉन। द्वितीय ग्रुप में (बन्द कोश संरचना के बाद दो बाहरी इलेक्ट्रॉन) और सप्तम ग्रुप में, फ्लोरीन, क्लोरीन आदि (बन्द कोश संरचना के एक इलेक्ट्रॉन कम) भी इसी प्रकार समरूप इलेक्ट्रॉन विन्यास है। कॉपर (Cu) के 29 इलेक्ट्रॉन इस प्रकार वितरित हैं—$1s^2\ 2s^2p^6\ 3s^2p^6d^{10}\ 4s^1$, इस प्रकार यह भी सामान्यत: एक संयोजकता व्यक्त करता है और प्रथम ग्रुप में स्थान पाता है। तत्त्वों की सारिणीमें उनके परमाणु क्रमांक, रासायनिक (Chemical symbol) और परमाणु भार (*a.m.u.* में, आक्सीजन का परमाणु-भार 16·000 लेकर) भी दिये हुए हैं।

अध्याय में प्रयुक्त समीकरणों का *e. s. u.* में निम्न स्वरूप होगा

कुल उर्जा $$E = -\frac{Ze^2}{2r} \qquad (....8·6)$$

n कक्षा का अर्द्धव्यास $$r_n = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 Ze^2 m_e} \qquad ....(8·8)$$

n कक्षा की कुल उर्जा $$E_n = -\frac{2\pi^2 Z^2 m_e e^4}{n^2 h^2} \qquad ....(8·9)$$

उत्सर्जित फोटोन की आवृति $$\nu = \frac{2\pi^2 Z^2 m_e\, e^4}{h^3}\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right)$$
....(8·10)

तरंग संख्या $$\bar{\nu} = \frac{2\pi^2 Z^2 m_e\, e^4}{h^3 c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) \qquad ....(8·11)$$

उपर्युक्त सभी समीकरणों में हाइड्रोजन के लिये $Z = 1$

रीडवर्ग नियतांक $$R_H = \frac{2\pi^2 m_e\, e^4}{h^3 c} \qquad ....(8·12)$$

संदर्भ पुस्तकें—

Nuclear Physics, Irving Kaplan
Atomic Physics, Rajam
Atomic and Nuclear Physics, Otto Oldenberg
Atomic Physics, An Introduction, Larkin Kerwin
The Structure of Atoms and Molecules, V. Kondratyev

प्रश्न

1. रदरफोर्ड के परमाणु माडल की असमर्थताएँ [illegible] बताते हुए स्पष्ट करिये कि नील्स बोहर ने परमाणु के वर्णन के लिए क्या प्रमुख नवीन धारणा प्रस्तुत की ? उनके अभिगृहीतों का आवेदन करिये।

2. बोहर की n—क्रमांक कक्षा (हाइड्रोजन के लिये) के अर्द्धव्यास के लिए सूत्र प्राप्त करिये।

3. हाइड्रोजन परमाणु में प्रथम कक्षा में इलेक्ट्रान कितने चक्कर प्रति सैकण्ड लगायेगा ?

संकेत—
$$v_1^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r_1} = \frac{e^2 m_e \pi e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e \epsilon_0 h^2} = \frac{e^4}{4\epsilon_0^2 h^2}$$

$$\therefore \quad v_1 = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h} \text{ चक्कर प्रति सैकण्ड, } N = \frac{v_1}{2\pi r_1}$$

$$n = \frac{e^2 m_e \pi e^2}{2\epsilon_0 h 2\pi\epsilon_0 h^2} = \frac{m_e e^4}{4\epsilon_0^2 h^2}$$

4. बोहर की स्थिर अवस्थाओं की कुल उर्जा के लिए समीकरण प्राप्त करिये तथा प्रथम पांच अवस्थाओं की उर्जा का मान इलेक्ट्रान-वोल्ट में ज्ञात करिये।
[उत्तर :—13·6, —3·39, —1·51, —0·85, —0·54 *ev.*]

5. परमाणु के उत्सर्जन स्पैक्ट्रम में केवल रेखायें होती है, क्यों ? हाइड्रोजन के उत्सर्जन स्पैक्ट्रम की रेखाओं की तरंग संख्या के लिए व्यंजक प्राप्त करिये।

6. बोहर के सिद्धान्त की कमियों और सीमाओं का वर्णन करिये।

7. परमाणविक क्षेत्र के वर्णन के लिए आधुनिक धारणाओं का परिचय देते हुए, परमाणु में इलेक्ट्रान की मुख्य चार क्वान्टम संख्याओं का परिचय दीजिये।

8. पाली के अपवर्जन नियम का उल्लेख करिये। इसके अनुसार L और M उपकोश में अधिकतम कितने इलेक्ट्रान रह सकते है, गणना कीजिये।

9. रीड्बर्ग नियतांक को उसके सैद्धान्तिक व्यंजक द्वारा गणना करिये।

10. इलेक्ट्रान का [illegible] द्रव्यमान [illegible] कर रीडबर्ग नियतांक भी हाइड्रोजन और हीलियम के लिये निम्न मान प्राप्त होते हैं—
$R_H = 109677{\cdot}576\ cm^{-1}$ और $R_{He} = 109722{\cdot}267\ cm^{-1}$
हाइड्रोजन परमाणु की संहति और इलेक्ट्रान की संहति का अनुपात ज्ञात करें।
[उत्तर M_H/m_e = 1836]

11. निम्न तत्वों के परमाणुओं का इलेक्ट्रान विन्यास लिखिये
बोरोन, एल्यूमिनियम, क्लोरीन, नियान, कैल्शियम और [illegible]

12. हाइड्रोजन के बोहर की प्रथम कक्षा के अर्द्धव्यास की गणना करि[illegible]
[उत्तर 5·3 [illegible]

13. यदि लाइमन श्रेणी की प्रथम रेखा की तरंग दैर्ध्य 1216 A° हो तो बामर श्रेणी की प्रथम रेखा की तरंग दैर्ध्य ज्ञात करो।

[उत्तर : $6.563 \times 10^{-7} m.$]

14. एक सामान्य हाइड्रोजन परमाणु में से इलेक्ट्रान को पूर्णतः अलग करने के लिये न्यूनतम उर्जा के मान की गणना कीजिये। दिया हुआ है :—

$h = 6.6 \times 10^{-27}$ अर्ग. सैकण्ड

$e = 4.8 \times 10^{-10}$ e. s. u.

$m_e = 9.1 \times 10^{-28}$ ग्राम (राज० वि० वि० 1973)

[संकेत—नियतांकों के मान C. G. S. इकाइयों में दिये हैं, अतः समीकरण (8·9) की सहायता से प्रथम कक्षा में उर्जा की गणना करिये। सामान्य हाइड्रोजन में इलेक्ट्रान प्रथम कक्षा में होगा और उसकी उर्जा होगी]

$$E = -\frac{2\pi^2 m_e e^4}{h^2}$$

$$= -\frac{2 \times (3.14)^2 \times 9.1 \times 10^{-28} \times (4.8 \times 10^{-10})^4}{(6.6 \times 10^{-27})^2} \text{ अर्ग}$$

अतः इलेक्ट्रान को मुक्त करने के लिये इतनी ही धन उर्जा की आवश्यकता होगी। गणना कर इलेक्ट्रान वोल्ट में परिवर्तित कीजिये।

[उत्तर : 13·6 e v.]

15. हाइड्रोजन परमाणु की भिन्न-भिन्न कक्षा की उर्जा-स्तर का चित्र लगभग सही पैमाने पर खींचिये। (राजस्थान वि० वि० 1971)

[उत्तर : देखिये चित्र 8·2]

16. हाइड्रोजन परमाणु के लिये निम्न का मान ज्ञात करिये :—

(अ) स्थल कक्षा (Ground state) में उर्जा का मान इलेक्ट्रान वोल्ट में (संकेत प्र० 14 के अनुसार)

(ब) प्रथम कक्षा की त्रिज्या (संकेत प्र० 12 के अनुसार)।

[उत्तर : 5.3×10^{-11} मीटर]

(स) लाइमन श्रेणी की प्रथम रेखा की तरंग दैर्ध्य

(राजस्थान वि० वि० 1972.)

[संकेत $n_1 = 2$ से $n_2 = 1$,

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{m_e e^4}{b_E^2 h^3 c} - \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)$$
]

[उत्तर : 1216 A°]

9 धन किरणें तथा आइसोटोप

9·1 धन किरणें—हम जानते हैं कि विसर्जन नलिका (Discharge tube) में कैथोड-किरणें उत्पन्न होती हैं जो कैथोड से एनोड की ओर गति करती हैं। ये वस्तुतः ऋण आवेश युक्त इलेक्ट्रान ही होते हैं जो काफी अधिक वेग से एनोड की ओर चलते हैं। विसर्जन नलिका के साथ अपने प्रयोगों के दौरान ही वैज्ञानिक गोल्डस्टीन ने देखा कि यदि



चित्र 9·1

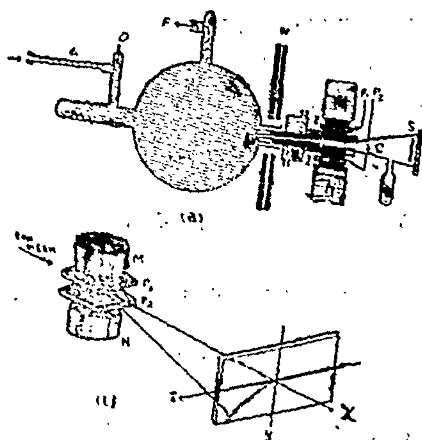
कैथोड छिद्र युक्त हो, तो उसके पीछे की ओर प्रकाश की धारियाँ दिखाई देती हैं। चित्र (9·1) इसका अर्थ उन्होंने यह लगाया कि कैथोड-किरणों के अतिरिक्त कोई अन्य किरणें भी नलिका में उत्पन्न होती हैं जो एनोड से कैथोड की ओर गति करती हैं तथा कैथोड के पीछे प्रकाश की धारियों के रूप में दिखाई देती हैं। उन्होंने इन्हें "कैनाल—किरण" नाम दिया। इनके साथ प्रयोग करने पर ज्ञात हुआ कि विद्युतीय तथा चुम्बकीय क्षेत्र में यह किरणें अपने पथ से विक्षेपित होती हैं और यह विक्षेप कैथोड किरणों के विक्षेप से विपरीत दिशा में होता है। इस प्रकार विद्युत एवं चुम्बकीय क्षेत्र में विक्षेप की दिशा के आधार पर इस निष्कर्ष पर पहुँचा [illegible] में धन विद्युत युक्त कण हैं, अतः इन्हें "धन-किरणें" कहा गया है। [illegible] गैस के आयनित परमाणु हैं जिनके एक (या अधिक) इलेक्ट्रान [illegible] कैथोड किरण के रूप में चले गये हैं। विद्युत और चुम्बकीय क्षेत्र में इन किरणों के विक्षेप का मापन कर उसके द्वारा इनके $\left(\frac{e}{M}\right)$ का मान तथा [illegible] की गई। इनका वेग कैथोड-किरणों के वेग की अपेक्षा [illegible] $\left(\frac{e}{M}\right)$ का मान भी ज्ञात हुआ। इनके अतिरिक्त [illegible]

के परमाणु भार पर निर्भर करता था; परमाणु भार बढ़ने पर कम होता था। हाइ-ड्रोजन के लिये $\left(\frac{e}{M}\right)$ का मान सर्वाधिक आया। इन बातों के आधार पर यह निष्कर्ष निकाला गया कि धन किरणें वास्तव में विसर्जन नलिका में प्रयुक्त गैस के आयनित-परमाणु (ionized atoms) हैं जो एक अथवा दो इलेक्ट्रान कैथोड-किरण के रूप में निकल जाने के बाद एक या दो धन आवेश युक्त रह जाते हैं। स्पष्ट ही इन आयन-कणों की संहति लगभग परमाणु की संहति के बराबर ही रहेगी। अतः धन-किरणों के $\left(\frac{e}{M}\right)$ के मापन के द्वारा इन गैसों के परमाणु-भार की सही सही गणना की जा सकती थी क्योंकि (e) का मान सही सही ज्ञात था।

थामसन की पेरेबोला-विधि

सिद्धान्त—जब धन किरणों को एक समान विस्तार के समान्तर विद्युतीय तथा चुम्बकीय क्षेत्र से गुजारा जाता है, तब यह सिद्ध किया जा सकता है कि ऐसे कण जिनका $\left(\frac{e}{M}\right)$ एक समान है और वेग भिन्न भिन्न हैं, अपने पक्ष से विक्षेपित हो पेरेबोला बनायेंगे। अतः स्क्रीन पर अथवा फोटोग्राफिक प्लेट पर प्राप्त पेरेबोला के द्वारा मापन कर कणों के $\left(\frac{e}{M}\right)$ की गणना की जा सकती है। तथा यदि 'e' ज्ञात हो, तो M उसकी संहति ज्ञात हो जाती है।

उपकरण—थामसन द्वारा प्रयुक्त एक उपकरण में विसर्जन नली एक बड़े गोलाकार काँच के पात्र A के रूप में होती है जिसमें एनोड एल्युमिनियम की छड़ D होता है और कैथोड K ठोस बेलन के रूप में जिसकी अक्ष के अनुदिश बारीक छिद्र रहता है। इसमें से धन-कण अक्ष के अनुदिश गति कर एक बारीक कण-किरण-पुंज के रूप में निकलते हैं। कैथोड के चारों ओर ठंडे पानी का प्रवाह कर उसमें उत्पन्न ऊष्मा को निरन्तर अवशोषित किया जाता है। पात्र में उपयुक्त दाब पर प्रायोगिक गैस प्रवाहित होती रहती है (देखिये चित्र 9·2 अ) इस धन कणों की धारा को समान्तर विद्युत और



चित्र 9·2

चुम्बकीय क्षेत्र में से गुजारा जाता है। इस हेतु एक विद्युत-चुम्बक के ध्रुव M और N के बीच से कण निकलते हैं। इन्हीं ध्रुवों के साथ, परन्तु उनसे विद्युत-रोधी (insulating) पत्तियों द्वारा विलगित, दो नर्म लोहे की प्लेटें P_1 और P_2 रहती है जो विद्युत चुम्बक के पोल-पीस (pole-pieces) का कार्य करती है तथा इन्हीं पर विभवान्तर लगाकर इनके बीच विद्युत क्षेत्र स्थापित किया जाता है। इस प्रकार दोनों क्षेत्र (दिशा-ऊपर से नीचे की ओर) इन दोनों प्लेटों के बीच के स्थान में रहते हैं। यहाँ धन कणों पर विद्युत क्षेत्र के कारण उसकी ही दिशा में (ऊपर से नीचे की ओर −Y अक्ष के अनुदिश) बल लगता है तथा चुम्बकीय क्षेत्र के कारण उसके लम्बवत (कागज के तल से लम्बवत ऊपर की ओर −Z अक्ष के अनुदिश) बल लगता है। देखिये चित्र 9·2 (ब) इसके बाद विक्षेपित कण क्षेत्र विहीन भाग में गति करते हुए एक फ्लोरेसेन्ट पर्दे पर या फोटोग्राफिक प्लेट पर आते हैं। विसर्जन चैम्बर में चुम्बकीय क्षेत्र के कारण प्रभाव न पड़ने देने के लिए उसके आगे नर्म लोह की पट्टिका W रख दी जाती है।

गणितीय विश्लेषण—विद्युत क्षेत्र और चुम्बकीय क्षेत्र दोनों, प्लेट P_1 और P_2 के बीच के स्थान में ऊपर से नीचे की ओर कार्य करते हैं। माना इन दोनों की तीव्रता $\vec{E}$ तथा $\vec{B}$ है और प्लेट की लम्बाई 'l' है। धन कणों पर $\vec{E}$ है और क्षेत्र के कारण बल Y-दिशा में होता है अथा उसका मान $=Ee$ जब कि 'e' कण पर धन आवेश का मान है जो कि इलेक्ट्रान के आवेश के बराबर है (यह कभी कभी दो या अधिक इलेक्ट्रान आवेश के बराबर भी हो सकता है) यदि धन कण का वेग (X दिशा में) v हो, तो प्लेटों के बीच विद्युत क्षेत्र में से निकलने में लगा समय,

$$t = \frac{l}{v} \qquad \ldots(9 \cdot 1)$$

y-दिशा में कण का त्वरण $= \dfrac{Ee}{M}$

जब कि 'M' कण की संहति है

∴ y-दिशा में कण का विस्थापन $y = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{E_e}{M}\,t^2$

(गति के समीकरण $S = \frac{1}{2} ft^2$ द्वारा)

't' का मान रखने पर $y = \frac{1}{2}\,\dfrac{Ee}{M}\,\dfrac{l^2}{v^2}$

प्लेटों के केन्द्र से 'D' दूरी पर स्थित स्क्रीन पर अथवा फोटोग्राफिक दिशा में विक्षेप उपयुक्त विक्षेप 'y' पर तथा दूरी 'D' पर निर्भर

विवेचन के लिये यह माना जा सकता है कि धन-कण प्लेटों के बीच के स्थान के मध्य के मध्य बिन्दु से सीधा विक्षेपित होता है तथा प्लेटों के सिरों पर उपर्युक्त विक्षेप 'y' होता है। (देखिये उदाहरण 9·1)

अतः D दूरी पर विक्षेप Y होगा :

$$Y=\frac{Ee}{2M}\,\frac{l^2}{v^2}\,\frac{D}{\frac{l}{2}}$$

या
$$Y=\frac{Eel D}{Mv^2} \qquad ....(9·3)$$

[सब राशियाँ M. K. S. प्रणाली में हैं]

अब इसी प्रकार चुम्बकीय क्षेत्र में विक्षेप ज्ञात कर सकते हैं। Y-दिशा में चुम्बकीय क्षेत्र के कारण धन-कण पर चित्र 9·2 (ख) के अनुसार Z-दिशा में होगा जो कागज के तल लम्बवत ऊपर की ओर है। वस्तुतः बल प्रत्येक बिन्दु पर कण के वेग और चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा के लम्बवत होता है, अतः कण का पथ X—Z तल में वृत्ताकार होगा जिसका अर्द्धव्यास निम्न समीकरण के अनुसार होगा :

कण पर बल $=Bev=$ अभिकेन्द्रीय बल

$$\therefore \quad Bev=\frac{Mv^2}{r}$$

$$\therefore \quad r=\frac{Mv}{Be} \qquad ....(9·4)$$

[सभी राशियाँ M. K. S. प्रणाली में हैं]

वृत्ताकार पथ में गति करने के कारण धन-कण का Z-दिशा में विस्थापन चित्र 9·3 की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है। वृत्त के गुण के अनुसार,

$$l^2=z\,(2r-z)$$
$$=z.\,2r \text{ लगभग}$$

$$\therefore \quad z=\frac{l^2}{2r} \qquad ....(9·5)$$

r का मान (9·4) से रखने पर

$$z=\frac{l^2\,Be}{2\,Mv} \qquad ....(9·6)$$

['z' का मान, धन-कण पर बल का सदैव Z-दिशा में मानकर करने पर

भी कोई त्रुटि नहीं होगी क्योंकि चुम्बकीय क्षेत्र की लम्बाई l कम है, v अधिक होगी है और r काफी अधिक होगा।

Z-दिशा में बल $=$ Bev

$$\therefore \quad \text{त्वरण} = \frac{Bev}{M}$$

$$\therefore \quad z = \frac{1}{2}\frac{Bev}{M}t^2 = \frac{1}{2}\frac{Bev}{M}\frac{l^2}{v^2} = \frac{Bel^2}{2Mv} \quad ...(9{\cdot}7)$$

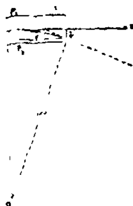
जो कि (9 6) के समान ही है।

विद्युत क्षेत्र के विक्षेप के समान ही D दूरी पर स्थित पर्दे पर विक्षेप,

$$Z = z\frac{D}{l/2} = \frac{Bel^2}{2Mv}\cdot\frac{D}{l}2$$

$$\text{या} \quad Z = \frac{BelD}{Mv} \quad ..(9{\cdot}8)$$

विक्षेप Y और Z, $\left(\frac{e}{M}\right)$ तथा v पर निर्भर करते है। भिन्न-भिन्न वेग के धन-कण किस प्रकार के वक्र पर आयेंगे यह ज्ञात करने के लिए (9·3) और (9·8) में v का विलोपन कर Y और Z का सम्बन्ध ज्ञात करना होगा। (9·8) का वर्ग करने पर



चित्र 9 3

$$Z^2 = \frac{B^2e^2l^2D^2}{M^2v^2}$$

v^2 का मान (9·3) से रखने पर

$$Z^2 = \frac{B^2e^2l^2D^2}{M^2\dfrac{EelD}{MY}}$$

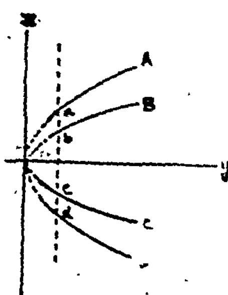
$$\text{या} \quad Z^2 = \frac{B^2lD}{E}\left(\frac{e}{M}\right) \quad ...(9{\cdot}9)$$

$$\text{या} \quad Z^2 = K\left(\frac{e}{M}\right)Y$$

जब कि K दिये हुए उपकरण के लिये, क्षेत्रों के नियत मान के लिए एक स्थिरांक है। ये समीकरण एक परवलय (Parabola) को व्यक्त करते हैं। अतः वे सब कण जिनका $\left(\frac{e}{M}\right)$ एक समान है, पर्दे पर एक परवलय बनायेंगे। यदि धन-कणों में अलग-अलग संहति के कण हैं और सब पर आवेश एक समान, 'e' है तो अलग-अलग संहति के कण अलग-अलग परवलय बनायेंगे जिनसे मापन कर $\left(\frac{e}{M}\right)$ की गणना की जा सकती है।

परवलय से $\left(\frac{e}{M}\right)$ की गणना—एक समान $\left(\frac{e}{M}\right)$ के धन कणों द्वारा

चित्र 9·4 के अनुसार एक परवलय 'A' बनेगा। यदि इनके अतिरिक्त कोई इनसे अधिक संहति 'M′' के कण भी हैं तो एक अन्य परवलय 'B' बनेगा। इनमें यदि एक प्रकार के कणों की संहति (M) ज्ञात हो तो (M′) की गणना की जा सकती है। सामान्यतः पर्दे की स्थिति में फोटोग्राफिक प्लेट लगाकर पर्याप्त समय तक उद्भासन (Exposure) किया जाता है और तब उतने ही समय के लिये चुम्बकीय क्षेत्र को विपरीत दिशा में करके उद्भासन किया जाता है, जिससे चुम्बकीय क्षेत्र का विक्षेप विपरीत हो जायेगा और परवलय के अंश 'C' और 'D' बनेंगे। यदि इन चित्रों में एक Z-अक्ष के समान्तर रेखा $a\ b\ c\ d$ खींची जाय तो इसके लिये 'y' का एक ही मान, y' है। अतः परवलय A के लिए



चित्र 9·4

$$Z'_A = \frac{ad}{2}$$

तथा परवलय B के लिये $\quad Z_B = \frac{bc}{2}$

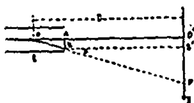
∴ समीकरण द्वारा (9·10) द्वारा

$$\frac{(Z_A)^2}{(Z_B)^2} = \left(\frac{ad}{bc}\right)^2 = \frac{M'}{M}\ \frac{y'}{y'} = \frac{M'}{M} \qquad ....(9{\cdot}11)$$

इस प्रकार 'M' ज्ञात होने 'पर' M′ की गणना की जा सकती है। साथ ही परवलय की तीव्रता (Intensity) सम्बन्धित कण की बाहुल्यता (Abundance) की द्योतक होती है।

इस प्रकार के प्रयोगों द्वारा वैज्ञानिक सामसन H^+, H_2^+, O^+, O_2^+, CO^+ आदि कई कणों की ज्ञात संहति की सहायता से कई अन्य कणों की संहति ज्ञात कर सके। उन्होंने यह पाया कि विभिन्न कणों की संहति लगभग पूर्ण संख्या (*a. m. u.* में) आती है तथा कई सामान्य गैसों में वस्तुतः एक से अधिक प्रकार के कण होते हैं जिनका कि रासायनिक अथवा अन्य विधि से विभेद नहीं किया जा सकता।

उदाहरण 9·1—सिद्ध कीजिये कि विद्युत क्षेत्र के कारण 'D' दूरी पर स्थित पर्दे पर धन-कणों का वही विक्षेप होता है जैसे कि धन कण विद्युत क्षेत्र के केन्द्र से सीधी रेखा में विक्षेपित होकर पर्दे पर पहुँचते हों। जबकि वास्तव में कण विद्युत क्षेत्र में परवलयाकार पथ में गति कर, उसके बाद उसके स्पर्श रेखा के अनुदिश पर्दे पर पहुँचते हैं।



चित्र 9·5

अध्याय में प्रयुक्त संकेताक्षरों (Symbols) का उपयोग करते हुए, विद्युत क्षेत्र के अन्त में *y*-दिशा में विक्षेप :

$$AB = y = \frac{1}{2}\frac{Ee}{M}\frac{l^2}{v^2}\text{ , समीकरण 9·2}$$

यहाँ पर कण के वेग की दिशा प्रारम्भिक दिशा OO' से θ कोण बनाती है। स्पष्ट ही, $\tan\theta = \frac{v_y}{v}$

जबकि v_y, बिन्दु B पर *y*-दिशा में वेग है।

$$\text{क्योंकि त्वरण} = \frac{Ee}{M} \quad \therefore v_y = \frac{Ee}{M}t = \frac{Ee}{M}\frac{l}{v} \qquad ...(9·12)$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{\frac{Ee}{M}\frac{l}{v}}{v} = \frac{Eel}{Mv^2} \qquad ....(9·13)$$

अतः विक्षेप $B'P = BB' \tan\theta$

$$= \left(D - \frac{l}{2}\right)\frac{Eel}{Mv^2}$$

अतः कुल विक्षेप $O'P = O'B' + B'P = AB + B'P$

$$\text{अर्थात } O'P = Y = \frac{1}{2}\frac{Ee}{M}\frac{l^2}{v^2} + \left(D - \frac{l}{2}\right)\frac{Ee}{M}$$

$$\frac{1}{2}\frac{Ee}{M}\frac{l^2}{v^2}+\frac{Ee/D}{Mv^2}-\frac{Ee l^2}{2Mv^2}$$

या $$Y=\frac{Ee l D}{Mv^2}$$ ....(9·14)

यह पहले गणना किये हुए मान, समीकरण (9·3), के बराबर ही है तथा स्पष्ट ही यह मान OO'. tan θ या D tan θ के बराबर है $\left(=\frac{Eel}{Mv^2}.D\right)$ जो कि विक्षेप तब होगा जब धन कण O बिन्दु से सीधे θ कोण बनाते हुए पर्दे तक चले जाँय जैसा कि चित्र में बिन्दु रेखा OP द्वारा बतलाया गया है।

9·3. बेनब्रिज मास-स्पेक्ट्रोमीटर (Bainbridge Mass spectrometer)

सिद्धान्त—बेनब्रिज के द्रव्यमान स्पेक्ट्रोमीटर का कार्य 'वेग-चयनक' (velocity selector) के सिद्धान्त पर आधारित है। इसमें एक सीमित क्षेत्र में क्रासित (Crossed) समतवंन विद्युतीय तथा चुम्बकीय क्षेत्र होते हैं (ये क्षेत्र विपरीत दिशाओं में बल लगाते हैं)। इस क्षेत्र में से एक निश्चित वेग के कण ही अवक्षेपित निकल सकते हैं, जिसका मान दोनों क्षेत्रों के मान से निश्चित होता है। इसके बाद कण उनके वेग के लम्बवत् चुम्बकीय क्षेत्र में प्रवेश करते हैं और वृत्तीय पथ में गति करते हैं जिसकी त्रिज्या कण की संहति के समानुपाती होगी।

उपकरण—S_1 और S_2 दो बिन्दुवत छिद्र हैं जिनके ऊपर की ओर धन-आयन का स्रोत रहता है। ये आयन 'वेग-चयनक' के प्रदेश V_1 V_2 में से गुजरते हैं। यहाँ एक चुम्बकीय क्षेत्र 'B' कागज के तल के लम्बवत दिशा में रहता है तथा प्लेट P_1 और P_2 के बीच विद्युत क्षेत्र E रहता है। चित्र में प्रदर्शित व्यवस्था में 'B' ऊपर की ओर है। इसके अन्त में तीसरा छिद्र S_3 है जिसके बाद आयन चित्र (9·6) के अनुसार समतवंन क्षेत्र B_1 में गति करते हैं, यह भी कागज के तल के लम्बवत् होता है। धन आयन के आधा वृत्त में गति करने के बाद वे एक फोटोग्राफिक प्लेट F पर टकराते हैं।

गणितीय विश्लेषण—

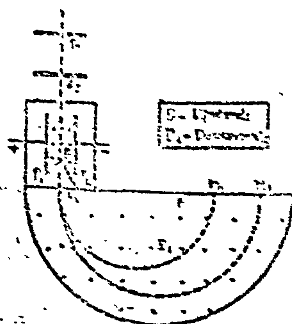
वेग चयनक—विद्युत क्षेत्र E तथा चुम्बकीय क्षेत्र B विपरीत दिशाओं में बल लगाते हैं; अतः उन आयन के लिए परिणामी विक्षेप शून्य होगा जिनके वेग V निम्न समीकरण के अनुसार हों :

$$Ee=BeV$$

(बलों के मान बराबर करने पर)

$$\therefore V=\frac{E}{B}$$ ....(9·15)

तब छिद्र S_3 में से एक विशेष वेग के आयन ही



चित्र 9·6

$$\frac{75 \times 35 + 25 \times 37}{10} = 35 \cdot 5$$

अतः द्रव्यमान स्पेक्ट्रोमीटर के प्रयोगों के फलस्वरूप आइसोटोप की खोज हुई, जिनका द्रव्यमान पूर्ण संख्या में होता है। साथ ही सामान्य तत्त्व में आइसोटोप का मिश्रण होने के कारण उसके प्रभावी-परमाणु भार का पूर्ण संख्या न होना भी समझा जा सका।

हम जानते हैं कि परमाणु का द्रव्यमान मुख्यतः उसके नाभिक में विद्यमान प्रोटोन और न्यूट्रान के कारण होता है और प्रोटोन की संख्या निश्चित (परमाणु-क्रमांक के बराबर) है, अतः स्पष्ट है कि आइसोटोप का भिन्न द्रव्यमान न्यूट्रान संख्या के अनुसार होता है। उदाहरण के लिए नियोन (22) में दो न्यूट्रान अधिक हैं (नियान, 20 की अपेक्षा)। इनके रासायनिक गुण, प्रकाशीय-स्पेक्ट्रम आदि बिल्कुल एक-समान होंगे, इसीलिए पहले इनकी जानकारी नहीं हो सकी। विभिन्न द्रव्यमान-स्पेक्ट्रोमीटर के द्वारा ज्ञात द्रव्यमानों के अध्ययन के फलस्वरूप ज्ञात हुआ कि अधिकांश तत्त्वों के आइसोटोप होते हैं। सारिणी 9·1 में कुछ तत्त्वों के आइसोटोप और कोष्ठक में प्राकृतिक रूप से प्राप्त तत्त्व में उनकी बाहुल्यता दी गयी है—

सारिणी 9·1

परमाणु-क्रमांक	तत्त्व	आइसोटोपीय रचना तथा बाहुल्यता
1	हाइड्रोजन	H^1(99·985) ; H^2(0·015)
6	कार्बन	C^{12}(98·9) ; C^{13}(1·1)
7	नाइट्रोजन	N^{14}(99·64) ; N^{15}(0·36)
8	ऑक्सीजन	O^{16}(99·76) ; O^{17}(0·04) ; O^{18}(0·20)
17	क्लोरीन	Cl^{35}(75·4) ; Cl^{37}(24·6)
30	जिंक	Z_n^{64}(48·89) ; Z_n^{66}(27·81) Z_n^{67}(4·07) ; Z_n^{68}(18·61) ; Z_n^{70}(0·62)

कुछ तत्त्वों के कुछ आइसोटोप रेडियोएक्टिव (होते हैं अर्थात् उनमें से रेडियोएक्टिव किरणें निकलती हैं इन्हें रेडियो आइसोटोप कहते हैं। इनके कुछ

उदाहरण निम्न हैं—स्ट्रॉन्शियम (S_r^{90}), सीज़ियम (C_s^{137}), आयोडीन (I^{131} तथा I^{129}), सोडियम (Na^{24}), फॉस्फोरस (P^{32}), कैलशियम (C_a^{45}), कोबाल्ट (C_0^{60}) नाभिकीय

रेडियो आइसोटोप का एक मुख्य स्रोत नाभिकीय-विखण्डन के उत्पाद (Products) हैं। रेडियो आइसोटोप का ट्रेसर के रूप में तथा अन्य चिकित्सा-सम्बन्धी उपयोग बहुत महत्त्वपूर्ण हो गये हैं। ऐसे अधिकांश उपयोगी रेडियो आइसोटोप नाभिकीय रिएक्टर में मंदित न्यूट्रान की बौछार में तत्त्व को रखकर बनाये जाते हैं।

उदाहरण 9·2. एक समान वेग $\vec{v}$ से गतिशील प्रोटोन कण, उनकी गति के लम्बवत् 1·67 न्यूटन/एम्पीयर-मीटर के चुम्बकीय क्षेत्र में 0·05 मीटर अर्द्धव्यास के वृत्तीय पथ में मुड़ जाते हैं। उनके वेग $\vec{v}$ की गणना करो। प्रोटोन का द्रव्यमान $=1.67\times10^{-27}$ कि० ग्रा०, तथा आवेश $=1.6\times10^{-19}$ कूलाम।

समीकरण 9·4 का उपयोग करके—

$$r=\frac{Mv}{Be}$$

$$0.05=\frac{1.67\times10^{-27}\times v}{1.67\times1.6\times10^{-19}}$$

$$\therefore \quad v=\frac{1.6\times1.6\times10^{-19}\times0.05}{1.67\times10^{-27}}$$

$$=8\times10^{6} \text{ मीटर/सेकण्ड}$$ उत्तर

उदाहरण 9·3. बेनब्रिज-द्रव्यमान-स्पेक्ट्रोमीटर में वेग चयनक 3.35×10^{6} मीटर/सेकण्ड वेग के कणों को ही जाने देता है, जो स्लिट से निकल कर अर्द्धवृत्त पूरा कर स्लिट से 0·14 मीटर की दूरी पर प्लेट से टकराते हैं। यदि कणों पर आवेश 1.6×10^{-19} कूलाम हो तथा चुम्बकीय क्षेत्र (B_1) का मान 0·5 न्यूटन/एम्पीयर मीटर हो, तो कणों का द्रव्यमान ज्ञात करो।

दिया हुआ है—

$B_1=0.5$ न्यूटन/एम्पीयर मीटर

$V=3.35\times10^{6}$ मीटर/सेकण्ड

$e=1.6\times10^{-19}$ कूलाम

कण स्लिट से 0·14 मीटर की दूरी पर टकराते हैं, यह उनके वृत्तीय पथ का व्यास हुआ। अतः अर्द्धव्यास $r=0.07$ मीटर।

समीकरण (9·16) में प्रयुक्त करने पर—

$$M = \frac{0.5 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 0.07}{3.35 \times 10^{6}}$$

$$= 1.67 \times 10^{-27}$$

∴ कणों का द्रव्यमान $M = 1.67 \times 10^{-27}$ कि० ग्रा० उत्तर

प्रश्न

1. धन-किरणें क्या हैं ? थामसन की पेरेबोला-विधि का वर्णन करिये तथा उसके द्वारा $\left[\frac{e}{M}\right]$ की गणना किस प्रकार की जाती है, स्पष्ट करिये ?

2. (i) थामसन की विधि में विद्युत क्षेत्र के कारण उत्पन्न विक्षेप के लिए समीकरण ज्ञात करिये ?

   (ii) 'वेग-चयनक' का सिद्धान्त स्पष्ट करिये। यदि वेग-चयनक में चुम्बकीय क्षेत्र 0·5 न्यूटन/एम्पीयर-मीटर हो तथा प्लेटों के बीच विभवान्तर 500 वोल्ट हो तथा प्लेटों के बीच दूरी 2 से० मी० हो, तो किस वेग के आयन सीधे निकल सकेंगे।

   [उत्तर : $V = 5 \times 10^{4}$ मीटर/सैकण्ड]

3. बेन-ब्रिज द्रव्यमान-स्पेक्ट्रोमीटर का वर्णन कीजिये तथा धन-आयन के द्रव्यमान के लिए समीकरण प्राप्त करिये।

4. धन-कणों के द्रव्यमान मापन के फलस्वरूप अपूर्ण संख्या में द्रव्यमान होना किस प्रकार समझा जा सका ? 'आइसोटोप' क्या होते हैं ? किसी तत्त्व के विभिन्न 'आइसोटोप' में क्या अन्तर होता है ?

5. थामसन की पेरेबोला विधि में हाइड्रोजन गैस के साथ प्रयोग में, चुम्बकीय क्षेत्र का मान 0·5 न्यूटन/एम्पीयर मीटर था। धन कणों के पथ का अर्द्धव्यास क्या था ? $\frac{e}{M} = 9.58 \times 10^{7}$ कूलम्ब/कि०ग्रा० तथा $v = 10^{6}$ मीटर/सैकण्ड

   [उत्तर : 0·02 मीटर]

10 द्रव्य तरंग

10 1. दिब्रोली की परिकल्पना

प्रयोगो से पता चलता है कि "प्रकाश" की प्रकृति तरंग के रूप में है। प्रकाश की तरंग प्रकृति के पक्ष में मुख्य घटना प्रकाश का व्यतिकरण (Interference) है। 'व्यतिकरण" तरंगो का महत्त्वपूर्ण गुण है। यंग का द्वि-छिद्र प्रयोग यह साबित करता है कि प्रकाश की वास्तविक प्रकृति तरंग के रूप में है।

पिछली शताब्दी के अंत में कुछ ऐसे प्रायोगिक सत्य सामने आये जिन्हें प्रकाश की "तरंग प्रकृति" मानकर समझाया नहीं जा सकता। उदाहरणार्थ किसी धातु पर पराबैंगनी प्रकाश डाला जाये तो धातु से इलेक्ट्रॉन तत्काल उत्सर्जित होते हैं। इस प्रभाव को प्रकाश वैद्युत प्रभाव (Photo electric effect) कहते हैं, तथा इसकी व्याख्या प्रकाश की तरंग प्रकृति मानकर नही की जा सकती। एक अन्य प्रयोग जो कि प्रकाश की "कणिका प्रकृति" (Particle nature) बहुत ही स्पष्ट रूप में प्रदर्शित करता है, वह कॉम्पटन प्रभाव है। अर्थात जहाँ पर प्रकाश तथा पदार्थ के मध्य यदि कोई अन्योन्य क्रिया होती है, वहाँ पर प्रकाश की "कणिका प्रकृति" स्पष्टतया सामने आती है।

प्रकाश का उत्सर्जन अथवा अवशोषण में निहित एक निश्चित ऊर्जा का होना प्रकाश की क्वान्टम प्रकृति प्रदर्शित करता है। सर्वप्रथम आइन्सटीन ने प्रकाश की किरण को "फ़ोटोन" की फ्लक्स की संज्ञा दी। प्रत्येक फोटोन की एक निश्चित ऊर्जा, निश्चित संवेग, निश्चित संहति होती है।

$$\text{फोटोन की ऊर्जा } E = h\nu \qquad (10\ 1)$$

जहाँ पर h प्लांक स्थिरांक है ($h = 6\ 62 \times 10^{-34}$ जूल सकेण्ड) तथा ν प्रकाश की आवृत्ति है।

फोटोन की संहति निम्न प्रकार से मालूम की जा सकती है :

चूंकि आइन्स्टाइन का ऊर्जा-संहति सूत्र

$$E = mc^2 \qquad ....(10\cdot2)$$

अतः (i) तथा (2) की तुलना करने पर फोटोन की संहति

$$m_{photon} = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \qquad ....(10\cdot3)$$

फोटोन का संवेग

$$= m_{photon} \times c$$ (चूंकि फोटोन प्रकाश के वेग से गतिमान है।)

$$= \frac{h\nu}{c^2} \times c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \qquad ....(10\cdot4)$$

$(\therefore\ c = \nu\lambda)$

यहां पर यह स्पष्ट कर देना आवश्यक है कि फोटोन की संहति केवल इसी कारण से है कि यह प्रकाश के वेग से गतिमान है। फोटोन का विराम द्रव्यमान (rest mass) शून्य होता है। केवल इसी मुख्य गुण के कारण फोटोन अन्य कणों से बिलकुल भिन्न है। जैसे : इलेक्ट्रॉन, प्रोटोन, न्यूट्रॉन इत्यादि।

1924 में फ्रांस के वैज्ञानिक दि ब्रोली (de Broglie) ने यह सुझाव दिया कि न केवल फोटोन की ही तरंग प्रकृति होती है बल्कि प्रत्येक अन्य 'कण' भी तरंग प्रकृति रखते हैं। उदाहरणार्थ उचित परिस्थितियों में न्यूट्रॉन, इलेक्ट्रॉन, प्रोटोन इत्यादि तरंग प्रकृति प्रकट करेंगे। दिब्रोली ने, किसी कण जिसकी ऊर्जा E है तथा संवेग p है, तथा उसकी दिब्रोली तरंग दैर्घ्य λ तथा आवृत्ति ν है, के लिए निम्न सम्बन्ध बतलाये :—

$$\boxed{E = h\nu;\quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}} \qquad ....(10\cdot5)$$

सूत्र (10·5) दिब्रोली तरंग की तरंग दैर्घ्य के लिए व्यंजक है। इस सूत्र में m कण की संहति है जो कि कण विराम द्रव्यमान (rest mass) m_0 से निम्न सूत्र से सम्बन्धित है :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$ (v कण का वेग है, c प्रकाश का वेग है)

भौतिकी में यह महत्वपूर्ण व्यापकीकरण (generalisation) है जहां पर "कण" तथा 'तरंग' प्रकृति के द्योतक क्रमशः p तथा λ एक सूत्र में बंधे हुए हैं। प्रश्न यह है कि यदि कोई कण 'तरंग' की तरह व्यवहार कर सकता है तो फिर उसे 'कण'

की संज्ञा क्यों दी । 'कण' वास्तव में एक निश्चित आकार इत्यादि रखता है तो फिर उसका व्यवहार 'तरंग' की तरह कहाँ हुआ ? इसे समझने के लिए हम एक टेनिस गेंद का ही उदाहरण लें जिसकी संहति $m=100$ gm., (लगभग) तथा जो 20 m/sec के वेग से जा रही है तो इस गेंद से सम्बद्ध डिब्रोली तरंगों की तरंग दैर्ध्य

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{6{\cdot}62\times10^{-31}}{{\cdot}1\times20}=3{\cdot}31\times10^{-34}\,m$$

स्पष्ट है कि तरंग दैर्ध्य इतनी सूक्ष्म है कि जिसके कारण 'कण' की 'तरंग प्रकृति,' को आसानी से मालूम नहीं किया जा सकता है । इसलिए "टेनिस की गेंद" को 'कण' की संज्ञा देना उचित है । इसके विपरीत यदि कोई इलेक्ट्रॉन जिसका वेग" माना कि $5{\cdot}8\times10^{7}$ m/sec है, तो इस इलेक्ट्रॉन से सम्बद्ध डिब्रोली तरंगो की तरंग दैर्ध्य

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{mv}=\frac{6{\cdot}62\,10^{-31}}{9{\cdot}1\times10^{-31}\times5{\cdot}8\times10^{7}}\,m$$

(∴ इलेक्ट्रॉन की संहति $m=9\,1\times10^{-31}$Kg.

$=1\,23\times10^{-11}m$

$=0\,123°A=10^{-8}$ cms. (Approximately)

इलेक्ट्रॉन की डिब्रोली तरंग दैर्ध्य X—rays की तरंग दैर्ध्य के लगभग बराबर है । यदि इलेक्ट्रॉन को ऐसी ग्रेटिंग में से गुजारा जाय जिसमें रिक्त स्थान का आकार इलेक्ट्रॉन की डिब्रोली तरंग दैर्ध्य के लगभग बराबर हो, तो स्पष्ट है कि इलेक्ट्रॉन की तरंग प्रकृति उभर आयेगी । उदाहरणार्थ ऐसी ग्रेटिंग प्रकृति ने दे रखी है जैसे निकिल क्रिस्टल । क्रिस्टल एक ग्रेटिंग की ही तरह कार्य करता है । यदि इलेक्ट्रॉन पुंज इस क्रिस्टल पर आपाती हो तो "प्रकीर्ण इलेक्ट्रॉनों (Scattered electrons) की संख्या किसी एक दिशा में बहुत अधिक होती है तथा किसी अन्य दिशा में कम । अर्थात् इलेक्ट्रॉन भी प्रकाश की तरह किसी विशेष दिशा में अधिकतम तथा न्यूनतम पहुँचते हैं । अतः इस प्रयोग में इलेक्ट्रॉन का व्यवहार "तरंग" की तरह है । अतः डिब्रोली के अनुसार पदार्थ की द्वि प्रकृति (dual nature) अर्थात 'तरंग' तथा 'कण' दोनों ही प्रकृति सम्भव है । जब पदार्थ का व्यवहार 'कण' की तरह होता है तो उसकी 'तरंग' प्रकृति नहीं उभरती, इसके विपरीत जब पदार्थ किसी विशेष परिस्थितियों में 'तरंग' की तरह व्यवहार करता है तो उसकी कण प्रकृति नहीं उभरती । अतः पदार्थ की यह द्वि प्रकृति एक दूसरे के विरोधी गुण नहीं है बल्कि एक दूसरे का परिपूरक है । दूसरे शब्दों में 'तरंग' तथा 'कण' स्वरूप पदार्थ के दो विशेष प्ररूप (manifestations) हैं ।

10·2. बोहर की ऊर्जा कक्षों की व्याख्या (Explanation of Bohr's orbits on the basis of matter of waves)—

हाइड्रोजन परमाणु की व्याख्या करते समय बोर ने परमाणु को एक क्वान्टम तंत्र (quantum system) माना जिसमें कि इलेक्ट्रॉन न्यूक्लिअस के चारों ओर चक्कर लगाते हुए केवल उन्हीं कक्षों में रह सकते हैं जिनमें इलेक्ट्रॉन का कोणीय संवेग $\frac{h}{2\pi}$ के सरल गुणा होता है।

$$mvr=\frac{nh}{2\pi} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots)$$

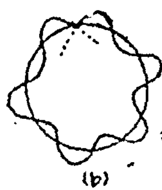
बोर की यह क्वान्टम शर्त आसानी से दिब्रोली तरंगों के आधार पर समझायी जा सकती है। परमाणु में निहित इलेक्ट्रॉन केवल उन्हीं कक्षों में रह सकते हैं जिनमें इलेक्ट्रॉन की दिब्रोली तरंग दैर्घ्य का सरल गुणा कक्ष की परिधि के बराबर हो। यदि λ इलेक्ट्रॉन की दिब्रोली तरंगों की तरंग दैर्घ्य है तथा r इलेक्ट्रॉन की कक्षा की त्रिज्या है तो

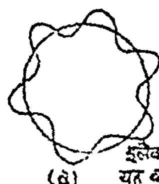
$$2\pi r=n\lambda \qquad \text{जहाँ पर } n=1, 2, \ldots\ldots$$

अथवा
$$2\pi r=n\frac{h}{mv}$$

अथवा
$$mvr=\frac{nh}{2\pi} \qquad \ldots(10\cdot6)$$

अतः हम पुनः क्वान्टम शर्त प्राप्त कर सकते हैं। बोर की ऊर्जा कक्षों की इस प्रकार से व्याख्या बहुत ही महत्त्वपूर्ण है। यहाँ से ही नयी भौतिकी जिसे क्वान्टम यान्त्रिकी कहते हैं, का प्रादुर्भाव हुआ। चित्र 10·1 (*a*), (*b*) में यह





चित्र 10·1

प्रदर्शित किया गया है कि इलेक्ट्रॉन प्रथम कक्ष (*b*) में नहीं रह सकता अर्थात् यह कक्ष इलेक्ट्रॉन की कक्ष नहीं है क्योंकि इसमें इलेक्ट्रॉन से सम्बद्ध दिब्रोली तरंग पूर्ण रूपेण ठीक नहीं बैठती, अपितु वे एक दूसरे को काटती हैं। चित्र 10·1 (*a*) में

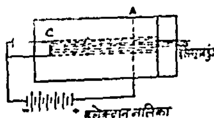
दिखायी गई कक्ष इलेक्ट्रॉन के लिए एक सम्भव कक्ष है, क्योंकि इसमें तरंगों की एक पूरी संख्या कक्ष के चारों ओर है। इलेक्ट्रॉन को तरंग मानने के निम्न दो महत्त्वपूर्ण परिणाम हैं।

(1) इलेक्ट्रॉन न्यूक्लियस के चारों ओर एक निश्चित मार्ग में नहीं घूमता, अपितु वह उसके चारों ओर तरंग की तरह के मार्ग में घूमता है।

(2) इलेक्ट्रॉन, जो कि न्यूक्लियस से बँधा हुआ (bound) है, चिरसम्मत भौतिकी (classical physics) के नियमों का पालन नहीं करता अपितु क्वान्टम यान्त्रिकी के नियमों का पालन करता है।

कणों की तरंग प्रकृति का प्रायोगिक सत्यापन (Experimental verification of Wave properties of particles)—

इलेक्ट्रान की तरंग प्रकृति को प्रदर्शित करने के लिए इस दिशा में सर्वप्रथम प्रयास डेवीसन तथा जर्मर (Davisson and Germer) ने किया। इलेक्ट्रॉन के



चित्र 10 2

तरंग स्वभाव को प्रयोगों द्वारा जानने के लिए सर्वप्रथम यह महत्त्वपूर्ण है कि इलेक्ट्रॉन पुंज एक वर्णीय हो अर्थात् सभी इलेक्ट्रॉन लगभग समान वेग के हों। इसके लिए हम चित्र 10·2 में दिखाये गये अनुसार इलेक्ट्रॉन नलिका (electron gun) उपयोग करते हैं। कैथोड C से निकलकर इलेक्ट्रॉन V विभवान्तर में त्वरित होकर v वेग से एनोड A पर पहुँचते हैं, स्पष्ट है—

$$\frac{eV}{300}=\frac{1}{2}mv^2 \qquad (10\cdot7)$$

$m=$इलेक्ट्रॉन की संहति

एनोड A से आगे बढ़ने पर चूंकि इलेक्ट्रॉन का वेग लगभग स्थिर रहता है अत इलेक्ट्रॉन से सम्बद्ध डिब्रोली तरंग दैर्घ्य का मान

$$\lambda=\frac{h}{mv}$$

परन्तु समीकरण (10·7) में

$$mv^2 = \frac{eV}{150} \text{ अथवा } m^2v^2 = \frac{meV}{150}$$

$$\text{या } mv = \sqrt{\frac{meV}{150}}$$

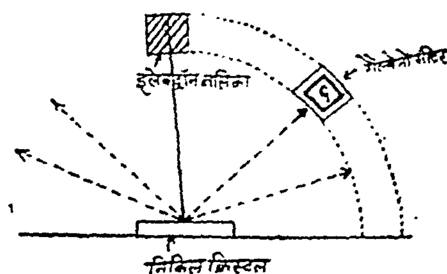
$$\therefore \quad \lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h\sqrt{150}}{\sqrt{meV}}$$

इलेक्ट्रॉन की संहति m तथा आवेश e और प्लांक स्थिराङ्क h का मान रखने पर—

$$\lambda = \frac{1{\cdot}2 \times 10^{-7}}{\sqrt{V}} \text{ cms.} \qquad \text{....(10·8)}$$

अतः यदि हम इलेक्ट्रॉन की तरंग प्रकृति को अच्छी तरह जानना चाहें इसके लिए यह आवश्यक है कि V का मान कम हो। चूंकि इलेक्ट्रॉन की तरंगदैर्घ्य $= 10^{-8}$cm (लगभग) है अतः हम एक ऐसी ग्रेटिंग लें जिसमें प्रत्येक रिक्त स्थान भी लगभग इसी परिमाण का हो तो इलेक्ट्रॉन अपनी तरंग प्रकृति को प्रभावकारी ढंग से प्रकट करेगा। निकिल के क्रिस्टल पर इलेक्ट्रॉन पुंज जब आपाती होता है तो इलेक्ट्रॉन अपनी तरंग प्रकृति स्पष्टतया प्रकट करते हैं क्योंकि निकिल क्रिस्टल इलेक्ट्रॉन तरंगों के लिए ग्रेटिंग की तरह कार्य करता है।

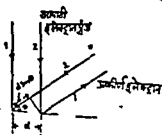
विभिन्न दिशाओं में प्रकीर्ण इलेक्ट्रॉन की संख्या किसी संसूचक (detector) उदाहरणार्थ गैलवेनोमीटर द्वारा मालूम की जाती है (चित्र 10·3)। प्रयोगों द्वारा



चित्र 10·3

यह मालूम हुआ कि क्रिस्टल से प्रकीर्ण होने के बाद इलेक्ट्रॉन की संख्या कोण θ के साथ परिवर्तित होती रहती है।

अर्थात् किन्ही विशेष दिशाओं मे प्रकीर्ण इलेक्ट्रॉन पुंज की तीव्रता अधिक है और किन्ही अन्य दिशाओं में कम। यह गुण X-किरणों के परावर्तन से मेल खाता है, अर्थात् इलेक्ट्रॉन पुंज निकिल क्रिस्टल से प्रकीर्ण होने में 'तरंग' स्वभाव को प्रदर्शित करता है। चित्र 10·4 में निकिल क्रिस्टल से दो इलेक्ट्रॉन तरंगों का परावर्तन प्रदर्शित किया गया है। यदि d निकिल क्रिस्टल का जालक स्थिराङ्क (Lattice constant) है तथा θ प्रकीर्ण कोण (Scattering angle) है



चित्र 10·4

तो स्पष्ट है कि इलेक्ट्रॉन की डिब्रोली तरंगें θ कोण पर अधिकतम तीव्रता प्रदर्शित करेगी यदि प्रकीर्ण इलेक्ट्रॉन तरंगों के मध्य पथान्तर $= n\lambda$

$$(n = 1, 2, \ldots \ldots \ldots)$$

$$\text{अथवा } d \sin \theta = n\lambda = \frac{n \times 1 \cdot 2 \times 10^{-7}}{\sqrt{V}} \text{ (समीकरण 10 8 की सहायता से)}$$

अर्थात् θ के भिन्न-भिन्न मानों पर भिन्न-भिन्न क्रम (Order) के विवर्तन के महत्तम (diffraction maxima) आयेंगे।

यह प्रयोग स्पष्टतया साबित करता है कि इलेक्ट्रॉन का निकिल क्रिस्टल से परावर्तन 'तरंग प्रकृति' का द्योतक है।

उदाहरण 10 1. निम्न कणों से सम्बद्ध डिब्रोली तरंग दैर्घ्य की गणना करो जिनमें से प्रत्येक की गतिज ऊर्जा 500 KeV है : (*a*) इलेक्ट्रॉन (*b*) प्रोटोन (*c*) α—कण

$h = 6 \cdot 62 \times 10^{-27}$ *erg—Sec*, $1eV = 1 \cdot 6 \times 10^{-12}$ *ergs*
इलेक्ट्रॉन संहति $m_e = 0 \cdot 9 \times 10^{-27}$g
प्रोटोन संहति $m_p = 1 \cdot 64 \times 10^{-24}$g
α कण की संहति $m_\alpha = 4 \times 1 \cdot 64 \times 10^{-24}$g

[उत्तर : (*a*) $\lambda = \frac{h}{p}$, परन्तु कण की गतिज ऊर्जा $E = \frac{1}{2} mv^2$

$$= \frac{1}{2} \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

$$\therefore \quad p^2 = 2mE$$

$$\text{अतः} \quad p = \sqrt{2mE}$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$$; इलेक्ट्रॉन की गतिज उर्जा $E = 500 \times 1000 \times 1{\cdot}6 \times 10^{-12} erg$

$$[\therefore \lambda_{electron} = \frac{6{\cdot}62 \times 10^{-27}}{[2 \times 0{\cdot}9 \times 10^{-27} \times 500 \times 1000 \times 1{\cdot}6 \times 10^{-12}]^{1/2}}$$

$$= \frac{6{\cdot}62 \times 10^{-27}}{[2 \times 9 \times 5 \times 16 \times 10^{-36}]^{1/2}} = \frac{6{\cdot}62 \times 10^{-9}}{3 \times 4 \times [10]^{1/2}}$$

$$= 0\,017 \times 10^{-8} cm$$

उत्तर.

$$(b)\ \lambda_{roPton} = \frac{6{\cdot}62 \times 10^{-27}}{[2 \times 1{\cdot}64 \times 10^{-24} \times 500 \times 1000 \times 1{\cdot}6 \times 10^{-12}]^{1/2}}$$

$$= \frac{6{\cdot}62 \times 10^{-27}}{[2 \times 1{\cdot}64 \times 5 \times 16 \times 10^{-32}]^{1/2}} = \frac{6{\cdot}62 \times 10^{-11}}{4 \times (16{\cdot}4)^{1/2}}$$

$$= 0{\cdot}0004 \times 10^{-8} cm$$

उत्तर.

$$(c)\ \lambda_{\alpha\text{-particle}} = \frac{6{\cdot}62 \times 10^{-27}}{[2 \times 4 \times 1{\cdot}64 \times 10^{-24} \times 500 \times 1000 \times 1{\cdot}6 \times 10^{-12}]^{1/2}}$$

$$= \frac{6{\cdot}62 \times 10^{-11}}{(2 \times 4)\ (16{\cdot}4)^{1/2}} = {\cdot}000204 \times 10^{-8} cms$$

उत्तर.

स्पष्ट है कि संहति m बढ़ने से तरंग दैर्ध्य घट रही है। सबसे अधिक तरंग दैर्ध्य इलेक्ट्रॉन की है तथा उसी ऊर्जा के α—कण की सबसे कम। वास्तव में यदि एक ही ऊर्जा के दो कण हैं जिनकी संहति क्रमशः m_1 तथा m_2 हैं तो उनकी दिब्रोली तरंग दैर्ध्य λ_1 तथा λ_2 में निम्न सम्बन्ध होगा :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{h}{\sqrt{2m_1E}} \div \frac{h}{\sqrt{2m_2E}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

उदाहरण 10·2. न्यूक्लिअस का व्यास $= 10^{-13}$cm के लगभग है। हम न्यूक्लिअस के आकार तथा उसकी आकृति (shape) के बारे में अनुमान लगाना चाहते हैं। इसके लिये हम न्यूक्लिअस की ओर प्रोटोन को भेजकर उनका प्रकीर्णन देखते हैं। किस ऊर्जा के प्रोटोन हम लें ताकि उनको न्यूक्लिस से टक्कर कराकर हम

न्यूक्लिअस के आकार तथा उसकी आकृति के बारे में अनुमान लगा सकें (अर्थात् न्यूक्लिअस को 'देखने" के लिये हम किस ऊर्जा के प्रोटोन लें।

उत्तर—चूंकि हम यह जानते हैं कि सूक्ष्मदर्शी से यदि किसी वस्तु को देखना है तो यह आवश्यक है कि उपयोग किये हुये प्रकाश की तरंग दैर्घ्य वस्तु के आकार के सापेक्ष छोटी होनी चाहिये। ठीक इसी प्रकार प्रोटोन की तरंग दैर्घ्य (डिब्रोली) कम से कम न्यूक्लिअस के आकार के लगभग बराबर होनी चाहिये। अतः हम प्रोटोन को इतना तो त्वरित करेंगे ही ताकि प्रोटोन की डिब्रोली तरंग दैर्घ्य न्यूक्लियस के आकार के बराबर ($=10^{-13}$cm लगभग) हो।

$$\lambda=\frac{h}{p}=10^{-13}\text{cm}$$

$$\therefore \quad \lambda^2=\frac{h^2}{p^2}=10^{-26}$$

परन्तु $p^2=2mE$

$$\therefore \quad \frac{h^2}{2mE}=10^{-26}$$

$$\therefore \quad E=\frac{h^2}{2m\times10^{-26}}$$

$$=\frac{(6\cdot626)^2\times10^{-54}\times10^{26}}{2\times1\cdot67\times10^{-24}}$$

$$=13\cdot1\times10^{-4}erg$$

$$=\frac{13\cdot1\times10^{-4}}{1\cdot6\times10^{-12}}\ eV$$

$$=\frac{13\cdot1}{1\cdot6}\times10^{2}\times10^{6}eV$$

$$=820\ MeV$$ उत्तर

प्रश्न

1. डिब्रोली का द्रव्य तरंग परिकल्पना किन-किन प्रयोगों पर आधारित है। तरंग दैर्घ्य तथा कण के संवेग में क्या सम्बन्ध है? यदि प्लांक स्थिरांक $h=0$, हो तो इसके क्या महत्वपूर्ण परिणाम होंगे?

[Hint : यदि $h \rightarrow 0; \lambda = \frac{h}{p} \rightarrow 0$ अर्थात् पदार्थ की तरंग प्रकृति समाप्त हो जायेगी।]

इलेक्ट्रॉन के विवर्तन से क्या समझते हो। इलेक्ट्रॉन को निकिल क्रिस्टल से विवर्तन क्यों कराते हैं। प्रयोगों द्वारा इलेक्ट्रॉन विवर्तन को कैसे प्रदर्शित किया जाता है।

एक मनुष्य जिसकी संहति $7 \times 10^4 g$ है तथा जो 100 *cm/sec* की चाल से जा रहा है, उसकी दिब्रोली तरंग दैर्ध्य क्या होगी ? क्या यह मनुष्य जबकि वह किसी साधारण आकार के दरवाजे (चौड़ाई = 100 *cm* लगभग) से गुजरे तो वह विवर्तन प्रदर्शित करेगा ? [उत्तर = $10^{-33} cm$ लगभग]

1000 *eV* ऊर्जा के प्रोटोन की दिब्रोली तरंग दैर्ध्य क्या होगी ?

[उत्तर : $\lambda = 0{\cdot}01342 \times 10^{-8} cm$]

5 MeV इलेक्ट्रॉन की दिब्रोली तरंग दैर्ध्य का क्या मान होगा।

[उत्तर : $\sqrt{\frac{150}{5 \times 10^6}} \times 10^{-8} cm$]

एक इलेक्ट्रॉन जो 10,000 *Volts* विभवान्तर से त्वरित किया गया है, उससे सम्बद्ध दिब्रोली तरंग दैर्ध्य का मान बताओ।

[उत्तर : = $12{\cdot}3 \times 10^{-10} cm$ लगभग]

11

रेडियो ऐक्टिवता
(RADIO ACTIVITY)

हेनरी बेकुरेल (Henri Becquerel) नामक वैज्ञानिक को 1896 ई० में यूरेनियम के लवण (Uranium salt) पर प्रयोग करते समय यह ज्ञात हुआ कि यूरेनियम के लवण से कुछ अदृश्य किरणें स्वतः ही विकसित होती रहती हैं जो अपारदर्शी [illegible] मे प्रवेश कर सकती हैं एवं फोटोग्राफिक प्लेट को प्रभावित करती हैं। इन कि[illegible] को बेकुरेल किरणों (Becquerel rays) नाम दिया गया। इन्हीं को अब [illegible] एक्टिव किरणें (Radioactive rays) कहते हैं। वे पदार्थ जिनमें से रेडि[illegible] किरणें निकलती हैं रेडियो एक्टिव पदार्थ (Radioactive substa[illegible] rials) तथा उनके इस गुण को रेडियो-एक्टिवता (Radioactivity) [illegible]

यूरेनियम के अलावा रेडियम, पोलोनियम थोरियम, एक्टी[illegible] भी रेडियो एक्टिव हैं। प्रकृति मे पाये जाने वाले रेडियो एक्टि[illegible]

रेडियो एक्टिव पदार्थ और उनके द्वारा प्रदर्शित रेडियोएक्टिवता को प्राकृतिक रेडियो एक्टिवता (Natural Radioactivity) कहते हैं। रेडियो एक्टिवता को कृत्रिमरूप से (Artificially) भी पैदा किया जा सकता है और उसे कृत्रिम रेडियो एक्टिवता (Artificial Radicactivity) कहते हैं।

11·1. रेडियोएक्टिव विकिरण (Radioactive Radiations)

रदरफोर्ड (Rutherford) नामक वैज्ञानिक ने 1897 ई० में विभिन्न प्रयोगों के आधार पर बताया कि रेडियोएक्टिव पदार्थों से निकलने वाले विकिरण α और β किरणों के होते हैं। β किरणों की भेदनशक्ति (Penetrating power) α किरणों की अपेक्षा अधिक होती है। इन किरणों पर विद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों के प्रभाव का अध्ययन कर रदरफोर्ड ने बाद में बताया कि α किरणें वास्तव में हीलियम के के नाभिक और β किरणें इलेक्ट्रान्स (Electrons) हैं।

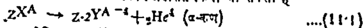
यह ज्ञात होने पर कि α कण हीलियम के नाभिक हैं, स्पष्ट हो गया कि, रेडियोएक्टिव विघटन के कारण एक तत्व का दूसरे तत्व में तत्वांतरण (Transformation) हो जाता है। मूल पदार्थ जिसका विखंडन होता है जनक पदार्थ (Parent substance) और विघटन द्वारा प्राप्त पदार्थ विघटन पदार्थ (Daughter substance) कहलाता है।

1900 ई० में विलार्ड (Villard) नामक वैज्ञानिक ने बताया कि रेडियोएक्टिव पदार्थ से α व β किरणों के साथ-साथ तीसरे प्रकार के विकिरण और उत्सर्जित होते हैं जिनकी भेदन क्षमता (Penetrating power) α व β-किरणों की [illegible] बहुत अधिक होती है। इन किरणों को γ- किरणें कहते हैं। यह देखा गया कि रेडियोऐक्टिव विघटन की क्रिया को किसी भी प्रकार के बल द्वारा प्रभावित नहीं किया जा सकता है। वास्तव में रेडियो ऐक्टिव विकिरण रेडियो ऐक्टिव पदार्थ के परमाणु के नाभिक से उत्सर्जित होते हैं और यह विघटन अनियमित रूप से (at random) होता है। कौन सा परमाणु कब विघटित होगा यह निश्चित नहीं है।

(*a*) α-किरणें (α-Rays)—

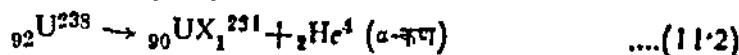
α-किरणें हीलियम के नाभिक हैं। एक α- कण की संहति लगभग $6{\cdot}643 \times 10^{-24}$ ग्राम तथा उस पर $9{\cdot}604 \times 10^{-10}$ स्थि० वै० मा० धन आवेश (Positive charge) होता है। जब हीलियम परमाणु से दोनों इलेक्ट्रान निकल जाते हैं तो बचा हुआ हीलियम नाभिक ही α-कण कहलाता है। इसे $_2He^4$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं और वास्तव में यह "द्वितः आयनित हीलियम परमाणु" है। इन किरणों की आयनीकरण क्षमता (Ionising power) β तथा γ-किरणों की अपेक्षा बहुत अधिक जबकि भेदन क्षमता उनकी अपेक्षा बहुत कम होती है। α-किरणों के जिंक सल्फाइड तथा बेरियम-प्लेटीनोसाइनाइड जैसे पदार्थों पर पड़ने से प्रतिदीप्ति (Flourescence) उत्पन्न होती है। ये किरणें फोटोग्राफिक प्लेट को प्रभावित करती हैं।

जब किसी रेडियो ऐक्टिव परमाणु के नाभिक में से एक α कण निकलता है तो विघटन परमाणु की परमाणु संख्या (Atomic number) तथा द्रव्यमान संख्या (Mass number) में जनक परमाणु के सापेक्ष क्रमशः 2 और 4 की कमी हो जाती है। यदि परमाणु संख्या Z और द्रव्यमान संख्या A से प्रदर्शित की जावे तो α-कण उत्सर्जन के कारण परिवर्तन निम्न प्रकार प्रदर्शित किया जा सकता है —



$$_{Z}X^{A} \rightarrow {}_{Z-2}Y^{A-4} + {}_{2}He^{4} \text{ (α-कण)} \quad ....(11 \cdot 1)$$

उदाहरणार्थ जब यूरेनियम $_{92}U^{238}$ के परमाणु के नाभिक में से एक α-कण निकलता है तो $_{90}UX_1^{234}$ प्राप्त होता है।



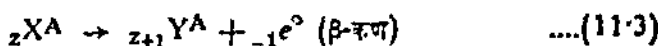
$$_{92}U^{238} \rightarrow {}_{90}UX_1^{234} + {}_{2}He^{4} \text{ (α-कण)} \quad ....(11 \cdot 2)$$

विद्युत एवं चुम्बकीय क्षेत्र से गुजरने पर α-कण अपने पथ से विक्षेपित हो जा जाते है अर्थात् विद्युत एवं चुम्बकीय क्षेत्र द्वारा ये कण प्रभावित होते हैं इस प्रकार उत्पन्न विक्षेप को ज्ञात कर α-कणों की ऊर्जा निकाली जा सकती है।

(*b*) β-किरण (β-Rays)—

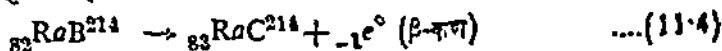
β किरणें वास्तव मे तीव्र वेग से गति कर रहे इलेक्ट्रॉन हैं जो कि विद्युत एवं चुम्बकीय क्षेत्र से प्रवाहित होते हैं। इन किरणो की आयनीकरण क्षमता α-किरणो की अपेक्षा कम तथा γ-किरणो की अपेक्षा अधिक होती है। β-किरणों की भेदन क्षमता (Penetrating power) α किरणो की अपेक्षा अधिक होती है। ये किरणें जिंक सल्फाइड व बेरियम प्लेटीनो साइनाइड पर प्रतिदीप्ति उत्पन्न करती हैं तथा फोटोग्राफिक प्लेट को α किरणों की अपेक्षा अधिक प्रभावित करती हैं।

जब किसी रेडियोएक्टिव परमाणु के नाभिक से एक β कण निकलता है तो विघटन परमाणु की परमाणु संख्या जनक परमाणु के सापेक्ष एक से बढ़ जाती है। द्रव्यमान संख्या पर इसका कोई प्रभाव नही पड़ता। β कण उत्सर्जन के कारण उत्पन्न परिवर्तन निम्न प्रकार प्रदर्शित किया जा सकता है।



$$_{Z}X^{A} \rightarrow {}_{Z+1}Y^{A} + {}_{-1}e^{0} \text{ (β-कण)} \quad ....(11 \cdot 3)$$

उदाहरणार्थ जब $_{82}RaB^{214}$ एक β कण उत्सर्जित करता है तो $_{83}RaC^{214}$ प्राप्त होता है अर्थात्



$$_{82}RaB^{214} \rightarrow {}_{83}RaC^{214} + {}_{-1}e^{0} \text{ (β-कण)} \quad ....(11 \cdot 4)$$

(*c*) γ-किरणें (γ-Rays)—

γ किरणें सूक्ष्म तरंगदैर्घ्य (Short wave length) की विद्युत चुम्बकीय तरंगें (Electromagnetic waves) हैं। इनकी तरंग दैर्घ्य लगभग 10^{-10} से॰ मी॰ के कोटि की होती है तथा चुम्बकीय व विद्युत क्षेत्र का इन पर प्रभाव नहीं पड़ता। इन पर किसी प्रकार का आवेश नहीं होता और ये किरणें प्रकाश के वेग से गमन करती हैं। इन किरणों की भेदन क्षमता, α व β किरणों के सापेक्ष बहुत अधिक

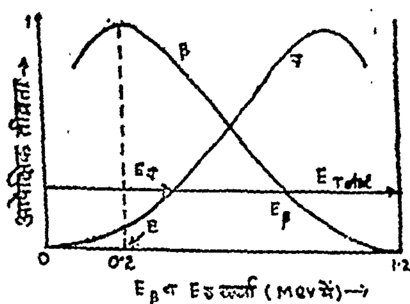
होती है जबकि आयनीकरण क्षमता α व β किरणों के सापेक्ष बहुत कम होती है। जब γ किरणें किसी माध्यम से गुजरती हैं तो उनका अवशोषण (Absorption) चरघातांक रूप से (Exponentially) होता है। किसी पदार्थ द्वारा अवशोषित होने पर ये किरणें (1) प्रकाश विद्युत प्रभाव (2) काम्पटन प्रभाव (Compton effect) तथा युग्म उत्पादन (Pair production) की घटना को जन्म देती हैं। प्रकाश विद्युत प्रभाव व कॉम्पटन प्रभाव के बारे में आप संक्षेप में पहले पढ़ चुके हैं। युग्म उत्पादन की घटना में γ-किरण फोटोन (Photon) की ऊर्जा से इलेक्ट्रॉन और पॉजिट्रॉन (Positron) की उत्पत्ति होती है। पॉजिट्रॉन ऐसा कण है जिसकी संहति इलेक्ट्रॉन के बराबर तथा आवेश धनात्मक लेकिन इलेक्ट्रॉन आवेश के बराबर ही होता है। पॉजिट्रॉन, इलेक्ट्रॉन का एन्टीकण (Antiparticle) है। युग्म-उत्पादन के इस प्रभाव को निम्न समीकरण द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

$$\underset{(1{\cdot}02\ \text{MeV})}{h\nu} \rightarrow \underset{(\text{इलेक्ट्रॉन})}{{}_{-1}e^{0}} + \underset{(\text{पॉजिट्रॉन})}{{}_{+1}e^{0}} \qquad \ldots(11{\cdot}5)$$

युग्म उत्पादन उसी समय हो सकता है जबकि γ-किरण फोटोन की ऊर्जा कम से कम 1·02 MeV है।

11·2 β-किरण स्पेक्ट्रम तथा न्यूट्रिनो (β-Rays spectrum and neutrino)

यह पहले ही बताया जा चुका है कि जब किसी रेडियो ऐक्टिव परमाणु के नाभिक से एक β कण निकलता है तो विघटन परमाणु की परमाणु संख्या जनक-परमाणु की अपेक्षा एक से बढ़ जाती है लेकिन उसकी द्रव्यमान संख्या में कोई परिवर्तन नहीं होता। इस प्रकार उत्सर्जित β किरणों की ऊर्जा (Energy) को चुम्बकीय स्पेक्ट्रोग्राफ (Magnetic spectrograph) द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। β-किरणों की ऊर्जा के अध्ययन से ज्ञात होता है कि उसकी ऊर्जा (अर्थात् वेग) एक समान न होकर चित्र (11·1) में प्रदर्शित ऊर्जा स्पेक्ट्रम (Energy spectrum) के अनुसार है।



चित्र 11·1

इस प्रकार उत्सर्जित β-किरण ऊर्जा स्पेक्ट्रम एक सतत् स्पेक्ट्रम (Continious spectrum) है जिससे स्पष्ट है कि नाभिकीय विघटन की ऊर्जा सम्पूर्ण रूप से उत्सर्जित इलेक्ट्रॉन को प्रायः प्राप्त नहीं होती। उत्सर्जित इलेक्ट्रॉन की प्रसम्भाव्यतम (Most probable) ऊर्जा चित्र (11·1) में E द्वारा प्रदर्शित की गई है। इसका

अर्थ यह हुआ कि β-कण उत्सर्जक नाभिक के लिए ऊर्जा संरक्षण का नियम (Law of conservation of energy) सत्य नहीं है।

1931 ई० पॉली (Pauli) नामक वैज्ञानिक ने बताया कि ऊर्जा संरक्षण का नियम β-कण उत्सर्जक नाभिक के लिए भी सत्य है। यदि β-कण के साथ एक दूसरे कण का उत्सर्जन और मान लिया जावे तो यह कठिनाई दूर हो जाती है। इस प्रकार उत्सर्जित दूसरे कण को एण्टीन्यूट्रिनो कहते हैं। अतः रेडियोऐक्टिव नाभिक में से β-कण के साथ-साथ एण्टीन्यूट्रिनो (Antineutrino) भी उत्सर्जित होता है जिसकी ऊर्जा निम्न समीकरण द्वारा ज्ञात की जा सकती है :

$$E_{total} = E_{\beta} + E_{\overline{\nu}} \qquad ....(11 \cdot 6)$$

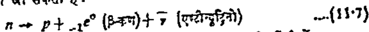
यहाँ E_{total} = β-कण उत्सर्जन की क्रिया में प्राप्त कुल ऊर्जा

E_{β} = उत्सर्जित β कण (इलेक्ट्रॉन) की ऊर्जा

$E_{\overline{\nu}}$ = एण्टीन्यूट्रिनो की ऊर्जा

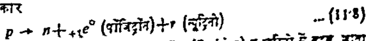
एण्टीन्यूट्रिनो को प्रायः $\overline{\nu}$ से प्रदर्शित करते हैं तथा E_{β} और $E_{\overline{\nu}}$ दोनों ही परिवर्तनशील (Variable) हैं। एण्टीन्यूट्रिनो, न्यूट्रिनो का एण्टीकण है। न्यूट्रिनो विद्युत उदासीन है तथा इसका विराम द्रव्यमान (Rest mass) नगण्य है। इसकी स्पिन क्वाण्टम संख्या (Spin quantum number) S का मान $\frac{1}{2}$ है जो कि इलेक्ट्रॉन की स्पिन क्वाण्टम संख्या के बराबर है। न्यूट्रिनो को ν से प्रदर्शित करते हैं। न्यूट्रिनो और एण्टीन्यूट्रिनो का मुख्य भेद यह कि न्यूट्रिनो के लिए स्पिन वेक्टर (Spin vector) संवेग वेक्टर (Momentum vector) के समान्तर (Parallel) जबकि एण्टीन्यूट्रिनो के लिए स्पिन वेक्टर, संवेग वेक्टर के प्रतिसमान्तर (Antiparallel) है।

परमाणु के नाभिक में इलेक्ट्रॉन नहीं होते परन्तु रेडियोऐक्टिव परमाणु के नाभिक से β-कण (इलेक्ट्रॉन) उत्सर्जित होते हैं। यह तथ्य निम्न रूपान्तर द्वारा समझाया जा सकता है :



$$n \rightarrow p + {}_{-1}e^{0} \text{ (β-कण)} + \overline{\nu} \text{ (एण्टीन्यूट्रिनो)} \qquad ....(11 \cdot 7)$$

अर्थात् न्यूट्रॉन, प्रोटॉन (Proton), इलेक्ट्रॉन व एण्टीन्यूट्रिनो में बदल जाता है। क्योंकि इस प्रकार प्राप्त प्रोटॉन नाभिक में ही रह जाता है। अतः नाभिक की द्रव्यमान संख्या तो वही रहती है परन्तु परमाणु संख्या एक से बढ़ जाती है। इसी प्रकार



$$p \rightarrow n + {}_{+1}e^{0} \text{ (पॉजिट्रॉन)} + \nu \text{ (न्यूट्रिनो)} \qquad ...(11 \cdot 8)$$

अर्थात् प्रोटॉन, न्यूट्रॉन, पॉजिट्रॉन (Position) व न्यूट्रिनो में बदल जाता है। इस तरह एण्टीन्यूट्रिनो का उत्सर्जन β-किरणों के ऊर्जा संरक्षण को स्पष्ट कर देता है।

11·3. रेडियो-ऐक्टिव विघटन का नियम (Law of Radioactive disintegration)

यह पहले ही बताया जा चुका है कि यूरेनियम, थोरियम आदि रेडियो ऐक्टिव तत्व स्वतः विघटित होकर नये तत्त्व को जन्म देते हैं। रेडियोऐक्टिव विघटन की इस क्रिया में परमाणु के नाभिक से या तो α कण या एक β कण निकलता है। इस कारण वह परमाणु किसी नये तत्व के परमाणु में बदल जाता है। विघटन की इस क्रिया में α और β किरणों के साथ-साथ प्रायः (परन्तु आवश्यक रूप से नहीं) γ विकिरण भी निकलते रहते हैं। वास्तव में परमाणुओं का यह विघटन अनियमित (Random) रूप से होता है और यह निश्चित नहीं होता कि कौन सा नाभिक किस समय विघटित होगा। वस्तुतः रेडियो ऐक्टिव विघटन एक सांख्यिकीय (statistical) घटना है; कुल उपस्थित परमाणुओं का एक निश्चित अंश (fraction) विघटित होता है।

रेडियोऐक्टिव विघटन के सिद्धान्त में विशेष प्रगति रदरफोर्ड और सोडी (Rutherford and Soddy) द्वारा प्रतिपादित नियमों के द्वारा हुई। रेडियोऐक्टिव तत्व थोरियम (Thorium) और उससे उत्तरोत्तर प्राप्त पदार्थों (Successive products) का गहन अध्ययन कर उन्होंने निम्नलिखित नियम प्रतिपादित किये:

(i) रेडियोऐक्टिव तत्त्व स्वतः विघटित होकर नये तत्त्वों को जन्म देते हैं। रेडियोऐक्टिव नाभिक से विघटन के कारण या तो एक α-कण या एक β-कण निकलता है। α तथा β-कण के साथ-साथ प्रायः γ-विकिरण भी निकलते हैं (प्रत्येक विघटन में γ-विकिरणों का उत्सर्जन आवश्यक नहीं)। उदाहरणार्थ यूरेनियम विघटित होकर यूरेनियम X बनाता है जो पुनः विघटित होकर एक रेडियोऐक्टिव तत्व को जन्म देता है। यह क्रिया उस समय तक चलती रहती है जब तक कि स्थायी तत्व (Stable element) सीसा (Lead) नहीं बन जाता है।

(2) किसी समय परमाणुओं के विघटन की दर अर्थात् प्रति सेकण्ड विघटित होने वाले परमाणुओं की संख्या उस समय उपस्थित अपरिवर्तित (unchanged) रेडियोऐक्टिव परमाणुओं की कुल संख्या के अनुक्रमानुपाती होती है।

उक्त कथन को गणितीय रूप में निम्न प्रकार प्रदर्शित किया जा सकता है—

$$-\frac{dN}{dt} \propto N$$

$$\text{या } \frac{dN}{dt} \propto -N$$

$$\text{या } \frac{dN}{dt} = -\lambda N \qquad \ldots(11\cdot9)$$

यहाँ dN, अनन्त सूक्ष्म समयांतराल dt में विघटित होने वाले परमाणु की संख्या और N, समयांतराल (time interval) dt के आरम्भ में रेडियोऐक्टिव पदार्थ के परमाणुओं की संख्या है। अतः $\frac{dN}{dt}$ परमाणुओं के विघटन की दर है तथा λ एक स्थिरांक है जिसे 'विघटन स्थिरांक' या 'क्षयांक' (Disintegration constant or Decay constant) या रेडियोऐक्टिव स्थिरांक (Radioactive constant) कहते हैं। ऋणात्मक चिन्ह इस बात का द्योतक है कि परमाणुओं की संख्या घटती जा रही है।

समीकरण (11·9) के द्वारा

$$\frac{dN}{N} = -\lambda . dt \qquad ....(11\cdot10)$$

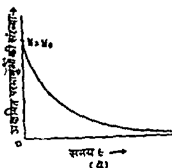
उक्त समीकरण का समाकलन (Integration) करने पर

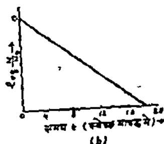
$$log_e N = -\lambda t + k$$

यहाँ k समाकलन नियतांक है। यह कल्पना करने पर कि आरम्भ में जब $t=0$, परमाणुओं की संख्या $N=N_o$ है, समाकलन स्थिरांक का मान होगा (समीकरण में $t=0$, $N=N_o$ रखने पर)

$$\log_e N_o = 0 + K$$

$$\therefore \quad K = log_e N_o \qquad ....(11\cdot11)$$





चित्र 11·12

समीकरण में k का मान रखने पर

$$log_e N = -\lambda t + log_e N_o$$

या $$log_e \frac{N}{N_o} = -\lambda t$$

या $$\frac{N}{N_o} = e^{-\lambda t}$$

$\therefore$ $$N = N_o e^{-\lambda t} \quad \ldots(11.12)$$

उक्त समीकरण से स्पष्ट है कि किसी रेडियोऐक्टिव पदार्थ के परमाणुओं की संख्या समय के साथ चरघातांक रूप से (Exponentially) कम होती है। चित्र [11·2 (*a*) व (*b*)] क्रमशः N तथा $log_e \frac{N}{N_o}$ में समय के साथ होने वाले परिवर्तन को प्रदर्शित करते हैं।

11·4. अर्ध आयु (Half Life)

किसी रेडियोऐक्टिव पदार्थ की अर्ध आयु को निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है :

वह समय जिसमें किसी रेडियोऐक्टिव पदार्थ के परमाणुओं की संख्या घट कर या विघटित होकर प्रारम्भिक मान की आधी हो जाती है, उसकी अर्ध आयु कहलाती है। अर्धआयु को प्रायः T द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

आरम्भ में जब $t=0$ है। यदि रेडियोएक्टिव परमाणुओं की कुल संख्या N_o है तो T समय पश्चात् परमाणुओं की कुल संख्या $\frac{N_o}{2}$ रह जावेगी अर्थात्

$$N = \frac{N_o}{2}$$

या $$\frac{N}{N_o} = \frac{1}{2} \quad \ldots(11.13)$$

समीकरण (11·12) में $\frac{N}{N_o} = \frac{1}{2}$ और $t = T$ रखने पर

$$\log_e \tfrac{1}{2} = -\lambda T$$

या $$\lambda T = 2.3026 \log_{10} 2$$

या $$\lambda T = 2.3026 \times 0.3010$$

$\therefore$ $$T = \frac{0.693}{\lambda} \quad \ldots(11.14)$$

अर्ध आयु का मान विभिन्न रेडियोऐक्टिव तत्वों के लिए भिन्न-भिन्न होता है तथा कुछ पल से लेकर करोड़ों वर्ष तक हो सकता है। उदाहरणार्थ यूरेनियम की

अर्धआयु 4.5×10^9 वर्ष, रेडियम की अर्धआयु 1622 वर्ष, यूरेनियम X की अर्धआयु 24·1 दिन और रेडियम C' (RaC') की अर्धआयु केवल 1.6×10^{-4} सेकण्ड है। पृथ्वी पर पाये जाने वाले विभिन्न रेडियोऐक्टिव तत्त्वों की अर्धआयु ज्ञात कर पृथ्वी की आयु का सही अनुमान लगाने में सहायता मिली है।

11·5 औसत आयु या माध्य आयु (Mean life)

समीकरण $N = N_0 e^{-\lambda t}$ से स्पष्ट हो जाता है कि किसी रेडियोऐक्टिव तत्त्व के कुछ परमाणु तो जल्दी ही विघटित हो जाते हैं जबकि कुछ बहुत ही लम्बे समय बाद विघटित होते हैं। अतः किसी रेडियोऐक्टिव तत्त्व के परमाणुओं की वास्तविक आयु शून्य से अनन्त की कोटि (Order) की मानी जा सकती है। परमाणुओं का यह विघटन अनियमित रूप से होता है और कौन सा परमाणु कब विघटित होगा, निश्चित नहीं है। इसलिए विभिन्न रेडियोऐक्टिव तत्त्वों के परमाणुओं की आयु की तुलना करने के लिए हम उनकी औसत आयु या माध्य आयु ज्ञात करते हैं।

सोडी (Soddy) ने बताया कि किसी रेडियोऐक्टिव तत्त्व की औसत आयु तथा क्षयांक (Decay constant) में निम्न सम्बन्ध है :

$$\overline{T} = \frac{1}{\lambda} \quad \ldots(11{\cdot}15)$$

यहाँ $\overline{T}$ रेडियोऐक्टिव तत्त्व की औसत आयु है। इस सम्बन्ध की स्थापना निम्न प्रकार की जा सकती है।

किसी रेडियोऐक्टिव तत्त्व के परमाणुओं की औसत आयु, उस तत्त्व के सभी परमाणुओं की आयु के योग को परमाणुओं की कुल संख्या से भाग देकर प्राप्त की जाती है।

माना कि आरम्भ में जब $t=0$ है, किसी रेडियोऐक्टिव पदार्थ में परमाणुओं की कुल संख्या N_0 है। t समय पश्चात् परमाणुओं की संख्या N रह जाती है। माना कि t से $(t+dt)$ समय के बीच विघटित होने वाले परमाणुओं की संख्या dN है। क्योंकि dt बहुत ही अल्प समय है अतः सभी dN परमाणुओं की आयु t मानी जा सकती है। अतः सभी dN परमाणुओं की आयु का योग $t\,dN$ होगा। लेकिन प्रत्येक रेडियोऐक्टिव परमाणु की आयु शून्य से लेकर अनन्त हो सकती है इसलिए सभी N_0 परमाणुओं की कुल आयु

$$= \int_{t=0}^{t=\infty} t\,dN$$

और औसत आयु या माध्य आयु $\overline{T} = \dfrac{\int_{t=0}^{t=\infty} t dN}{N_o}$ ....(11·16)

समीकरण $N = N_0 e^{-\lambda t}$ का अवकलन (Differentiation) करने पर

$$dN = -\lambda N_o e^{-\lambda t} . dt$$

dN का मान समीकरण (11·16) में रखने पर

$$\text{औसत आयु या माध्य आयु } \overline{T} = \frac{\int_{t=0}^{t=\infty} -\lambda N_o e^{-\lambda t} t dt}{N_o}$$

या $$\overline{T} = \frac{-\lambda N_o \int_{t=0}^{t=\infty} t.e^{-\lambda t} dt}{N_o}$$

या $$\overline{T} = -\lambda \int_{t=0}^{t=\infty} t.e^{-\lambda t} dt$$

खंडशः समाकलन द्वारा

$$\overline{T} = -\lambda \left[\frac{te^{-\lambda t}}{-\lambda} - \int \frac{e^{-\lambda t} dt}{-\lambda} \right]_o^\infty$$

या $$\overline{T} = \left[te^{-\lambda t} + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_o^\infty$$

$\therefore$ $$\overline{T} = \frac{1}{\lambda}$$ ....(11·17)

अर्थात् रेडियोऐक्टिव परमाणुओं की औसत आयु क्षयांक के व्युत्क्रम के बराबर होती है। अतः अधिक औसत आयु वाले परमाणुओं के लिए क्षयांक का मान बहुत कम होगा।

औसत आयु और अर्घ आयु में सम्बन्ध

समीकरण (11·16) तथा समीकरण (11·18)

$$T = \frac{0.693}{\lambda}$$

और $$\overline{T} = \frac{1}{\lambda}$$

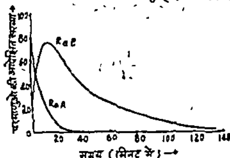
अतः $$T = 0.693\,\overline{T} \quad \text{....(11·18)}$$

अर्ध आयु = 0·693 × औसत आयु

11·6 रेडियोऐक्टिव वृद्धि और क्षय (Radioactive Growth and Decay)

माना कि रेडियोऐक्टिव पदार्थ A के विघटित होने पर पदार्थ B प्राप्त होता है। पदार्थ B का भी विघटन होता है और उससे पदार्थ C प्राप्त होता है। इस स्थिति में किसी समय पदार्थ B के परमाणुओं की बाहुल्यता (Abundance) निम्न प्रकार ज्ञात की जा सकती है :

माना कि किसी समय (t) पर पदार्थ A के परमाणुओं की संख्या N_1 है। आरम्भ में, जब $t=0$ है, पदार्थ A के परमाणुओं की संख्या N_0 है। t समय पर पदार्थ B के परमाणुओं की संख्या N_2 है तथा जब $t=0$ है अर्थात् आरम्भ में इनकी संख्या शून्य (Zero) है। यहाँ पदार्थ A के परमाणु को जनक परमाणु (Parent atom) और उससे प्राप्त पदार्थ B के परमाणु को विघटन परमाणु (Daughter-atom) कहते हैं।



चित्र 11·3

पदार्थ A के परमाणु के विघटन के कारण पदार्थ B के परमाणुओं की संख्या में वृद्धि होती है। लेकिन साथ ही साथ पदार्थ B के परमाणु के विघटन के कारण उसके परमाणुओं की संख्या में कमी होती है। यदि dt समय में पदार्थ A के dN परमाणु विघटित होते हों तो पदार्थ B के संवर्ग (Category) में प्रवेश करने वाले

$$\text{परमाणुओं की संख्या} = -\frac{dN_1}{dt} = \lambda_1 N_1 \quad \text{....(11·19)}$$

और इसी प्रकार पदार्थ B के संवर्ग से निकलने वाले परमाणुओं

की संख्या $= \lambda_2 N_2$

यहाँ λ_1=पदार्थ A का क्षयांक और

λ_2=पदार्थ B का क्षयांक

इसलिए N_2 में नेट परिवर्तन (Net change)

$$\frac{dN_2}{dt}=\lambda_1 N_1-\lambda_2 N_2$$

परन्तु $$N_1=N_o e^{-\lambda_1 t}$$

अतः $$\frac{dN_2}{dt}=\lambda_1 N_o e^{-\lambda_1 t}-\lambda_2 N_2$$

या $$\frac{dN_2}{dt}+\lambda_2 N_2=\lambda_1 N_o e^{-\lambda_1 t}$$

उक्त समीकरण के दोनों पक्षों को $e^{\lambda_2 t}\cdot dt$ से गुणा करने पर,

$$e^{\lambda_2 t}\frac{dN_2}{dt}+\lambda_2 N_2 e^{\lambda_2 t}=\lambda_1 N_o e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(N_2 e^{\lambda_2 t})=\lambda_1 N_o e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$$

(समाकलन करने पर)

$$N_2 e^{\lambda_2 t}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_o.e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}+C \quad ....(11\cdot21)$$

क्योंकि $N_2=0$ जब $t=0$ है अतः उपरोक्त समीकरण द्वारा

$$C=\frac{-\lambda_1 N_o}{\lambda_2-\lambda_1} \quad ....(11\cdot22)$$

C का मान समीकरण (11·21) में रखने पर

$$e^{-\lambda_2 t}\ N_2=\frac{N_o\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\left[e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}-1\right]$$

$$\therefore \quad N_2=\frac{N_o\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\left[e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}\right] \quad ....(11\cdot23)$$

समीकरण (11·23) *t* समय पर पदार्थ *B* के परमाणुओं की बाहुल्यता बतलाता है।

पदार्थ A के क्षय और पदार्थ B की वृद्धि तथा क्षय को चित्र (11·3) में प्रदर्शित किया गया है। रेडियोऐक्टिव श्रेणी (Radioactive series) के विभिन्न तत्वों में परमाणुओं की बाहुल्यता भी इसी प्रकार ज्ञात की जा सकती है। रेडियोऐक्टिव वृद्धि और क्षय के इस सिद्धान्त को उत्तरोत्तर रूपान्तर का सिद्धान्त (Theory of Successive Transformations) भी कहते हैं।

11·7 रेडियोऐक्टिव सन्तुलन (Radioactive Equilibrium)

यह पहले ही बताया जा चुका है कि विभिन्न रेडियोऐक्टिव पदार्थों के लिए क्षयांक व अर्धआयु का मान भिन्न-भिन्न होता है। कुछ रेडियोऐक्टिव पदार्थों के लिए प्रायः विघटन परमाणु की अपेक्षा जनक परमाणु की अर्धआयु अधिक होती है। जनक परमाणुओं के विखण्डन के साथ-साथ विघटन परमाणुओं का उत्पादन बढ़ता जाता है। क्योंकि इस प्रकार प्राप्त विघटित परमाणुओं का विघटन उनकी स्वयं की संख्या पर निर्भर करता है अतः विघटित परमाणुओं की संख्या में वृद्धि के साथ उनके विघटन की संख्या में भी वृद्धि होती जाती है जब तक कि विघटन परमाणुओं के उत्पादन की दर, विघटन की दर के समान न हो जावे। जब यह दोनों दरें समान हो जाती हैं तब जनक और विघटित पदार्थ रेडियोऐक्टिव सन्तुलन (Radioactive equilibrium) में होते हैं अर्थात् रेडियोऐक्टिव सन्तुलन के समय

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{जनक}} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{विघटन}} \quad \text{....(11·24)}$$

$$\therefore \quad (\lambda N)_{\text{जनक}} = (\lambda N)_{\text{विघटन}} \quad \text{....(11·25)}$$

यदि जनक X और विघटन Y पदार्थों के लिए क्षयांक का मान क्रमशः λ_x और λ_y हो व $\lambda_x << \lambda_y$ तथा किसी समय उपस्थित जनक और विघटन परमाणुओं की संख्या क्रमशः N_n और N_y हो तो रेडियोऐक्टिव सन्तुलन के समय

$$\lambda_x N_x = \lambda_y N_y \quad \text{....(11·26)}$$

रेडियोऐक्टिव सन्तुलन की स्थिति की प्राप्ति जनक और विघटन पदार्थों की अर्धआयु तथा समय पर निर्भर करती है।

11·8 रेडियोऐक्टिव श्रेणियाँ (Radioactive series)

विभिन्न तत्वों के रेडियोऐक्टिव विघटन में α कण, β कण तथा कभी-कभी γ विकिरण निकलते हैं तथा नये तत्वों का जन्म होता है। विघटित होने वाले मूल तत्व को 'जनक तत्व' (Parent element) और विघटित होने के कारण उत्पन्न नये तत्व को 'विघटन तत्व' (Daughter element) कहते हैं। यह रूपान्तर रदरफोर्ड और सोडी के नियम के अनुसार निम्न प्रकार समझाये जा सकते हैं

(i) विघटन के पूर्व परमाणु का विद्युत आवेश (परमाणु क्रमांक) विघटन के पश्चात प्राप्त परमाणु व उत्सर्जित कण के विद्युत आवेश के योग के बराबर होना चाहिए।

(ii) विघटन के पूर्व परमाणु की कुल द्रव्यमान संख्या विघटन के पश्चात् प्राप्त परमाणु व उत्सर्जित कण की द्रव्यमान संख्या के योग के बराबर होना चाहिए।

अर्थात् किसी परमाणु के नाभिक से α कण उत्सर्जित होने पर विघटन परमाणु की द्रव्यमान संख्या में 4 तथा परमाणु संख्या में 2 मात्रक की कमी हो जावेगी जबकि किसी परमाणु के नाभिक से β कण उत्सर्जित होने पर विघटन परमाणु का परमाणु क्रमांक 1 मात्रक से बढ़ जाता है और द्रव्यमान संख्या पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। इन तथ्यों को समीकरण के रूप में निम्न प्रकार प्रदर्शित किया जा सकता है :



$${}_{Z}X^{A} \rightarrow {}_{Z-2}Y^{A-4} + \alpha \quad \ldots(11 \cdot 26)$$



$${}_{Z}P^{A} \rightarrow {}_{Z+1}Q^{A} + \beta \quad \ldots(11 \cdot 27)$$

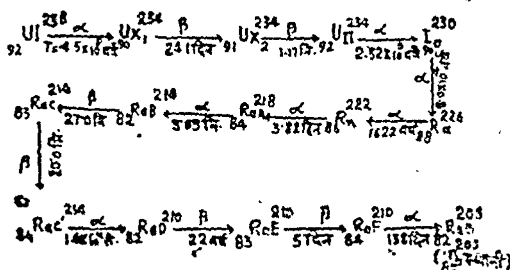
γ विकिरण न तो द्रव्यमान संख्या को ही प्रभावित करते हैं और न ही परमाणु संख्या को। यदि विघटन तत्त्व स्वयं भी रेडियोएक्टिव हैं तो यह विघटित होकर पुनः नये तत्त्व को जन्म देता है और यह क्रिया जब तक चलती रहती है जब तक कि स्थायी तत्त्व प्राप्त नहीं हो जाता है। इस प्रकार जनक तत्त्व से विघटन द्वारा स्थायी तत्त्व (Stable element) तक पहुँचने की क्रिया में बनने वाले सभी तत्त्व एक श्रेणी (Series) बनाते हैं जो रेडियोऐक्टिव रूपान्तर श्रेणी (Radioactive transformation series) कहलाती है।

प्राकृतिक रेडियोऐक्टिव तत्त्वों की मुख्य तीन श्रेणियाँ हैं।

(1) यूरेनियम श्रेणी (Uranium series) (2) थोरियम श्रेणी (Thorium series) और (3) एक्टीनियम श्रेणी (Actinium series)

इसके अलावा नेपच्यूनियम श्रेणी (Neptunium series) भी है।

(1) यूरेनियम श्रेणी—यूरेनियम श्रेणी का आरम्भ ${}_{92}U^{238}$ (जनक तत्त्व) से होता है और अन्त में ${}_{82}Pb^{206}$ प्राप्त होता है जोकि स्थायी है तथा सीसे का एक



चित्र 11·4

स्थायी आइसोटोप है। इस श्रेणी में होने वाले रूपान्तरों की विभिन्न अवस्थायें निम्न चित्र (11·4) में प्रदर्शित की गई हैं।

यहाँ UI तथा UII यूरेनियम के आइसोटोप्स हैं जिनकी परमाणु-संख्या 92 है।

(ii) थोरियम श्रेणी—थोरियम श्रेणी का आरम्भ $_{90}Th^{232}$ से होता है और अन्त में $_{82}ThD^{208}$ प्राप्त होता है जो सीसे (Lead) का एक स्थायी आइसोटोप है।

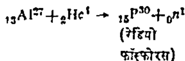
(iii) एक्टीनियम श्रेणी—एक्टीनियम श्रेणी का आरम्भ $_{92}AcU^{235}$ से होता है जोकि इस श्रेणी का यह जनक तत्व ऐक्टिनोरेनियम है। कई विघटनों के पश्चात अन्त में $_{82}AcD^{207}$ प्राप्त होता है जोकि स्थायी है। एवं सीसे का स्थायी आइसोटोप है।

(*iv*) *नेपच्यूनियम श्रेणी*—*नेपच्यूनियम श्रेणी का आरम्भ* $_{94}Pu^{241}$ (जनक तत्व) से होता है तथा कई विघटनों के पश्चात अन्त में $_{83}Bi^{209}$ प्राप्त होता है जो स्थायी है।

11·9 रेडियोऐक्टिव आइसोटोप तथा उनके उपयोग (Radioactive isotopes & their uses)

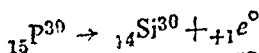
विभिन्न परमाणु भार परन्तु समान परमाणु क्रमांक वाले परमाणुओं को आइसोटोप (Isotopes) कहते हैं। रेडियोऐक्टिव तत्वों के आइसोटोप्स रेडियोऐक्टिव आइसोटोप (Radioactive isotopes) कहलाते हैं। उदाहरणार्थ $_{92}U^{234}$ यूरेनियम $_{92}U^{238}$ का आइसोटोप, $_{90}UX_1{}^{234}$ व $_{90}I_o{}^{230}$ प्राकृतिक थोरियम ($_{90}Th^{232}$) के आइसोटोप, *RaB* व *RaD* सीसे के आइसोटोप हैं जो प्रकृति में स्वतः ही बनते रहते हैं। आजकल विभिन्न तत्वों के रेडियोऐक्टिव आइसोटोप कृत्रिम तरह से भी बनाये जाने लगे हैं।

बोरोन मैग्नीशियम, एल्युमीनियम आदि हल्के तत्वों पर तीव्रगामी *α*-कणों की बौछार करने पर ये रेडियोऐक्टिव बन जाते हैं और फिर विघटित होकर नये तत्व या उनके आइसोटोप में बदल जाते हैं। उदाहरणार्थ $_{13}Al^{27}$ पर *α*-कणों की बौछार करने पर फॉस्फोरस का रेडियोऐक्टिव आइसोटोप $_{15}P^{30}$ प्राप्त होता है। यह पॉजिट्रॉन का उत्सर्जन करके सिलिकॉन (Silicon) $_{14}Si^{30}$ में बदल जाता है जो कि स्थायी है :—



$$_{13}Al^{27}+{}_2He^4 \rightarrow {}_{15}P^{30}+{}_0n^1$$

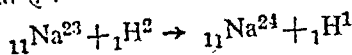
(रेडियो फॉस्फोरस)



$$_{15}P^{30} \rightarrow {}_{14}Si^{30} + {}_{+1}e^{0}$$

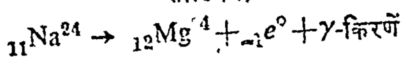
रेडियोफॉस्फोरस सिलिकॉन पॉजिट्रान

इसी प्रकार सोडियम पर तेजगामी ड्यूट्रॉन की बौछार कर रेडियो सोडियम प्राप्त होता है जो कि रेडियो एक्टिव हैं और इलेक्ट्रॉन का उत्सर्जन कर मैग्नीशियम में बदल जाता है।



$$_{11}Na^{23} + {}_{1}H^{2} \rightarrow {}_{11}Na^{24} + {}_{1}H^{1}$$

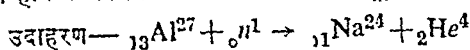
(रेडियो सोडियम)



$$_{11}Na^{24} \rightarrow {}_{12}Mg^{24} + {}_{-1}e^{0} + \gamma\text{-किरणें}$$

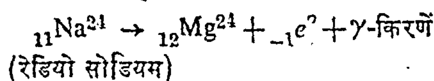
(रेडियो सोडियम)

इसी प्रकार बोरोन, फ्लोरीन, नाइट्रोजन पर α-कणों की बौछार कर उनके रेडियो आइसोटोप प्राप्त किये जाते हैं। न्यूट्रोन की बौछार करके भी रेडियो आइसोटोप प्राप्त किये जाते हैं। यह विधि सबसे उपयुक्त मानी जाती है क्योंकि विद्युत उदासीन होने के कारण नाभिकीय आवेश का न्यूट्रोन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।



उदाहरण— $_{13}Al^{27} + {}_{0}n^{1} \rightarrow {}_{11}Na^{24} + {}_{2}He^{4}$

(रेडियो सोडियम)



$$_{11}Na^{24} \rightarrow {}_{12}Mg^{24} + {}_{-1}e^{0} + \gamma\text{-किरणें}$$

(रेडियो सोडियम)

इस प्रकार के रेडियो आइसोटोप परमाणु भट्टी (Nuclear Reactor) द्वारा प्राप्त किये जाते हैं।

उपयोग—रेडियो ऐक्टिव आइसोटोप का उपयोग विभिन्न क्षेत्रों में होने लगा है। जैसे चिकित्सा, उद्योगों, कृषि आदि में।

चिकित्सा के क्षेत्र में रेडियो कोबाल्ट, रेडियो आयोडीन, रेडियो गन्धक, रेडियो सोडियम व रेडियोफॉस्फोरस का विशेष योगदान है। रेडियो ऐक्टिव-कोबाल्ट और रेडियो ऐक्टिव-आयोडीन द्वारा कैंसर का इलाज किया जाता है। रेडियो ऐक्टिव-आयोडीन से गलगण्ड (Goitre) का इलाज किया जाता है। रेडियो ऐक्टिव स्ट्रॉशियम हड्डी के फोड़े का इलाज करने में विशेष उपयोगी है। रेडियो ऐक्टिव आइसोटोप रोगों की जानकारी प्राप्त करने के लिए ट्रेसर (Tracer) की भांति भी प्रयोग किये जाते हैं।

रेडियो ऐक्टिव आइसोटोपों का विभिन्न उद्योगों में भी विशेष योगदान है। जमीन के नीचे दबे पाइपों में लीकेज का पता रेडियो ऐक्टिव आइसोटोप के द्वारा बड़ी आसानी से लगा लिया जाता है। रेडियो ऐक्टिव आइसोटोपों के द्वारा कागज

तथा धातुओं की चादरों की मोटाई नापी जा सकती है। मशीनों में होने वाले घर्षण का पता भी रेडियो ऐक्टिव आइसोटोप के द्वारा लगाया जाता है।

पौधों के लिए रेडियो ऐक्टिव नाइट्रोजन और रेडियो ऐक्टिव फॉस्फोरस बहुत उपयोगी सिद्ध हुए हैं। रेडियो ऐक्टिव आइसोटोप का ट्रेसर की भाँति प्रयोग कर यह ज्ञात कर लिया जाता है कि किसी विशेष प्रकार की फसल के लिये कौन-सा खाद अधिक उपयोगी है। रेडियो एक्टिव आइसोटोपों की सहायता से सब्जी, फल आदि को कीटाणु मुक्त रखकर सड़ने से बचाया जा सकता है।

11·10. क्यूरी (Curie)

रेडियो ऐक्टिवता की मात्रक क्यूरी (Curie) है। आरम्भ में क्यूरी को निम्न प्रकार परिभाषित किया गया :

"क्यूरी रेडॉन की वह स्थिर परिमाण (Amount) है, जो एक ग्राम रेडियम के सन्तुलन में है।" क्योंकि रेडियम α कण उत्सर्जित कर रेडॉन (Radon) में विघटित होता है। प्रयोगों द्वारा यह ज्ञात हुआ है कि इस क्रिया में प्रति सेकण्ड उत्सर्जित α कणों की संख्या $3{\cdot}7 \times 10^{10}$ है अतः आजकल क्यूरी को निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है :

"एक क्यूरी किसी रेडियो ऐक्टिव पदार्थ की वह मात्रा है जिसमें प्रति सेकण्ड $3{\cdot}7 \times 10^{10}$ विघटन हो रहे हों।"

अतः स्पष्ट है कि कम अर्ध आयु वाले रेडियो ऐक्टिव पदार्थ की कम मात्रा से ही एक क्यूरी ऐक्टिवता प्राप्त हो जावेगी जबकि अधिक अर्धआयु वाले रेडियो ऐक्टिव पदार्थ की अधिक मात्रा से एक क्यूरी ऐक्टिवता प्राप्त होगी। इस प्रकार क्यूरी रेडियो ऐक्टिवता के परिमाण की माप है। क्योंकि क्यूरी रेडियो ऐक्टिवता की बड़ी मात्रक (Large unit) है। अतः व्यवहार में इसकी छोटी मात्रक मिली क्यूरी और माइक्रोक्यूरी प्रचलित है।

1 मिली क्यूरी (milli Curie) $mc = 10^{-3}$ क्यूरी (curie) $= 3{\cdot}7 \times 10^{7}$ विघटन/से०

1 माइक्रोक्यूरी (micro curie) $\mu c = 10^{-6}$ क्यूरी (curie) $= 3{\cdot}7 \times 10^{4}$ विघटन/से०

रेडियो ऐक्टिवता की अधिक बड़ी इकाई मेगा क्यूरी (Mega curie) Mc कहलाती है तथा 10^{6} क्यूरी के बराबर होती है।

रदरफोर्ड भी रेडियो ऐक्टिवता की मात्रक है। एक रदरफोर्ड किसी रेडियो ऐक्टिव पदार्थ की वह मात्रा है जिससे प्रति सेकण्ड 10^{6} विघटन हो रहे हों।

उदाहरण 11·1. एक रेडियो ऐक्टिव तत्व की अर्ध आयु 3·8 दिन है। यदि उस तत्व की आरम्भ में संहति 30 मि० ग्राम हो तो बताइये कि कितने दिनों के पश्चात उसकी संहति 3 मि० ग्राम रह जावेगी ?

सूत्र द्वारा

$$\text{क्षयांक } (\lambda) = \frac{0{\cdot}693}{T \text{ (अर्धआयु)}}$$

दिया हुआ T=3·8 दिन

और $$\frac{N}{N_o} = \frac{3}{30}$$

∴ $$\frac{N}{N_o} = \frac{1}{10}$$

अतः $$\lambda = \frac{0{\cdot}693}{3{\cdot}8} = 0{\cdot}182 \text{ प्रतिदिन}$$

सूत्र $N = N_0 e^{-\lambda t}$ के द्वारा

$$\frac{N}{N_o} = e^{-\lambda t}$$

$\frac{N}{N_o}$ का मान रखने पर

$$\frac{1}{10} = e^{-\lambda t}$$

या $$e^{-\lambda t} = 10$$

या $$\lambda t = \log_e 10$$

या $$\lambda t = 2{\cdot}3026 \times \log_{10} 10$$

या $$t = \frac{2{\cdot}3026 \times 1{\cdot}0000}{0{\cdot}182}$$

∴ $t = 12{\cdot}6$ दिन

अतः 12·6 दिन पश्चात उस तत्व की संहति केवल 3 मिली ग्राम रह जावेगी।

उदाहरण 11·2. एक रेडियो ऐक्टिव तत्व की अर्ध आयु 3·86 दिन है। इसके परमाणु की औसत आयु क्या है ?

सूत्र द्वारा

अर्ध आयु $=0{\cdot}693\times$ औसत आयु

अतः औसत आयु$(\overline{T})=\dfrac{\text{अर्ध आयु }(T)}{0{\cdot}693}$

दिया हुआ $T=3{\cdot}86$ दिन

T का मान रखने पर

$$\overline{T}=\frac{3{\cdot}86}{0{\cdot}693}=5{\cdot}57 \text{ दिन}$$

अतः औसत आयु 5·57 दिन है।

उदाहरण 11·3. 3 मिलीग्राम रेडियोऐक्टिव u^{234} को जिसकी अर्ध आयु $2{\cdot}48\times10^5$ वर्ष है, 62000 वर्ष तक एक स्टोर में रखा जाता है। बताइये (*a*) उसका कितना भाग अपरिवर्तित रहेगा और (*b*) उस समय u^{234} की क्या एक्टिवता होगी ?

दिया हुआ है कि—

अर्धआयु $(T)=2{\cdot}48\times10^5$ वर्ष

समय $(t)=62000$ वर्ष

u^{234} की प्रारम्भ में सहति $=3$ मिलीग्राम

(*a*) सूत्र $\lambda=\dfrac{0{\cdot}693}{T}$ के द्वारा

$$\lambda=\frac{0{\cdot}693}{2{\cdot}48\times10^5} \text{ प्रतिवर्ष}$$

विघटन के नियम से

$$N=N_o e^{-\lambda t}$$

$$\therefore \quad \frac{N_o}{N}=e^{\lambda t}$$

λ और t का मान रखने पर

$$\frac{N_o}{N}=e^{\frac{0.693}{2.48\times10^5}\times\frac{0.62\times10^5}{1}}$$

या $$\frac{N_o}{N}=e^{\frac{0.693\times0.63}{2.48}}$$

या $$\log_e\frac{N_o}{N}=\frac{0.693\times0.62}{2.48}$$

या $$\log_{10}\frac{N_o}{N}=\frac{0.693\times0.62}{2.48\times2.3026}=0.0752$$

$\therefore$ $$\frac{N_o}{N}=\text{Antilog of }0.0752$$

$$=1.190$$

परन्तु $N_o=3$ मिलीग्राम

$\therefore$ $$N=\frac{N}{1.19}=\frac{3}{1.19}$$

$$=2.51 \text{ मिलीग्राम}$$

(b) $$-\frac{dN}{dt}=\lambda N$$

क्योंकि $N=2.51\times10^{-3}$ ग्राम $\times\frac{6.02\times10^{23}\text{ परमाणु}}{234\text{ ग्राम}}$

और 2.48×10^5 वर्ष $=7.857\times10^{12}$ सैकण्ड

$\therefore$ $$\frac{dN}{dt}=\frac{0.693\times2.51\times10^{-3}\times6.02\times10^{23}}{7.857\times10^{12}\times234}\text{ परमाणु}$$

$$=5.7\times10^5 \text{ परमाणु}$$

प्रश्न

1. रेडियोऐक्टिवता से आप क्या समझते हैं ? रेडियोऐक्टिव पदार्थों से कौन-

कौन से विकिरण निकलते हैं ? उनके विभिन्न गुणों का तुलनात्मक विवरण दीजिये ।

2. रदरफोर्ड और सोडी के स्वतः रेडियोऐक्टिव विघटन के नियम का आवेदन करो । इसके आधार पर रेडियोऐक्टिव वृद्धि व क्षय के सिद्धान्त की स्थापना कीजिये ।

3. रेडियोऐक्टिव विघटन से क्या तात्पर्य है ?

सिद्ध करो कि $T=\frac{0.693}{\lambda}$, जहाँ T रेडियोऐक्टिव पदार्थ की अर्धआयु तथा λ क्षयांक है। रेडियोऐक्टिव पदार्थ की औसत आयु और क्षयांक में क्या सम्बन्ध है ?

4. रेडियोऐक्टिव पदार्थों के उत्तरोत्तर रूपान्तरों के सिद्धान्त की स्थापना कीजिये और बताइये कि रेडियोऐक्टिव संतुलन कब प्राप्त होगा ?

5. विभिन्न रेडियोऐक्टिव श्रेणियों का संक्षेप में वर्णन कीजिये ।

6. न्यूट्रिनों की उत्पत्ति के बारे में लेख लिखिये ।

7. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखो—

(i) रेडियोऐक्टिव विघटन

(ii) रेडियोऐक्टिव संतुलन

(iii) अर्ध आयु और औसत आयु

(iv) रेडियोऐक्टिव आइसोटोप्स और उनके उपयोग

(v) क्यूरी

8. रेडॉन की अर्धआयु 3·8 दिन है । कितने समय पश्चात् रेडॉन के एक नमूने का केवल 20 वाँ भाग बच रहेगा ? [उत्तर : 16·45 दिन]

9. रेडियम की अर्धआयु 1500 वर्ष है । कितने वर्षों में 1 ग्राम रेडियम (*a*) 1 सेन्टीग्राम कम हो जावेगा (*b*) 1 सेन्टीग्राम रह जावेगा ।

[उत्तर : 23·25 और 10560 वर्ष]

10. यूरेनियम की अर्धआयु 4.5×10^9 वर्ष है । यूरेनियम के लिए क्षयांक तथा 1 ग्राम यूरेनियम द्वारा प्रति सैकण्ड उत्सर्जित α कणों के मान की गणना कीजिये । [उत्तर : 4.85×10^{-18} प्रति सैकण्ड, 12·27]

11. U^{238} की अर्धआयु 4.5×10^9 वर्ष है । इसकी ऐक्टिवता क्यूरी में व्यक्त करो । (आवोगाद्रो संख्या $=6.02\times10^{23}$)

[उत्तर : 3.3×10^{-7} क्यूरी]

12. एक ग्राम रेडियम एक सैकण्ड में $3 \cdot 7 \times 10^{10}$ कण देता है। उसकी अर्धआयु तथा औसत आयु निकालिये। (रेडियम का परमाणुभार=226, $\log_e 2$ = 0·693 और 1 ग्राम अणु में परमाणुओं की संख्या=$6 \cdot 02 \times 10^{23}$)

[उत्तर : 1595 वर्ष, 2280 वर्ष]

13. एक रेडियोऐक्टिव पदार्थ की अर्धआयु 20 दिन है। उसके क्षयांक और औसत आयु की गणना कीजिये।

14. एक माइक्रोग्राम Ra^{226} द्वारा प्रति सैकण्ड उत्सर्जित α-कणों की संख्या निकालिये। 500 वर्ष तक विघटित होने के पश्चात् उत्सर्जित α-कणों की संख्या कितनी रह जावेगी? विघटन पदार्थ के प्रभाव को नगण्य माना जा सकता है। [उत्तर : $3 \cdot 62 \times 10^4$ और $2 \cdot 92 \times 10^4$]

12

इलेक्ट्रॉनिकी (Electronicsi)
निर्वात-नलिकाएँ (Vaccum Tubes)

विभिन्न इलेक्ट्रॉनिक उपकरणों में निर्वात-नलिकाओं (Vacuum-tubes) का उपयोग सर्वविदित है। इलेक्ट्रॉन के प्रवाह को नियन्त्रित करने तथा विभिन्न आवृत्ति परास में कार्य करने की क्षमता के कारण इलेक्ट्रॉनिकी में निर्वात-नलिकाओं का विशेष स्थान है। इस अध्याय में इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन और कई प्रकार की निर्वात-नलिकाओं का विस्तृत वर्णन किया गया है।

हम जानते हैं कि प्रत्येक पदार्थ परमाणुओं से बनता है। प्रत्येक परमाणु में धनावेशयुक्त नाभिक (Nucleus) होता है जिसके चारों ओर विभिन्न कक्षाओं में इलेक्ट्रॉन चक्कर लगाते रहते हैं। इलेक्ट्रॉन ऋण-आवेश युक्त होते हैं और सामान्य स्थिति में परमाणु विद्युत उदासीन होता है। सबसे बाहरी वाली कक्षा (Outermost orbit) में स्थित इलेक्ट्रॉन्स, अन्य कक्षा में चक्कर लगा रहे इलेक्ट्रॉन्स की अपेक्षा, नाभिक से अधिक दूर होने के कारण, उसकी ओर कम शक्ति से आकर्षित होते हैं। इस कारण ये इलेक्ट्रॉन्स अन्य इलेक्ट्रॉन्स की अपेक्षा अधिक स्वतन्त्र होते हैं तथा मुक्त इलेक्ट्रॉन्स (Free Electrons) कहलाते हैं।

12·1 इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन तथा कार्य-फलन (Electron emission & work function)

धातुओं में मुक्त इलेक्ट्रॉन उसी प्रकार इधर उधर स्वतन्त्रतापूर्वक घूमते रहते

12. एक ग्राम रेडियम एक सैकण्ड में $3 \cdot 7 \times 10^{10}$ कण देता है। उसकी अर्धआयु तथा औसत आयु निकालिये। (रेडियम का परमाणुभार$=226$, $\log_e 2 = 0 \cdot 693$ और 1 ग्राम अणु में परमाणुओं की संख्या$=6 \cdot 02 \times 10^{23}$)

[उत्तर : 1595 वर्ष, 2280 वर्ष]

13. एक रेडियोऐक्टिव पदार्थ की अर्धआयु 20 दिन है। उसके क्षयांक और औसत आयु की गणना कीजिये।

14. एक माइक्रोग्राम Ra^{226} द्वारा प्रति सैकण्ड उत्सर्जित α-कणों की संख्या निकालिये। 500 वर्ष तक विघटित होने के पश्चात् उत्सर्जित α-कणों की संख्या कितनी रह जावेगी ? विघटन पदार्थ के प्रभाव को नगण्य माना जा सकता है। [उत्तर : $3 \cdot 62 \times 10^4$ और $2 \cdot 92 \times 10^4$]

12

इलेक्ट्रॉनिकी (Electronicsi)
निर्वात-नलिकाएँ (Vaccum Tubes)

12·1. इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन तथा कार्य-फलन
12·2. तापायनिक उत्सर्जन
12·3. प्रत्यक्ष तप्त तथा अप्रत्यक्ष तप्त कैथोड
12·4. डायोड
12·5. ट्रायोड
12·6. टेट्रोड
12·7. पेन्टोड

विभिन्न इलेक्ट्रॉनिक उपकरणों में निर्वात-नलिकाओं (Vacuum-tubes) का उपयोग सर्वविदित है। इलेक्ट्रॉन के प्रवाह को नियन्त्रित करने तथा विभिन्न आवृत्ति परास में कार्य करने की क्षमता के कारण इलेक्ट्रॉनिकी में निर्वात-नलिकाओं का विशेष स्थान है। इस अध्याय में इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन और कई प्रकार की निर्वात-नलिकाओं का विस्तृत वर्णन किया गया है।

हम जानते हैं कि प्रत्येक पदार्थ परमाणुओं से बनता है। प्रत्येक परमाणु में धनावेशयुक्त नाभिक (Nucleus) होता है जिसके चारों ओर विभिन्न कक्षाओं में इलेक्ट्रॉन चक्कर लगाते रहते हैं। इलेक्ट्रॉन ऋण-आवेश युक्त होते हैं और सामान्य स्थिति में परमाणु विद्युत उदासीन होता है। सबसे बाहरी वाली कक्षा (Outermost orbit) में स्थित इलेक्ट्रॉन्स, अन्य कक्षा में चक्कर लगा रहे इलेक्ट्रॉन्स की अपेक्षा, नाभिक से अधिक दूर होने के कारण, उसकी ओर कम शक्ति से आकर्षित होते हैं। इस कारण ये इलेक्ट्रॉन्स अन्य इलेक्ट्रॉन्स की अपेक्षा अधिक स्वतन्त्र होते हैं तथा मुक्त इलेक्ट्रॉन्स (Free Electrons) कहलाते हैं।

12·1 इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन तथा कार्य-फलन (Electron emission & work function)

धातुओं में मुक्त इलेक्ट्रॉन उसी प्रकार इधर उधर स्वतन्त्रतापूर्वक घूमते रहते

हैं जिस प्रकार कि गैस में उसके अणु । सामान्य ताप पर ये मुक्त इलेक्ट्रॉन धातु के तल को छोड़ कर बाहर नहीं निकल पाते क्योंकि तल पर कार्यकारी कुछ आकर्षण बल, उन पर रोधिका (Barrier) की भांति कार्य करते हैं । स्वयं इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा इतनी नहीं होती कि इस आकर्षण बल के विरुद्ध कार्य कर बाहर निकल सकें और इस कारण इलेक्ट्रॉन धातु तल से बाहर नहीं निकल पाते । यदि इन इलेक्ट्रॉन को किसी तरह इतनी ऊर्जा दे दी जावे ताकि वे आकर्षण बल के विरुद्ध कार्य कर सतह से बाहर निकल सकें तो इलेक्ट्रॉन पूर्ण रूप से स्वतन्त्र होकर बाहर निकल जावेंगे । इस प्रकार धातु की सतह से इलेक्ट्रॉन के बाहर निकलने की क्रिया को 'इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन" कहते हैं तथा वह धातु इलेक्ट्रॉन उत्सर्जक कहलाती है ।

किसी इलेक्ट्रॉन उत्सर्जक (Electron emitter) धातु से एक इलेक्ट्रॉन को उत्सर्जित करने में आवश्यक न्यूनतम ऊर्जा (Minimum Energy) का मान उस धातु का कार्यफलन (Work function) कहलाता है ।

इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन के लिए आवश्यक ऊर्जा कई तरह से प्रदान की जा सकती है । जैसे—

(1) ऊष्मा के रूप में (तापायनिक उत्सर्जन)
(2) प्रकाश के रूप में (प्रकाश विद्युत उत्सर्जन)
(3) विद्युतीय या चुम्बकीय क्षेत्र में एकत्रित ऊर्जा के रूप में (क्षेत्र उत्सर्जन)
(4) तीव्र वेग से गति कर रहे इलेक्ट्रॉन द्वारा (द्वितीयक उत्सर्जन)

उपरोक्त सभी विधियों में से तापायनिक उत्सर्जन ही सबसे अधिक महत्वपूर्ण है । प्रायः सभी प्रकार की निर्वात नलिकाओं में तापायनिक उत्सर्जन द्वारा ही इलेक्ट्रॉन प्राप्त होते हैं ।

12·2. तापायनिक उत्सर्जन (Thermionic Emission)

तापायनिक उत्सर्जन में इलेक्ट्रॉन उत्सर्जक को गर्म किया गया है जिससे उनमें उपस्थित मुक्त इलेक्ट्रॉन की ऊष्मीय (Thermal) या गतिज ऊर्जा (Kinetic energy) बढ़ जाती है । इस कारण बहुत से इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा कार्य फलन के बराबर या उससे अधिक हो जाती है और वे उत्सर्जक के तल से बाहर निकल जाते हैं । किसी उत्सर्जक को ऊर्जा ऊष्मा (Heat) के रूप में प्रदान कर उसमें से इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन की क्रिया को तापीय उत्सर्जन कहते हैं । तापीय उत्सर्जन में उत्सर्जित इलेक्ट्रॉन की संख्या उत्सर्जक (Emitter) के ताप (Temperature) तथा कार्यफलन (work function) पर निर्भर करती है । किसी तप्त धातु के तल से उत्सर्जित तापायनिक धारा (Thermionic current) तथा उसके ताप (Temperature) में सम्बन्ध निम्न समीकरण द्वारा दिया जाता है ।

$$I = AT^2 e^{-\frac{\phi_0}{KT}} \qquad \ldots(12\cdot1)$$

यहाँ I = तापायनिक धारा घनत्व (Thermionic Current density)
A = नियतांक (Constant)

टंगस्टन, टेन्टेलम आदि धातुओं के लिए A का मान लगभग 60×10^4 एम्पियर/मीटर^2/°K^2 है।

K = बोल्जमान स्थिरांक (Boltzmann Constant)
T = उत्सर्जक का निरपेक्ष ताप (Absolute Temperature)

और ϕ_o = कार्यफलन (work function)

ϕ_o ऊर्जा पाकर ही इलेक्ट्रॉन धातु की सतह से बाहर निकल पाता है। इस सम्बन्ध को रिचार्डसन समीकरण (Richardson Equation) कहते हैं। इस सम्बन्ध से स्पष्ट हो जाता है कि ताप में थोड़े से परिवर्तन के कारण ही धारा में बहुत अधिक परिवर्तन हो जायेगा।

प्राय: इलेक्ट्रॉन-नलिकाओं में प्रयुक्त इलेक्ट्रॉन उत्सर्जक (Electron emitters), टंगस्टन (Tungsten), टेन्टेलम (Tantalum), थोरियम लेपित टंगस्टन (Thoriated tungsten) और बेरियम-ऑक्साइड तथा स्ट्रान्शियम ऑक्साइड लेपित होते है। इनके लिए A तथा ϕ_o का मान निम्न तालिका में दिया गया है।

इलेक्ट्रॉन उत्सर्जक (Electron Emitter)	A एम्पियर/मीटर^2/°K^2	ϕ_o ev
टंगस्टन	60×10^4	4·52
थोरियम लेपित टंगस्टन	3×10^4	2·63
ऑक्साइडलेपित कैथोड	$0·01 \times 10^4$	1·0

इलेक्ट्रॉन-नलिकाओं में प्रयुक्त इलेक्ट्रॉन उत्सर्जक (Electron emitter) को कैथोड (Cathode) कहते हैं।

12·3 प्रत्यक्ष तप्त तथा अप्रत्यक्ष तप्त कैथोड (Directly heated and indirectly heated Cathode)

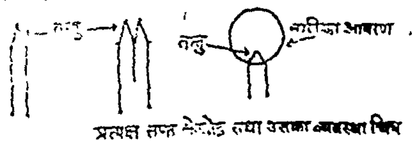
कैथोड दो प्रकार के होते हैं :

(1) प्रत्यक्ष तप्त कैथोड और

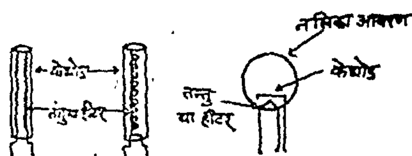
(2) अप्रत्यक्ष तप्त कैथोड

प्रत्यक्ष तप्त कैथोड में तन्तु या हीटर (Filament or Heater) ही इलेक्ट्रॉन उत्सर्जक (Electron emitter) का भी कार्य करता है। जब तन्तु या हीटर में धारा प्रवाहित कर उसे गर्म किया जाता है तो उसी में से इलेक्ट्रॉन उत्सर्जित

होता है। अतः प्रत्यक्ष तप्त कैथोड के लिए यह आवश्यक है कि उसका पदार्थ उच्च गलनांक (High melting point) वाला और अच्छा इलेक्ट्रॉन उत्सर्जक (Good electron emitter) हो।



अप्रत्यक्ष तप्त कैथोड में हीटर और इलेक्ट्रॉन उत्सर्जक अलग अलग होते हैं। एक खोखली बेलनाकार नली की सतह पर बेरियम ऑक्साइड तथा स्ट्रॉन्सियम ऑक्साइड का लेप चढ़ा कर उसके बीच हीटर या तन्तु रख दिया जाता है। हीटर में धारा प्रवाहित कर उसे गर्म करते हैं जब कि इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन कैथोड से होता है। अप्रत्यक्ष तप्त कैथोड में उन पदार्थों का प्रयोग कैथोड के रूप में किया जा सकता है जो अच्छे इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन के साथ-साथ कम गलनांक (Low melting point) वाले हैं। आजकल प्रायः सभी प्रकार की इलेक्ट्रॉन-नलिकाओं में अप्रत्यक्ष तप्त कैथोड ही होते हैं। प्रत्यक्ष तप्त और अप्रत्यक्ष तप्त कैथोड को व्यवहार में चित्र (12·1) द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

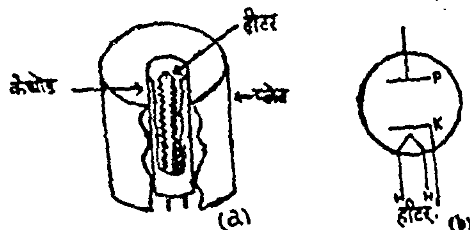


चित्र 12·1

12·2. डायोड (Diode)

यह सबसे सरल प्रकार की इलेक्ट्रॉन-नलिका है। इसमें केवल दो इलेक्ट्रोड (Electrode) होते हैं अतः इसे डायोड कहते हैं।

चित्र (12·2) में डायोड को प्रदर्शित किया गया है। K अप्रत्यक्ष तप्त कैथोड तथा P प्लेट (Plat) या ऐनोड (Anode) है जिसे एक उच्च निर्वात की हुई काँच या धातु की नलिका में रखते हैं। प्लेट प्रायः निकिल, टेन्टेलम या मोली-

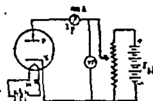


चित्र 12·2

ब्डेनम आदि की खोखली बेलनाकार रूप में होती है। कैथोड, प्लेट के बीच अक्ष के साथ स्थित होता है। हीटर, कैथोड तथा प्लेट का सम्बन्ध नलिका के बाहर लगे पिनों से होता है। व्यवहार में डायोड को चित्र [12·2)b] के द्वारा ही प्रदर्शित करते हैं।

(a) डायोड का परिपथ चित्र तथा कार्य विधि (Circuit diagram function of a diode)

हीटर में धारा प्रवाहित कर उसे गर्म किया जाता है। हीटर के गर्म होने पर कैथोड से से इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन आरम्भ हो जाता है। प्लेट को बैटरी Ebb के द्वारा धनात्मक विभव (Positive potential) पर रखा जाता है तथा प्लेट पर आरोपित धनात्मक विभव को विभव-विभाजक (Potential divider) द्वारा परिवर्तित किया जा सकता है। प्लेट पर आरोपित धनात्मक विभव V_p वोल्टमीटर द्वारा प्राप्त हो जाता है। प्लेट धारा का मान प्लेट परिपथ में लगे मिली-एमीटर (MA) द्वारा ज्ञात हो जाता है।



चित्र 12·3

कैथोड के सापेक्ष प्लेट धन-विभव (Positive potential) पर होने के कारण इलेक्ट्रॉन प्लेट की ओर आकर्षित होते हैं। इस कारण डायोड के अन्दर इलेक्ट्रॉन प्रवाह कैथोड से प्लेट की ओर चलते हैं तथा फिर बाह्य परिपथ में होते हुए पुन. कैथोड पर पहुँच जाते हैं। इस प्रकार परिपथ पूर्ण हो जाता है और प्लेट परिपथ में धारा प्रवाहित होने लगती है। प्लेट परिपथ में प्रवाहित धारा की दिशा इलेक्ट्रॉन प्रवाह के विपरीत दिशा में मानी जाती है। प्लेट परिपथ में प्रवाहित धारा को प्लेट धारा (I_p) (plate current) तथा प्लेट पर आरोपित विभव को प्लेट विभव V_p (Plate Potential) कहते हैं। प्लेट विभव को बदल देने पर प्लेट धारा भी बदल जाती है।

डायोड के अभिलक्षणिक वक्र (Characteristic curves of Diode)

डायोड के लिए प्लेटधारा 'I_p' का प्लेटविभव 'V_p' के साथ परिवर्तन एक वक्र के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है। इस वक्र को (V_p–I_p) अभिलाक्षणिक वक्र कहते है। चित्र (12·4) में डायोड के (V_p—I_p) अभिलक्षणिक वक्र को प्रदर्शित किया गया है। आरम्भ में जब प्लेट विभव का मान कम है, कम इलेक्ट्रॉन के आकर्षित होने के कारण प्लेटधारा भी कम होती है। प्लेट विभव में वृद्धि के साथ प्लेटधारा भी बढ़ती जाती है। लेकिन एक स्थिति ऐसी आती है जब कैथोड द्वारा उत्सर्जित सारे इलेक्ट्रॉन प्लेट द्वारा आकर्षित कर लिये जाते हैं और प्लेटधारा का मान अधिकतम हो जाता है। (V_p-I_p) वक्र पर वह बिन्दु, जिस पर धारा का मान अधिकतम हो जाता है, सन्तृप्ति बिन्दु (Saturation point) तथा प्लेटधारा सन्तृप्ति धारा (Saturation Current) कहलाती है। यदि प्लेट



चित्र 12·4

विभव को अब और बढ़ाया जावे तो प्लेट धारा के मान में वृद्धि नहीं होती है। हीटर में प्रवाहित धारा को बदल देने पर संतृप्ति धारा का मान भी बदल जाता है।

(b) चाइल्ड का नियम (Child's law)

यह स्पष्ट हो ही चुका है कि प्लेटधारा का मान प्लेट विभव पर निर्भर करता है। अन्तराकाशी आवेश सीमित क्षेत्र (Spac echarge limited region) में प्लेटधारा 'I_p, प्लेट विभव की $\frac{3}{2}$ घात (Power) के समानुपाती होती है अर्थात्

$$I_p = KV_p{}^{3}/_{2} \qquad ....(12\cdot2)$$

यहाँ K एक स्थिरांक जिसका मान इलैक्ट्रोड के आकार (Shape) तथा नलिका की रचना पर निर्भर करता है। यह चाइल्ड का नियम (Child's law) कहलाता है।

प्लेट पर प्रत्यावर्ती विभव (Alternating voltage) आरोपित करने पर पूर्ण चक्र में प्लेटधारा केवल उस अर्धचक्र के समय प्रवाहित होगी जबकि प्लेट, केथोड के सापेक्ष धनात्मक है। दूसरे अर्वचक्र (Haljcycle) के समय जब प्लेट, केथोड के सापेक्ष ऋणात्मक है, प्लेटधारा प्रवाहित नहीं होती। इसी कारण डायोड का प्रयोग दिष्टकारी के रूप में किया जा सकता है।

(c) प्लेट प्रतिरोध (Plate Resistance)

प्लेटधारा और प्लेटविभव में रेखीय सम्बन्ध (Linear relation) न होने के कारण प्लेट प्रतिरोध को V_p और I_p के अनुपात से प्रदर्शित न कर वक्र के सरल रेखीय भाग (Straight line portion) में Δv_p (प्लेटविभव में परिवर्तन) और ΔI_p (Δv_p के द्वारा I_p में परिवर्तन) के अनुपात द्वारा दिया जाता है। अर्थात्

$$\text{प्लेट प्रतिरोध } (V_p) = \frac{\Delta V_p}{\Delta I_p} \qquad ....(12\cdot3)$$

$$= \frac{\text{प्लेट विभव में अल्प परिवर्तन}}{\text{प्लेट धारा में होने वाला अल्प परिवर्तन}}$$

प्लेट प्रतिरोध को आन्तरिक प्रतिरोध (Internal Resistance) भी कहते तथा V_p से प्रदर्शित करते हैं। इसकी इकाई ओह्म है।

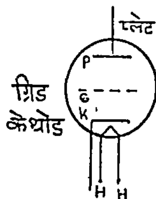
(d) अन्तराकाशी आवेश (Space charge)

प्लेट पर आरोपित धन विभव का मान कम होने पर उसके द्वारा, केथोड से उत्सर्जित सारे इलेक्ट्रॉन, आकर्षित नहीं होते हैं। इस कारण प्लेट द्वारा आकर्षित न होने वाले इलेक्ट्रान केथोड और प्लेट के बीच एकत्रित हो जाते हैं और इलेक्ट्रॉन

का बादल (cloud) सा बनाते हैं। यह इलेक्ट्रॉन का बादल अन्तराकाशी आवेश कहलाता है। अन्तराकाशी आवेश के कारण केथोड से उत्सर्जित इलेक्ट्रॉन तीव्र रूप से विकर्षित होते हैं जिससे उनके प्लेट तक पहुँचने में बाधा पहुँचती है। इस प्रकार का प्रभाव प्लेट और केथोड के बीच की दूरी कम कर नियंत्रित किया जा सकता है।

12·5. ट्रायोड (Triode)

जब डायोड में कैथोड और प्लेट के बीच एक इलेक्ट्रोड और लगा दिया जाता है, नलिका ट्रायोड कहलती है। 1907 में De Forest नामक वैज्ञानिक ने डायोड में तीसरा इलैक्ट्रोड लगाकर ट्रायोड की रचना की। यह अतिरिक्त इलैक्ट्रोड (Additional Electrode) नियन्त्रक ग्रिड (control grid) कहलाता है। नियन्त्रक ग्रिड को केवल ग्रिड भी कहते हैं। ग्रिड प्राय: सर्पिल तार (Spiral wire) या महीन जाली (fine mesh) का खोखले बेलनाकार रूप में होता है और प्लेट तथा केथोड के बीच प्लेट की अपेक्षा केथोड के अधिक नजदीक होता हैं। ग्रिड नाइक्रोम, टंगस्टन, टेन्टेलम, लोहा आदि धातुओं का बना होता है।



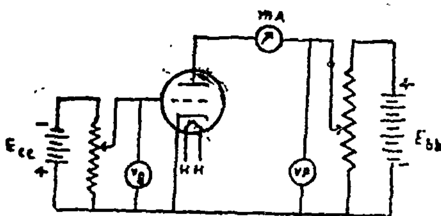
चित्र 12 5

(a) नियंत्रक ग्रिड का कार्य (Action of Control grid)—

प्लेट की अपेक्षा केथोड के निकट होने के कारण नियन्त्रक ग्रिड प्लेट धारा को बहुत अधिक प्रभावित करता है। ग्रिड को केथोड के सापेक्ष ऋणात्मक विभव (Negative potential) पर रखने पर उसके द्वारा केथोड से आ रहे इलेक्ट्रॉन मे से कुछ इलेक्ट्रॉन विकर्षित कर दिये जाते हैं। इस कारण सब इलेक्ट्रॉन प्लेट तक नही पहुँच पाते और प्लेट धारा का मान कम हो जाता है। ग्रिड पर आरोपित ऋणात्मक विभव की ओर अधिक बढाने पर प्लेट धारा का मान कम हो जाता है। ग्रिड पर आरोपित ऋणात्मक विभव की ओर अधिक बढ़ाने पर प्लेटधारा का मान कम होता जाता है। ग्रिड के एक निश्चित ऋणात्मक विभव पर प्लेटधारा शून्य (Zero) हो जाती है। यद्यपि केथोड के सापेक्ष प्लेट धन विभव पर है। इस स्थिति में केथोड द्वारा उत्सर्जित सभी इलेक्ट्रॉन ग्रिड द्वारा विकर्षित कर दिये जाते हैं जिससे प्लेट तक कोई भी इलेक्ट्रॉन नहीं पहुँचता। ग्रिड पर आरोपित ऋणात्मक विभव को ग्रिड अभिनति विभव (Grid bias Potential) कहते हैं। ग्रिड अभिनति विभव का वह मान जिस पर प्लेट धारा शून्य हो जाती है, Cut off अभिनति कहा जाता है। ग्रिड पर केथोड के सापेक्ष धन विभव आरोपित किया जाने पर इसके द्वारा इलेक्ट्रॉन आकर्षित होते है। इस कारण अधिक इलेक्ट्रॉन प्लेट तक पहुँचने में सफल होते हैं एवं प्लेट धारा में वृद्धि हो जाती है। केथोड के सापेक्ष ग्रिड को प्राय: ऋणात्मक विभव पर ही रखते है।

(b) **ट्रायोड का परिपथ चित्र तथा अभिलक्षणिक वक्र** (Circuit diagram and characteristics of a triode)

ट्रायोड का परिपथ चित्र (12·6) में दिया गया है। यह परिपथ डायोड परिपथ जैसा ही है। ग्रिड को केथोड के सापेक्ष ऋणात्मक विभव पर रखने तथा उसका मान परिवर्तित करने के लिए बैटरी E_{cc} तथा विभव विभाजक (Potential divider) का प्रयोग किया गया है। ग्रिड पर आरोपित विभव V_g वोल्टमीटर द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। जब ग्रिड पर धन विभव आरोपित करना हो तब बैटरी के अन्तिमों को बदल दिया जाता है।



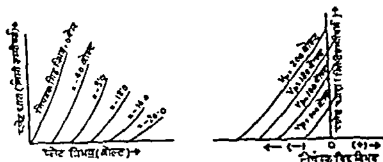
चित्र 12 6

ट्रायोड के लिए प्लेटधारा 'I_p' का मान, प्लेटविभव 'V_p' तथा ग्रिड विभव 'V_g' दोनों पर ही निर्भर करता है। अतः I_p में V_p और V_g के कारण होने वाले परिवर्तन को ग्राफ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है जिन्हें अभिलक्षणिक वक्र कहते हैं। ट्रायोड के लिए निम्न दो अभिलक्षणिक वक्र मुख्य हैं।

(1) I_p–V_p) अभिलक्षणिक वक्र अर्थात प्लेटधारा-प्लेटविभव अभिलक्षणिक वक्र जब कि ग्रिडविभव (V_g) का मान स्थिर (Fixed) है। यह अभिलक्षणिक वक्र स्थिर ग्रिड विभव पर प्लेट विभव के साथ प्लेट धारा में होने वाले परिवर्तन को प्रदर्शित करता है। (I_p–V_p) अभिलक्षणिक वक्र चित्र [12·7 (a)] में प्रदर्शित की गई है। इस प्रकार की अभिलक्षणिक वक्र प्राप्त करने के लिए ग्रिड विभव को स्थिर रखकर, प्लेटविभव को शून्य से क्रम वार बढ़ाया जाता है तथा प्रत्येक V_p के मान के लिए प्लेटधारा I_p ज्ञात कर ली जाती है। I_p को Y—अक्ष और V_p को X—अक्ष के साथ लेते हुए I_p तथा V_p के बीच प्राप्त ग्राफ (I_p–V_p) अभिलक्षणिक वक्र है।

(2) (I_g–V_g) अभिलक्षणिक वक्र अर्थात् प्लेट धारा-ग्रिड विभव अभिलक्षणिक वक्र जबकि प्लेट विभव (V_p) का मान स्थिर (Fixed) है। यह अभिलक्षणिक वक्र स्थिर प्लेट विभव पर ग्रिड विभव के साथ प्लेट धारा में होने वाले परिवर्तन को प्रदर्शित करता है। (I_p–V_g) अभिलक्षणिक वक्र चित्र [12·7(b)] में प्रदर्शित की गई हैं। इस प्रकार की अभिलक्षणिक वक्र प्राप्त करने के लिए प्लेट विभव को स्थिर रखकर, पहले ग्रिड पर शून्य से क्रमवार ऋणात्मक विभव बढ़ाया जाता है

तथा प्रत्येक ऋणात्मक V_g के लिए प्लेट धारा I_p का मान ज्ञात कर लिया जाता है। V_g का मान उस समय तक बढ़ाया जाता है जब तक कि (cut off) प्राप्त न हो जावे। फिर प्रयोग ग्रिड पर धन विभव लगाकर दोहराया जाता है। I_p को Y—अक्ष तथा V_g को X—अक्ष के साथ लेते हुए I_p और V_g के बीच प्राप्त ग्राफ (I_p-V_g) अभिलाक्षणिक वक्र है।



चित्र 12·7

यह पहले ही बताया जा चुका है कि I_p का मान V_p तथा V_g दोनों पर ही निर्भर करता है। गणितीय रूप में इनके बीच सम्बन्ध को निम्न सूत्र द्वारा दिया जा सकता है।

$$I_p = K\left(V_g + \frac{V_p}{\mu}\right)^{3/2} \qquad \text{....(12·4)}$$

यहाँ K एक स्थिरांक तथा μ ट्रायोड का प्रवर्धन गुणक (Amplification factor) है।

(c) ट्रायोड के नियतांक (Constants of Triode)

ट्रायोड के तीन नियतांक (constants) होते हैं।

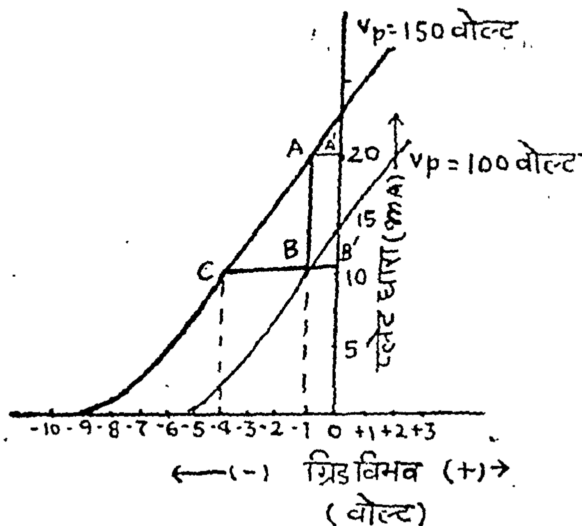
(1) प्रवर्धन गुणक (Amplification factor)

(2) प्लेट प्रतिरोध (Plate resistance)

अन्योन्य चालकता (Mutual conductance or Trans conductance)

(1) प्रवर्धन गुणक—ट्रायोड के प्लेट परिपथ में प्रवाहित प्लेट धारा को ग्रिड विभव बदल कर भी परिवर्तित किया जा सकता है और प्लेट विभव को बदल कर भी। अतः

प्लेट धारा के मान में एक निश्चित लेकिन अल्प परिवर्तन करने के लिए, प्लेटविभव में परिवर्तन (जब ग्रिड विभव स्थिर है) और ग्रिड विभव में परिवर्तन (जब प्लेट विभव स्थिर है) का अनुपात प्रवर्धन गुणक (Amplification factor)



चित्र 12·8

कहलाता है। प्रवर्धन गुणक को μ से प्रदर्शित किया जाता है तथा इसकी कोई इकाई नहीं होती।

$$\text{प्रवर्धन गुणक } (\mu) = \frac{\Delta V_p}{\Delta V_g} \quad (\text{जबकि } \Delta I_p \text{ स्थिर है})$$

$$= \frac{\text{प्लेट विभव में परिवर्तन}}{\text{ग्रिड विभव में परिवर्तन}} \quad (\text{जबकि } \Delta I_p \text{ स्थिर है})$$

प्रवर्धन गुणक का मान ट्रायोड के अभिलक्षणिक वक्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। चित्र (12·8) के अनुसार

$\Delta I_p = AB = 10 mA$ के लिए

$\Delta V_p = 50$ वोल्ट

और $\Delta V_g = 3$ वोल्ट

$$\therefore \mu = \frac{50}{3} = 16{\cdot}6$$

प्रवर्धक गुणक का मान 16·6 होना यह बताता है कि ग्रिड, प्लेट के तुलना प्लेट धारा को परिवर्तित करने में 16·6 गुना अधिक प्रभावी है।

(2) प्लेट प्रतिरोध—ग्रिड विभव को स्थिर रखकर, प्लेट विभव में परिवर्तन तथा उसके द्वारा प्लेट धारा में होने वाले परिवर्तन का अनुपात प्लेट प्रतिरोध (Plate resistance) कहलाता है। प्लेट प्रतिरोध को आन्तरिक प्रतिरोध (Internal Resistance) भी कहते हैं और प्रायः r_p से प्रदर्शित करते हैं। इसकी इकाई ओह्म है

$$\text{प्लेटप्रतिरोध } (r_p) = \frac{\Delta V_p}{\Delta I_p} \quad (\text{जबकि } V_g \text{ स्थिर है})$$

$$= \frac{\text{प्लेट विभव मे परिवर्तन}}{\text{प्लेट धारा मे परिवर्तन}} \quad (\text{जबकि } V_g \text{ स्थिर है})$$

प्लेटप्रतिरोध का मान ट्रायोड के अभिलक्षणिक वक्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। चित्र (12·8) के अनुसार

स्थिर V_g पर

$\Delta V_p = 50$ वोल्ट

और $\Delta I_p = 10 mA = 10 \times 10^{-3}$ एम्पियर

$$\therefore \quad r_p = \frac{50}{10 \times 10^{-3}} = 5000 \text{ ओह्म}$$

(3) अन्योन्य चालकता—प्लेट विभव को स्थिर रखकर, ग्रिड विभव में परिवर्तन तथा उसके द्वारा प्लेटधारा में होने वाले परिवर्तन का अनुपात अन्योन्य चालकता (Mutual conductance) कहलाता है। इसे प्रायः g_m से प्रदर्शित करते हैं और इसकी इकाई 'म्हो' (Mho) है।

$$\text{अन्योन्य चालकता } (g_m) = \frac{\Delta I_p}{\Delta V_g} \quad (\text{जबकि } V_p \text{ स्थिर है})$$

$$= \frac{\text{प्लेटधारा में परिवर्तन}}{\text{ग्रिड विभव में परिवर्तन}} \quad (\text{जबकि } V_p \text{ स्थिर है})$$

प्रवर्धक गुणक और प्लेट प्रतिरोध की [illegible] ट्रायोड के अभिलाक्षणिक वक्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। चित्र (12·8) के अनुसार

और $\Delta I_p = 10 mA = 10 \times 10^{-3}$ एम्पियर

$$\therefore \quad g_m = \frac{10 \times 10^{-3}}{3} = 3{\cdot}3 \times 10^{-3} \text{ म्हो}$$

(d) μ, r_p और g_m में सम्बन्ध—

ट्रायोड के तीनों नियतांकों में निम्न सम्बन्ध होता है।

$$\mu = r_p \times g_m$$

इस सम्बन्ध की स्थापना निम्न प्रकार की जा सकती है।

$$\text{क्योंकि} \quad \mu = \frac{\Delta V_p}{\Delta V_g}$$

$$\text{अतः} \quad \mu = \frac{\Delta V_p}{\Delta V_g} \times \frac{\Delta I_p}{\Delta I_p}$$

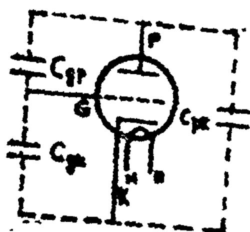
$$\text{या} \quad = \frac{\Delta V_p}{\Delta I_p} \times \frac{\Delta I_p}{\Delta V_g}$$

$$\therefore \quad \mu = r_p \times g_m \qquad \text{....(12·5)}$$

विभिन्न ट्रायोड नलिकाओं के लिए μ, g_m और r_p का मान भिन्न-भिन्न होता है। रेडियो संचार व्यवस्था में ट्रायोड का महत्वपूर्ण स्थान है।

(e) अन्तर्विद्युतोद धारिता (Interelectrode capacitance)

जब दो पास-पास रखे चालकों के बीच कोई डाइ-इलेक्ट्रिक (Di-electric) रख दिया जाता है तो वह संधारित्र की तरह कार्य करता है। ट्रायोड में प्रयुक्त इलेक्ट्रोड्स (प्लेट, ग्रिड और केथोड) चालक और उनके बीच का स्थान डाइ-इलेक्ट्रिक की भांति व्यवहार करता है। इस कारण प्रत्येक इलेक्ट्रोड युग्म के बीच कुछ धारिता होती है जिसे अन्तर्विद्युतोद धारिता कहते हैं। प्लेट और ग्रिड के बीच धारिता को C_{gp}, ग्रिड और केथोड के बीच धारिता को C_{gk} तथा प्लेट और केथोड के बीच C_{pk} द्वारा प्रदर्शित करते हैं। C_{gp} का मान 2 से 5 पिको फेरेड की कोटि का होता है। ऊँची आवृति (High frequency) पर, अन्तर्विद्युतोद धारिता ट्रायोड नलिका के कार्य को प्रभावित करती है। मुख्यरूप से C_{gp} धारिता अधिक प्रभावी है। इसके कारण प्लेटपरिपथ की ऊर्जा का कुछ भाग वापस ग्रिड परिपथ में स्थानान्तरित कर दिया जाता है जिसे



चित्र 12·9

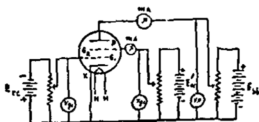
पुनः निविष्टता (Feed back) कहते हैं। इस सम्बन्ध में विशेष विवरण अगले अध्याय में दिया गया है।

12·6. टेट्रोड (Tetrode)

प्लेट और नियन्त्रक ग्रिड के बीच अन्तर्विद्युतोद धारिता C_{gp} को एक और इलैक्ट्रोड का उपयोग कर बहुत कम किया जा सकता है। यह चौथा इलैक्ट्रोड 'आवरक ग्रिड' (Screen grid) कहलाता है। आवरक ग्रिड, नियन्त्रक ग्रिड की अपेक्षा अधिक मोटी जाली का बना होता है और प्लेट तथा नियन्त्रक ग्रिड के बीच लगाया जाता है। आवरक ग्रिड, प्लेट और नियन्त्रक ग्रिड के बीच स्थिर वैद्युत परिरक्षक (Electrostatic Shield) की भाँति कार्य करता है जिससे C_{gp} का मान कम हो जाता है। यह इलेक्ट्रॉन-नलिका (Electron tube) 'टेट्रोड' कहलाती है।

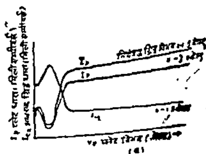
(a) टेट्रोड का परिपथ चित्र तथा अभिलक्षणिक वक्र (Circuit diagram & Characteristic curves of Tetrode)

टेट्रोड का परिपथ चित्र (12·10) में दिया गया है। यह परिपथ ट्रायोड परिपथ जैसा ही है। आवरक ग्रिड को कैथोड के सापेक्ष धन विभव पर रखने तथा



चित्र 12·10

उसका मान परिवर्तित करने के लिए बैटरी E'_{ce} तथा विभव विभाजक का प्रयोग किया गया है। आवरक ग्रिड पर आरोपित विभव आवरक ग्रिड विभव तथा आवरक

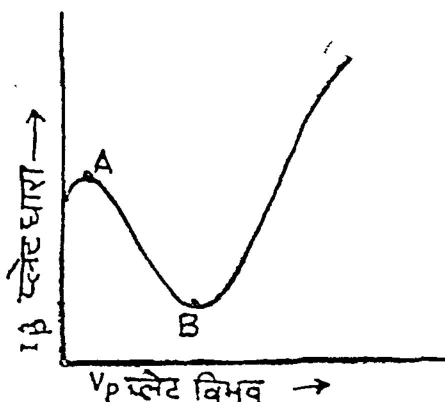


ग्रिड परिपथ में प्रवाहित धारा आवरक ग्रिड धारा 'I_{C_2}' (Sereen grid current) कहलाती है।

टेट्रोड के लिए (1) ($I_p - V_p$) अभिलक्षणिक वक्र तथा (2) ($I_{C_2} - V_p$) अभिलक्षणिक वक्र मुख्य हैं। नियन्त्रक ग्रिड विभव (ऋणात्मक) तथा आवरक ग्रिड विभव (धनात्मक) को स्थिर रखकर प्लेट विभव के साथ प्लेट धारा में परिवर्तन ज्ञात कर लिया जाता है। इसी समय आवरक ग्रिड परिपथ में प्रवाहित आवरक ग्रिड धारा I_{c_2} का परिवर्तन भी ज्ञात कर लेते हैं ($I_p - V_p$) तथा ($I_{c_2} - V_p$) के बीच प्राप्त ग्राफ टेट्रोड के अभिलक्षणिक वक्र हैं। चित्र [12·11 (a)] में टेट्रोड के अभिलक्षणिक वक्र प्रदर्शित किये गये हैं।

(b) ऋणात्मक प्रतिरोध तथा उसका स्पष्टीकरण (Negative resistance & its explanation)

टेट्रोड के ($I_p - V_p$) अभिलक्षणिक वक्र से स्पष्ट है कि जब प्लेट विभव का मान आवरक विभव से कम होता है तो वक्र में खम (kink) आ जाता है।



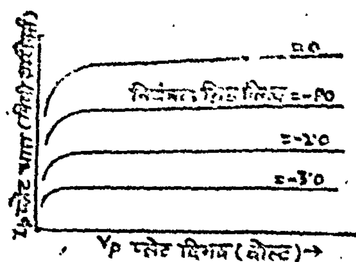
चित्र 12·11 (b)

अर्थात् जब प्लेट विभव को बढ़ाया जाता है तो प्लेटधारा बढ़ने के बजाय घटने लगती है। इस स्थिति में क्योंकि विभव बढ़ाने पर धारा का मान कम होता है। अतः प्रतिरोध ऋणात्मक होता है और टेट्रोड के ऋणात्मक प्रतिरोध (Negative Resistance) के नाम से सम्बोधित किया जाता है। चित्र [12·11 (b)] में A से B तक ऋणात्मक प्रतिरोध का क्षेत्र है। प्लेट विभव को आवरक ग्रिड विभव अधिक कर देने पर प्लेटधारा पुनः बढ़ने लगती है।

टेट्रोड के लिए प्लेट विभव के साथ प्लेटधारा के परिवर्तन को इलेक्ट्रॉन के द्वितीयक उत्सर्जन (Secondary emsission of electrons) के आधार पर स्पष्ट किया जा सकता है।

(b) पेन्टोड के अभिलक्षणिक वक्र (characteristic curves of a Pentode)

पेन्टोड के लिए प्लेटधारा-प्लेटविभव अभिलक्षणिक वक्र चित्र (12·13) में प्रदर्शित की गई है। टेट्रोड के लिए प्लेटधारा-प्लेटविभव अभिलक्षणिक वक्र में प्राप्त खम (kink) को पेन्टोड में निरोधी ग्रिड द्वारा दूर कर दिया जाता है।



चित्र 12·13

पेन्टोड के लिए नियतांकों का मान ट्रायोड व टेट्रोड की भाँति ही अभिलक्षणिक वक्र की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है। पेन्टोड के लिए μ तथा r_p का मान टेट्रोड की अपेक्षा अधिक होता है जबकि g_m का मान टेट्रोड के लगभग ही होता है।

पेन्टोड नलिका का उपयोग वोल्टता प्रवर्धक और शक्ति प्रवर्धक (power amplifier) के रूप में होता है।

उदाहरण 12·1. एक ट्रायोड वाल्व का प्लेटप्रतिरोध 20000 ओह्म तथा अन्योन्य चालकता $1{\cdot}5 \times 10^{-3}$ म्हो है। प्रवर्धक गुणक निकालिये।

सूत्र $\mu = r_p \times g_m$

दिया हुआ $r_p = 20000$ ओह्म

और $g_m = 1{\cdot}5 \times 10^{-3}$ म्हो

$\therefore \quad \mu = 20000 \times 1{\cdot}5 \times 10^{-3}$

अतः $\mu = 30$

उदाहरण 12·2. एक ट्रायोड के ग्रिडविभव को स्थिर रखकर जब प्लेट विभव को 20 वोल्ट से बढ़ाया जाता है तो प्लेट धारा में 10 मि० एम्पियर का परिवर्तन हो जाता है। प्लेट धारा में इतना ही परिवर्तन ग्रिड विभव को 1·0 वोल्ट से परिवर्तित करने पर प्राप्त होता है (जबकि प्लेट विभव स्थिर है)। ट्रायोड के नियतांकों की गणना कीजिये।

प्लेट प्रतिरोध $r_p = \dfrac{\Delta V_p}{\Delta I_p}$ जबकि V_g स्थिर है

दिया हुआ $\Delta V_p = 20$ वोल्ट

$\Delta I_p = 10$ मि० एम्पियर (स्थिर ग्रिड विभव पर)

$= 10 \times 10^{-3}$ एम्पियर

$$\therefore \quad r_p = \frac{20}{10 \times 10^{-3}}$$

अतः $r_p = 2 \times 10^3$ ओह्म

इसी प्रकार $\mu = \frac{\Delta V_p}{\Delta V_g}$ जबकि ΔI_p स्थिर है।

क्योंकि $\Delta V_g = 1{\cdot}0$ वोल्ट

$\therefore \quad \mu = \frac{20}{1} = 20$

अन्योन्य चालकता $g_m = \frac{\quad}{r_p}$

$\therefore \quad g_m = \frac{20}{2 \times 10^3}$

या $\quad g_m = 10 \times 10^{-3}$

$\therefore \quad g_m = {\cdot}01$ म्हो

प्रश्न

1. मुक्त इलेक्ट्रॉन, इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन तथा कार्य-फलन से आप क्या समझते हैं ? तापायनिक उत्सर्जन से क्या अभिप्राय है ? प्रत्यक्ष तप्त की अपेक्षा अप्रत्यक्ष तप्त कैथोड अधिक प्रचलित क्यों हैं ?
2. डायोड नलिका की रचना का वर्णन करते हुए उसके कार्य को समझाइये।
3. नियन्त्रक ग्रिड के कार्य को समझाइये। ट्रायोड के लिए परिपथ चित्र बनाइये और बताइये कि किस प्रकार इसके द्वारा ट्रायोड के अभिलक्षणिक वक्र प्राप्त किये जा सकते हैं।
4. ट्रायोड के नियतांक से क्या अभिप्राय है ? स्पष्ट रूप से समझाइये।
   निम्न सम्बन्ध की स्थापना कीजिये।
   $\mu = r_p \times g_m$.
5. टेट्रोड की रचना बताते हुये आवरक ग्रिड के कार्य को समझाइये। ऋणात्मक प्रतिरोध क्या है ? टेट्रोड के ऋणात्मक प्रतिरोध के लिए स्पष्टीकरण दीजिये।
6. पेन्टोड में निरोधी ग्रिड का मुख्य कार्य क्या है ? पेन्टोड के लिए परिपथ चित्र बनाइये। पेन्टोड के अभिलक्षणिक वक्र से आप क्या समझते हैं ?
7. निम्नलिखित के बारे में संक्षेप में लिखिये :—
   (i) प्रत्यक्ष तप्त तथा अप्रत्यक्ष तप्त कैथोड
   (ii) चाइल्ड का नियम
   (iii) ट्रायोड के अभिलक्षणिक वक्र
   (iv) ट्रायोड के नियतांक

(v) अन्तराकाशी आवेश
(vi) अन्तर्विद्युतोद धारिता
(vii) पेन्टोड

8. एक ट्रायोड नलिका के लिए निम्न आँकड़े दिये गये हैं :—
प्लेटधारा = $15mA$ जब $V_p = 50$ वोल्ट, $V_g = -1.5$ वोल्ट
प्लेटधारा = $20mA$ जब $V_p = 60$ वोल्ट, $V_g = -1.5$ वोल्ट
प्लेटधारा = $15mA$ जब $V_p = 60$ वोल्ट, $V_g = -2.0$ वोल्ट
[उत्तर : $\mu = 20$ $r_p = 2000$ ओह्म $g_m = 0.01$ म्हो]

9. एक ट्रायोड वाल्व का प्लेट प्रतिरोध 10000 ओह्म तथा प्रवर्धक गुणक 20 है। अन्योन्य चालकता की गणना कीजिये। [उत्तर : 2×10^{-3} म्हो]

10. निम्न तालिका में 0 तथा —3 वोल्ट ग्रिड विभव पर एक ट्रायोड के लिए प्लेटधारा और प्लेटविभव के विभिन्न मान दिये हुए हैं। μ, r_p और g_m की गणना करिये जबकि प्लेट विभव 80 वोल्ट हो।

प्लेट विभव (वोल्ट)	60	80	100	120
प्लेट धारा (मि० एम्पियर) जब ग्रिड विभव = 0 वोल्ट	6	8·5	11	13·3
प्लेट धारा (मि० एम्पियर) जब ग्रिड विभव = −3 वोल्ट	1·5	4·0	6·4	8·7

11. एक टेट्रोड के लिए प्लेट प्रतिरोध और अन्योन्य चालकता का मान क्रमशः 50000 ओह्म और 1×10^{-3} म्हो है। प्रवर्धन गुणक का मान निकालिये।
[उत्तर : 50]

13

इलेक्ट्रॉनिकी (Electronics) II
निर्वात नलिकाओं के उपयोग
(Uses of Vaccum Tubes)

इलेक्ट्रॉनिकी में निर्वात नलिकाओं (Vacuum-tubes) का उपयोग कई रूप मे होता है। डायोड का प्रयोग प्राय: दिष्टकारी और संसूचक के रूप में किया जाता है। ट्रायोड का प्रयोग, प्रवर्धक के रूप मे, दोलित्र के रूप मे, माडुलित्र के रूप में, संसूचक के रूप मे, आवृत्ति परिवर्तक के रूप में और नियन्त्रक (Regulator) इत्यादि के रूप में किया जाता है। इस अध्याय मे डायोड एवं ट्रायोड के विभिन्न उपयोगों तथा रेडियो तथा संचार व्यवस्था का वर्णन किया गया है।

13·1. डायोड दिष्टकारी के रूप में (Diode as a Rectifier)

दिष्टकारी का कार्य प्रत्यावर्ती धारा (*Alternating current*) को एक दिशीय (Unidirectional) धारा या दिष्टधारा (*Direct current*) में परिवर्तित करना है। डायोड का प्रयोग एक दिष्टकारी के रूप मे किया जा सकता है क्योंकि डायोड के प्लेट परिपथ में धारा केवल उसी समय प्रवाहित होती है जबकि प्लेट कैथोड की अपेक्षा धन विभव पर हो अन्यथा नहीं। अत: जब डायोड के प्लेट और कैथोड के बीच प्रत्यावर्ती धारा या विभव (Alternating current or Potential)

आरोपित किया जाता है तो प्लेटधारा (Plate current) केवल उस आधे चक्र के समय ही प्रवाहित होती है जबकि प्लेट, केथोड की अपेक्षा धन विभव पर है। अगले आधे चक्र के समय प्लेट, केथोड की अपेक्षा ऋणात्मक हो जाती है जिससे प्लेटधारा प्रवाहित नहीं होती। इस प्रकार डायोड प्रत्यावर्ती धारा को दिष्टधारा या एक दिशीय धारा में परिवर्तित कर देता है और दिष्टकारी की भाँति कार्य करता है। यह क्रिया दिष्टकरण या परिशोधन (Rectification) कहलाती है।

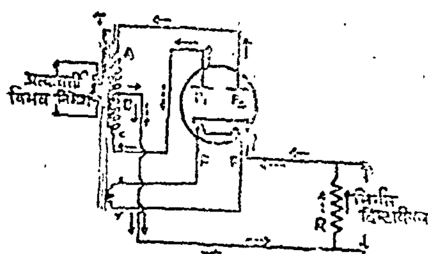
अर्धतरंग दिष्टकारी (Half wave Rectifier)

अर्धतरंग दिष्टकारी में प्लेटपरिपथ में धारा, आरोपित प्रत्यावर्ती धारा या विभव के केवल अर्धचक्र के समय ही प्रवाहित होती है। अर्धतरंग दिष्टकारी में केवल एक डायोड का उपयोग होता है।

पूर्णतरंग दिष्टकारी (Full wave Rectifier)

पूर्ण तरंग दिष्टकारी में प्लेट परिपथ में धारा, आरोपित प्रत्यावर्ती धारा या विभव के सम्पूर्ण चक्र के दौरान लगातार एक ही दिशा में प्रवाहित होती है। इस प्रकार के दिष्टकारी में या तो एक ही प्रकार के दो डायोड या एक द्वि डायोड (Double diode) का उपयोग होता है। पूर्ण तरंग दिष्टकारी की क्रिया को निम्न प्रकार समझाया जा सकता है।

पूर्णतरंग दिष्टकारी का परिपथ (Circuit of a full wave Rectifier)



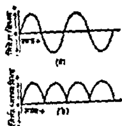
चित्र 13·1

एक पूर्ण तरंग दिष्टकारी का परिपथ (Circuit) चित्र (13·1) में प्रदर्शित किया गया है। द्वि डायोड (Double diode) में एक ही नलिका में दो प्लेट होती हैं। P_1 तथा P_2 प्लेट ट्रांसफार्मर T की द्वितीयक कुण्डली के A और B सिरों से जोड़ी गई हैं। डायोड के तन्तु (Filament) में निश्चित विभव के धारा प्रवाहित करने के लिए उसका सम्बन्ध ट्रांसफार्मर की दूसरी द्वितीयक कुण्डली के सिरों X और Y से कर दिया जाता है। ट्रांसफार्मर की द्वितीयक कुण्डली A B के मध्य बिन्दु C को प्रतिरोध R से होते हुए केथोड से जोड़ दिया गया है। बिन्दु C को शून्य विभव बिन्दु (Zero potential point) माना जा सकता है। प्रत्यावर्ती धारा या विभव, जिसे दिष्टधारा या विभव में परिवर्तित करना है, ट्रांसफोर्मर की प्राथमिक

कुण्डली पर आरोपित किया जाता है। दिष्ट-विभव नियमानुसार प्रतिरोध R के बीच प्राप्त होता है।

कार्य (Working)—माना कि प्रत्यावर्ती धारा के पहले आधे चक्र के समय C सिरा B के सापेक्ष धन विभव पर है। इसलिए A सिरा, B के सापेक्ष उस समय उतने ही ऋण विभव पर होगा। इस कारण P_1 प्लेट कैथोड के सापेक्ष धन विभव पर होगी जबकि P_2 प्लेट ऋण विभव पर। इस स्थिति में इलेक्ट्रॉन कैथोड से P_1 प्लेट की ओर आकर्षित होंगे। P_1 प्लेट द्वारा आकर्षित इलेक्ट्रॉन आधी द्वितीयक कुण्डली (C से B तक), और फिर प्रतिरोध R से होते हुए वापस कैथोड पर पहुंच जाते है तथा परिपथ पूर्ण हो जाता है। इस समय P_2 प्लेट निष्क्रिय रहती है। प्रत्यावर्ती धारा के दूसरे आधे चक्र के समय A सिरा धन विभव तथा C सिरा ऋण विभव पर होता है। इस कारण P_2 प्लेट कैथोड के सापेक्ष धन विभव पर होगी जबकि P_1 प्लेट ऋण विभव पर। इस स्थिति में इलेक्ट्रॉन कैथोड से P_2 प्लेट की ओर आकर्षित होंगे। P_2 प्लेट द्वारा आकर्षित इलेक्ट्रॉन आधी द्वितीयक कुण्डली (A से B तक) और फिर प्रतिरोध R से होते हुए वापस कैथोड पर पहुंच जाते है तथा परिपथ पूर्ण हो जाता है। इस आधे चक्र के समय P_1 प्लेट निष्क्रिय रहती है।

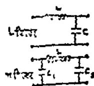
अतः प्लेट परिपथ में धारा लगातार एक ही दिशा में प्रवाहित होती रहती है। चित्र में दोनों आधे चक्रों के समय इलेक्ट्रॉन का प्रवाह बिन्दुकित और पूर्ण वाणाग्र (Dotted & Continuous Arrowhead) द्वारा प्रदर्शित किया गया है [धारा की दिशा इलेक्ट्रॉन प्रवाह की दिशा के विपरीत लेते हैं] इस प्रकार प्रत्यावर्ती धारा या विभव, दिष्टधारा या विभव में परिवर्तित हो जाता है।



चित्र 13·2

आरोपित प्रत्यावर्ती विभव (या धारा) तथा प्राप्त दिष्ट विभव (या धारा) का समय के साथ परिवर्तन चित्र (13·2) में दिखाया गया है। यद्यपि दिष्टकारी द्वारा प्राप्त विभव (या धारा) एक दिशीय (Uni directional) या दिष्ट (Direct) होता है परन्तु उसमें उच्चावचन (Fluctuations) होते हैं जिससे वह अपरिवर्ती (Steady) नहीं होती। दिष्ट विभव में प्राप्त ये उच्चावचन ऊर्मिका (Ripple) भी कहे जाते हैं।

उच्चावचन युक्त दिष्ट विभव रेडियो तथा अन्य इलेक्ट्रॉनिकी उपकरणों में उपयोगित नहीं किये जा सकते हैं। अतः 'फिल्टर-परिपथ' (Filter Circuit) का प्रयोग कर उच्चावचन को दूर किया जाता है। चित्र (13·3) में L तथा π फिल्टर-परिपथ प्रदर्शित किये गये हैं। दिष्टकारी परिपथ में फिल्टर-परिपथ को प्रतिरोध R के पहले



चित्र 13·3

लगाया जाता है जिससे प्रतिरोध R के बीच एकदिशीय तथा अपरिवर्ती विभव प्राप्त होता है।

13·2. ट्रायोड प्रवर्धक के रूप में (Triode as an Amplifier)

ट्रायोड वाल्व के अन्योन्य अभिलक्षणिक वक्र (Mutual Characteristic Curve) के अध्ययन से स्पष्ट हो जाता है कि इसका उपयोग प्रवर्धक, दोलित्र, संसूचक आदि के रूप रूप में किया जा सकता है। ट्रायोड के प्रवर्धक के रूप में उपयोग हेतु ऐसा ट्रायोड वाल्व प्रयोग में लेते हैं जिसके लिए अन्योय वक्र में सीधा और अधिक ढलाव वाला भाग उपलब्ध होता है। ट्रायोड को केवल इस ही सीधे और अधिक ढलाव (Steep) वाले क्षेत्र में कार्य करने दिया जाता है जिससे वह प्रवर्धक की भांति कार्य करता है।

प्रवर्धक (Amplifier) वास्तव में निर्वात नलिका (ट्रायोड और पेन्टोड) और अन्य आवश्यक घटक (Essential Components) जैसे प्रतिरोध, संधारित्र (Capacitors) तथा प्रेरकत्व (Inductances) आदि का एक परिपथ है जो कि विभव, धारा या शक्ति संकेत (Voltage, Current or Power Signal) को प्रर्धित कर देता है। प्रवर्धक तीन प्रकार के माने जा सकते हैं—(1) वोल्टता (Voltage amplifier) (2) धारा प्रवर्धक (Current amplifier) और शक्ति प्रवर्धक (Power amplifier)।

प्रवर्धक जो वोल्टता (Voltage) को प्रर्धित करते हैं वोल्टता प्रवर्धक कहलाते हैं। इसी प्रकार धारा को प्रर्धित करने वाले धारा प्रवर्धक और शक्ति को प्रर्धित करने वाले शक्ति प्रवर्धक कहे जाते हैं। यहाँ हम केवल वोल्टता प्रवर्धक का ही वर्णन करेंगे।

वोल्टता-प्रवर्धन (Voltage Amplification)—वोल्टता-प्रवर्धक से प्राप्त निर्गत वोल्टता (Output Voltage) और उस पर आरोपित निवेश वोल्टता (Input Voltage) के अनुपात को वोल्टता प्रवर्धन कहते हैं अर्थात्

वोल्टता प्रवर्धन (Voltage Amplification)

$$A = \frac{\text{निर्गत वोल्टता (Output Voltage)}}{\text{निवेश वोल्टता (Input Voltage)}} \quad \text{....(13·1)}$$

या

$$A = \frac{e_0}{e_g} \quad \text{....(13·2)}$$

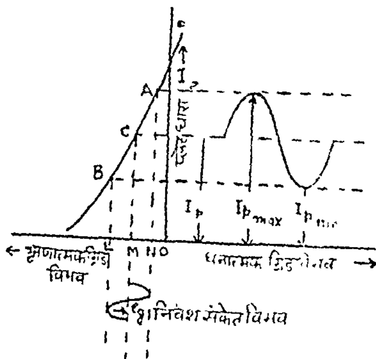
यहाँ e_0 = निर्गत वोल्टता तथा

e_g = निवेश वोल्टता है। वोल्टता प्रवर्धन को प्रायः A से प्रदर्शित किया जाता है। उदाहरण के तौर पर यदि किसी वोल्टता प्रवर्धक के लिए A का मान 15 है तो इसका अर्थ यह है कि वह निवेश वोल्टता को 15 गुना प्रर्धित कर देगा।

प्रवर्धक का सिद्धान्त (Principle of an Amplifier)

चित्र (13·4) में प्रदर्शित वक्र, ट्रायोड की अन्योन्य अभिलाक्षणिक वक्र है। वास्तव में यह अभिलाक्षणिक वक्र स्थैतिक (Static) न होकर गतिक (Dynamic) है और उस समय प्राप्त की गई है जबकि ट्रायोड वास्तविक रूप में कार्यकारी है।

वक्र के सीधे एवं सबसे ढलाव (Steepast) वाले भाग AB के बीच बिन्दु 'C' को क्रियाकारी बिन्दु (Operating point) माना गया है। नियन्त्रक ग्रिड



चित्र 13·4

(Control grid) पर OM के बराबर निश्चित ऋणात्मक विभव (Fixed negative potential) आरोपित करने पर कार्यकारी बिन्दु 'c' प्राप्त हो जाता है। इस स्थिति में प्लेटधारा का मान I_1 के बराबर होगा।

क्योंकि ग्रिड विभव में थोड़ा सा परिवर्तन करने पर प्लेटधारा में परिवर्तन हो जाता है अतः वोल्टता संकेत (Voltage Signal), जिसे

करना है, ग्रिड पर आरोपित कर दिया जाता है। ग्रिड पर वोल्टता संकेत आरोपित कर देने के कारण ग्रिड विभव ON और OL के बीच परिवर्तित होने लगता है।

माना कि वोल्टता संकेत का मान e_g है तथा ग्रिड पर आरोपित निश्चित ऋणात्मक विभव E_c है अतः जब ग्रिड विभव ON होगा तब उस पर आरोपित कुल विभव

$$= -E_c + e_g$$
$$= -[E_c - e_g]$$

इस प्रकार की स्थिति में क्रियाकारी विन्दु C से बदलकर A पर आ जावेगा और प्लेटधारा का मान बढ़कर $I_{p\ max}$ हो जावेगा। यह परिस्थिति $t = \frac{T}{4}$ समय के पश्चात् प्राप्त होगी (यहाँ T संकेत का आवर्त काल है)। $t = \frac{3T}{4}$ समय के पश्चात् ग्रिड विभव OL के बराबर हो जावेगा। तब उस पर आरोपित कुल विभव

$$= -E_c - e_g$$
$$= -[E_c + e_g]$$

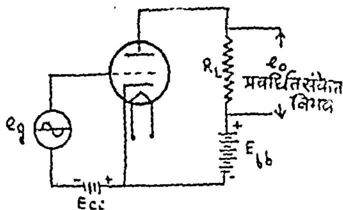
इस प्रकार की स्थिति में क्रियाकारी विन्दु C से बदलकर B पर आ जावेगा और प्लेटधारा का मान कम होकर $I_{p\ min}$ हो जावेगा। अतः वोल्टता संकेत से ग्रिड विभव में होने वाले मामूली परिवर्तन के कारण प्लेटधारा में काफी परिवर्तन हो जाता है और प्लेट धारा में परिवर्तन वोल्टता संकेत पर निर्भर करता है। जब यह प्लेट धारा प्लेट परिपथ में लगे उच्च प्रतिरोध, जिसे प्रतिरोधी लोड (Resistive Load) कहते हैं, में से प्रवाहित होती है तो उसके बीच विभवान्तर उत्पन्न हो जाता है। यह विभवान्तर निर्गत वोल्टता (Output Voltage) कहलाता है और इसका मान निवेश वोल्टता (Input Voltage) की अपेक्षा बहुत ज्यादा होता है एवं प्रवर्धक की वोल्टता-प्रवर्धन पर निर्भर करता है। सूत्र (13·2) की सहायता से वोल्टता प्रवर्धन का मान निकाल लिया जाता है।

ट्रायोड प्रवर्धक का परिपथ (Circuit diagram af a triode amplifier)

ट्रायोड वाल्व का प्रवर्धक की भाँति प्रयोग करने के लिए (चित्र 13·5) के अनुसार परिपथ बनाया जाता है।

ट्रायोड वाल्व के नियन्त्रक ग्रिड को बैटरी E_{cc} के द्वारा इतना निश्चित ऋणात्मक विभव पर रखा जाता है ताकि क्रियाकारी विन्दु 'C' प्राप्त हो जावे।

बैटरी E_{bb} द्वारा प्लेट को उच्च धनात्मक विभव (High positive potential) पर रखते हैं। प्लेट परिपथ में एक उच्च प्रतिरोध R_L, प्रतिरोध लोड, लगा दिया जाता है। इस प्रतिरोधी लोड (Resistive Load) के बीच प्रवर्धित निर्गत वोल्टता



लेकिन $e_o = i_p \times R_L$ ....(13·3)

यहाँ i_p = प्लेट परिपथ में प्रत्यावर्ती धारा का मान

R_L = प्रतिरोधी लोड

$$\therefore \quad i_p = \frac{\text{कुल विभवान्तर}}{\text{कुल प्रतिरोध}}$$

$$i_p = \frac{-\mu e_g}{r_p + R_L} \qquad \text{....(13·4)}$$

$$\therefore \quad e_o = \frac{-\mu e_g}{r_p + R_L} \times R_L \qquad \text{....(13·5)}$$

अत: वोल्टता प्रवर्धन $A = \frac{e_o}{e_g}$

या $$= \frac{-\mu e_g . R_L}{(r_p + R_L) e_g}$$

$$\therefore \quad = \frac{-\mu R_L}{r_p + R_L}$$

या $$A = \frac{-\mu}{1 + \frac{r_p}{R_L}} \qquad \text{....(13·6)}$$

यदि $R_L >> r_p$ तो $1 >> \frac{r_p}{R_L}$ और इसलिए A का अधिकतम मान

$$\boxed{A_{max} = -\mu} \qquad \text{....(13·7)}$$

समीकरण (13·6) को निम्न प्रकार भी लिखा जा सकता है :

$$\boxed{A = \frac{-gm}{\frac{1}{r_p} + \frac{1}{R_L}}} \qquad \text{....(13·8)}$$

समीकरण (13·7) से स्पष्ट है कि ट्रायोड के द्वारा अधिकतम प्रवर्धन उसके प्रवर्धन गुणक के बराबर हो सकता है। जब बहुत अधिक प्रवर्धन की आवश्यकता होती है तब एक प्रवर्धक एकक (Amplifier Unit) को विशेष प्रकार से दूसरी

प्रवर्धक एकक से जोड़ दिया जाता है। इस प्रकार युग्मित परिपथ से प्राप्त प्रवर्धन

$$A = A_1 \times A_2 \qquad ....(13 \cdot 9)$$

द्वारा दिया जाता है। यहाँ A_1 पहले प्रवर्धक का वोल्टता प्रवर्धन और A_2 दूसरे प्रवर्धक का वोल्टता प्रवर्धन है। ट्रायोड की भाँति पेन्टोड भी प्रवर्धक के भाँति काम में लाया जा सकता है।

विशेष—ट्रायोड को वोल्टता प्रवर्धक के रूप में प्रयोग करते समय यह ध्यान रखना आवश्यक है कि ग्रिड विभव मे होने वाला परिवर्तन वक्र के केवल सीधे और अधिक ढलाव वाले भाग में ही सीमित रहे। ऐसा न होने पर विकृति (Distortion) नामक दोष आ जाता है। क्रियाकारी बिन्दु इस प्रकार चुनना चाहिए ताकि वोल्टता संकेत आरोपित करने पर भी ग्रिड पर विभव ऋणात्मक ही रहे। इससे ग्रिड परिपथ मे कभी भी धारा प्रवाहित नहीं होगी और प्रवर्धक सुचारु रूप से कार्य करेगा।

13·3 पुनः निविष्टता और पुनः निविष्ट प्रवर्धक (Feed back & Feed back-Amplifier)

(a) पुनः निविष्टता (Feed back)—सामान्यतः किसी परिपथ के निर्गत (Out put) मे से ऊर्जा का कुछ भाग वापस निवेश (Input) मे स्थानान्तरित कर देने की प्रक्रिया पुनः निविष्टता (Feed back) कहलाती है। इस प्रकार निवेश को निर्गत पर निर्भर करा कर किसी भी प्रक्रिया का अतिसूक्ष्म नियंत्रण सम्भव हो सकता है।

ट्रायोड वाल्व मे अन्तर्विद्युतोद-धारिता (Interelectrode capacitance) के कारण निर्गत में से ऊर्जा का कुछ भाग पुन. निवेश मे आ जाता है। इसलिए ट्रायोड मे ऊर्जा की पुनः निविष्टता हो जाती है।

पुनः निविष्टता के मुख्य दो प्रकार हैं।

(i) पुनर्योजी (Regenerative) या धनात्मक (positive) पुन निविष्टता और

(ii) विपोषक पुनः निविष्टता (Degenerative) या ऋणात्मक (Negative)

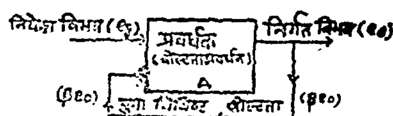
जब पुनः निविष्ट वोल्टता या धारा (Voltage or current) आरोपित निवेश संकेत की कला में ही हो जिससे संकेत का प्रभाव और बढ़ जावे, तो पुन निविष्टता पुनर्योजी या धनात्मक कहलाती है। धनात्मक पुन निविष्टता के कारण प्रवर्धक के वोल्टता-प्रवर्धन के साथ-साथ 'विकृति' नामक दोष मे भी वृद्धि होती है।

जब पुनः निविष्ट वोल्टता या धारा आरोपित निवेश संकेत के विपरीत कला (Opposite phase) मे हो जिससे संकेत का प्रभाव कम हो जावे, तो पुन निविष्टता के कारण प्रवर्धक के वोल्टता-प्रवर्धन में कमी हो जाती है। इसके साथ-साथ विकृति में भी कमी हो जाती है। इस कारण पुन. निविष्ट प्रवर्धक केवल ऋणात्मक

पुनः निविष्टता के सिद्धान्त पर कार्य करते हैं। अधिक प्रवर्धन (Amplification) प्राप्त करने के लिए युग्मित प्रवर्धक का प्रयोग किया जाता है।

पुनः निविष्ट प्रवर्धक का सिद्धान्त (Principle of a feed back amplifier)—चित्र (13·7) की सहायता से पुनः निविष्ट प्रवर्धक के सिद्धान्त को समझाया जा सकता है। माना कि

A = पुनः निविष्टता की अनुपस्थिति में प्रवर्धक का वोल्टता-प्रवर्धन (Voltage amplification).



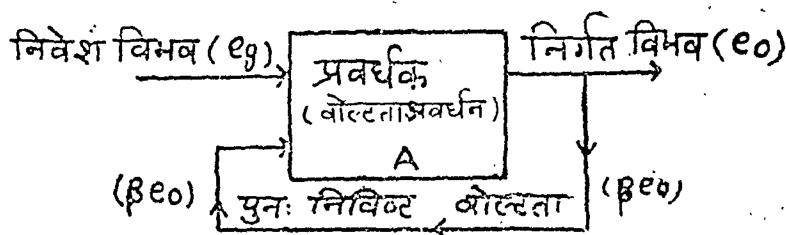
चित्र 13·7

A_f = पुनः निविष्टता की उपस्थिति में प्रवर्धक का वोल्टता-प्रवर्धन

β = पुनः निविष्टता अनुपात (Feed back ratio)

eg = निवेश वोल्टता संकेत (Input voltage signal) और

e_o = निर्गत वोल्टता (Output voltage)



चित्र 13·8

क्योंकि β पुनः निविष्टता अनुपात और e_o निर्गत वोल्टता है। अतः पुन निविष्ट वोल्टता (Feed back voltage) $= \beta e_o$

यदि पुनः निविष्ट वोल्टता, संकेत की कला में ही हो अर्थात् पुनः निविष्टता धनात्मक हो तो उसके कारण निवेश वोल्टता संकेत का मान e_g से $(eg + \beta e_o)$ हो जावेगा। अब यह निवेश वोल्टता संकेत प्रवर्धक के द्वारा पुनः A गुना प्रवर्धित होगा जिससे निर्गत वोल्टता का मान

$$(e_g + \beta e_o) \times A = e_o \qquad \text{....(13·10)}$$

हो जावेगा। परन्तु वोल्टता-प्रवर्धन निर्गत वोल्टता और निवेश वोल्टता के अनुपात द्वारा दिया जाता है। अतः e_o और e_g का मान रखने पर

धनात्मक पुनः निविष्टता की उपस्थिति में वोल्टता-प्रवर्धन

$$A_f = \frac{e_o}{}$$

समीकरण (13 10) को हल करने पर $e_o = \frac{Ae_g}{1-A\beta}$

$$\therefore \qquad A_f = \frac{A}{1-A\beta} \qquad ....(13·11)$$

यदि पुनः निविष्टता ऋणात्मक है तो

$$A_f = \frac{A}{1+A\beta} \qquad ....(13·12)$$

समीकरण (13·11) से स्पष्ट है कि धनात्मक पुनः निवष्ट प्रवर्धक में वोल्टता प्रवर्धन का मान बढ़ जाता है ($A_f > A$)। यदि $A\beta = 1$ हो जावे तो $A_f = \infty$ होगा अर्थात बाह्य (External) निवेश संकेत की अनुपस्थिति में भी निर्गत वोल्टता उपस्थित होगी। सतत दोलनों (Sustained oscillations) के लिए यह एक आवश्यक शर्त (Necessary condition) है।

13·4 ट्रायोड दोलित्र के रूप में (Triode as an oscillator)

रेडियो संचार व्यवस्था में प्रयुक्त बहुत अधिक आवृत्ति वाली रेडियो तरंगों को ट्रायोड वाल्व की सहायता से प्राप्त किया जा सकता है। जब किसी चालक में इलेक्ट्रॉन्स तेजी से इधर उधर गति करते हैं तो उसमें से विद्युत चुम्बकीय तरंगों (Electro magnetic waves) का विकिरण होने लगता है। दोलित्र का कार्य दिष्ट-धारा (D. C.) को बहुत अधिक आवृत्ति वाली प्रत्यावर्ती धारा में बदलना है। सर्वप्रथम 1887 में हर्ट्ज (Hertz) नामक वैज्ञानिक ने एक समस्वरित परिपथ (Tuned circuit) में विद्युत स्फुलिंग (Electric spark) का उपयोग कर बहुत अधिक आवृत्ति की रेडियो तरंगें प्राप्त की। रेडियो तरंगे विद्युत चुम्बकीय तरंगे हैं और रेडियो संचार व्यवस्था में वाहक तरंगों (Carrier wavs) के रूप में कार्य करती है।

ट्रायोड युक्त एक विशेष प्रकार के परिपथ को, जिसके द्वारा बहुत अधिक आवृत्ति की प्रत्यावर्ती धारा प्राप्त की जा सके, निर्वात नलिका दोलित्र (Vacuum tube oscillator) कहते है। यहाँ यह बता देना उचित ही होगा कि ट्रायोड के द्वारा किसी भी प्रकार की ऊर्जा का उत्पादन नही होता। यह तो केवल एक प्रकार की धारा को दूसरे प्रकार की धारा में बदलने में सहायता करता है।

(a) ट्रायोड दोलित्र के आवश्यक भाग (Essential parts of Triode oscillator)

ट्रायोड की सहायता से विद्युत दोलन (Electrical oscillations) प्राप्त करने के लिए परिपथ के आवश्यक भाग निम्नलिखित हैं

(1) प्रेरकत्व L और धारिता C द्वारा निर्मित अनुनादी परिपथ (Oscilla-

tory circuit) जिसे टंकी-परिपथ (Tank circuit) कहते हैं। टंकी-परिपथ में दोलनों की आवृत्ति

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$ (कम्पन प्रति सेकण्ड) ....(13·13)

के द्वारा दी जाती है। यहाँ प्रेरकत्व का मान हैनरी और धारिता का मान फैरेड में लिया गया है। L तथा C का मान बदलने पर विभिन्न आवृत्ति के दोलन प्राप्त हो सकते हैं।

(2) टंकी-परिपथ में होने वाले ऊर्जा ह्रास को पूर्ण करने के लिए दिष्टधारा का स्रोत।

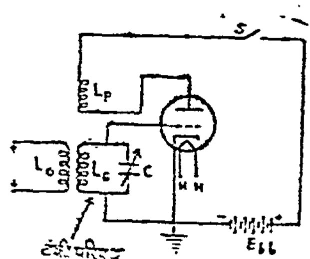
प्लेट परिपथ से निवेश परिपथ में उपयुक्त समय पर तथा उपयुक्त कला में ऊर्जा स्थानान्तरित करने के लिए धनात्मक पुनः निविष्ट परिपथ (Positive feed-back circuit)।

प्लेट परिपथ में से ऊर्जा का कुछ भाग किसी तरह उपयुक्त समय पर उचित कला में ग्रिड परिपथ में स्थानान्तरित कर दिये जाने पर टंकी-परिपथ में होने वाले ऊर्जा ह्रास की पूर्ति हो जावेगी और समान आयाम के सतत दोलन प्राप्त होंगे। दोलित्र कई प्रकार के होते हैं जैसे ऋणात्मक प्रतिरोध दोलित्र, पुनः निविष्ट दोलित्र, क्रिस्टल दोलित्र इत्यादि। यहाँ हम ट्रायोड के दोलित्र के रूप में कार्य करने के सिद्धान्त का ही वर्णन करेंगे।

(b) ट्रायोड दोलित्र का सिद्धान्त (Principle of triode oscillator)

चित्र (13·9) में ट्रायोड दोलित्र का एक सरल परिपथ प्रदर्शित किया गया है। स्विच (Switch) S को बन्द करते ही कैथोड से उत्सर्जित हो रहे इलेक्ट्रॉन प्लेट की ओर आकर्षित होने लगते हैं। इस कारण प्लेट परिपथ में इलेक्ट्रॉन प्रवाह आरम्भ हो जाता है और इलेक्ट्रॉन्स कैथोड से प्लेट, प्लेट कुण्डली L_p तथा बैटरी Ebb से से होते हुए वापस कैथोड पर पहुँच जाते हैं। अर्थात प्लेट परिपथ में धारा प्रवाहित होने लगती है।

कुण्डली L_p में से धारा प्रवाह के कारण उस पर चुम्बकीय क्षेत्र पैदा हो जाता है और धारा की तीव्रता में वृद्धि के साथ-साथ चुम्बकीय क्षेत्र में भी वृद्धि होती जाती है। क्योंकि टंकी-परिपथ की कुण्डली L_G कुण्डली L_p के बहुत नजदीक है अतः अन्योन्य प्रेरण के कारण L_G उसमें प्रेरित विभव (या वोल्टता) पैदा हो जाता है और उसका मान चुम्बकीय क्षेत्र के साथ बढ़ता जाता है। इस प्रकार बढ़ रहे चुम्बकीय क्षेत्र को प्रसारी चुम्बकीय क्षेत्र (Expanding Magnetic field) कहते हैं। कुण्डली L_G से सम्बन्धित ग्रिड पर

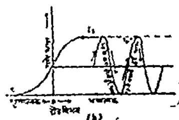


चित्र 13·9

इस कारण धन विभव आरोपित हो जाता है और प्लेट धारा बढ़ने लगती है। प्लेट धारा के बढ़ने से ग्रिड पर आरोपित धन विभव में और वृद्धि होती है। इससे प्लेट धारा और बढ़ जाती है और तब तक बढ़ती रहती है जब तक कि संतृप्ति अवस्था न आ जावे। इस समय टंकी-परिपथ में प्रयुक्त संधारित्र C आवेष्टित हो जाता है। संतृप्ति की अवस्था आने के पश्चात् प्लेटधारा में कोई वृद्धि न होने के कारण प्लेट कुण्डली L_p के चुम्बकीय क्षेत्र का प्रसार बन्द हो जाता है और कुण्डली L_G में प्रेरित विभव उत्पन्न होना बन्द हो जाता है। संधारित्र C जो अभी तक की क्रिया में आवेष्टित हो जाता है विसर्जित (Discharge) होने लगता है। इससे ग्रिड पर आरोपित धन विभव का मान कम होता जाता है और प्लेटधारा में कमी होती जाती है।

प्लेटधारा में निरन्तर कमी के कारण कुण्डली L_p के चुम्बकीय क्षेत्र का निपात (collapse) होने लगता है जिससे पुन: कुण्डली L_G में प्रेरित विभव उत्पन्न होने लगता है। इस स्थिति में उत्पन्न प्रेरित विभव प्रसारी चुम्बकीय क्षेत्र के कारण उत्पन्न प्रेरित विभव के विपरीत होता है। अत: ग्रिड पर अब ऋणात्मक विभव आरोपित होने लगता है और प्लेटधारा का मान कम होता जाता है। यह क्रिया उस समय तक चलती रहती है जब तक कि प्लेटधारा शून्य न हो जावे।





चित्र 13 10

प्लेटधारा के अधिकतम मान से शून्य तक पहुंचने के समय में संधारित्र C पूर्ण रूप से विसर्जित होकर अपनी पूर्वास्थिति के विपरीत पुन: आवेष्टित हो जाता है। ज्योंही प्लेटधारा का मान शून्य होता है संधारित्र फिर विसर्जित होने लगता है। इस कारण ग्रिड कम ऋणात्मक होने लगता है और प्लेटधारा का मान फिर बढ़ने लगता है। प्लेटधारा उस समय तक बढ़ती जाती है जब तक कि संतृप्ति अवस्था न आ जावे। इस प्रकार यह क्रिया लगातार बार-बार दोहराई जाती रहती है जब तक कि परिपथ में हो रहे ऊर्जा ह्रास की पूर्ति की जाती रहे। प्रेरकत्व युग्मित (Inductively coupled) कुण्डली L_o के बीच निर्गत ऊर्जा प्राप्त होती है।

13·5. माडुलन (Modulation)

(a) माडुलन की आवश्यकता (Necessity of Modulation)

क्या आपने कभी सोचा है कि केवल माइक्रोफोन द्वारा ध्वनि को विद्युत

तरंगों में बदल कर रेडियो प्रेषित्र के द्वारा बहुत दूर तक संचारित (Transmit) किया जा सकता है ? सिद्धान्ततः यह असम्भव नहीं है तो व्यावहारिक भी नहीं। मनुष्य के द्वारा सुनी जाने वाली ध्वनि की आवृति और तरंग दैर्घ्य की परास क्रमशः लगभग 20 से 20000 हर्ट्ज और 15000 कि०मी० से 15 कि०मी० है। रेडियो तरंगों को संचारित करने के लिए प्रेषित (Transmitter) के एरियल की लम्बाई लगभग तरग के बराबर होनी चाहिए। क्योंकि कई हजार किलोमीटर लम्बे एरियल बनाना सम्भव नहीं है अतः केवल माइक्रोफोन द्वारा प्राप्त विद्युत तरंगों को संचारित नहीं किया जा सकता। इसलिए रेडियो तरंगों का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण के तौर पर 1000 किलोहर्ट्ज की रेडियो तरंगों को संचारित करने के लिए प्रेषित्र एरियल की लम्बाई लगभग 300 मीटर है और इस माप के एरियल बनाये जा सकते हैं। इसलिए माइक्रोफोन द्वारा प्राप्त विद्युत तरंगों (संकेत तरंगों) को संचारित करने के लिए उन्हें रेडियो तरंगों पर आरोपित कर दिया जाता है। वास्तव में रेडियो तरंगें वाहक तरंगों (carrier waves) की भाँति कार्य करती हैं।

"रेडियो तरंगों पर संकेत तरंगों के अध्यारोपण को माडुलन कहा जाता जाता है।" दूसरे शब्दों में "वाहक रेडियो तरंगों के लक्षणों में संकेत तरंगों के अनुरूप परिवर्तन कर देने की विधि को माडुलन (Modulation) कहते हैं।" रेडियो तरंगें जिनकी आयाम, आवृति या कला में संकेत तरंगों के अनुसार परिवर्तन कर दिये जाते हैं, माडुलित तरंगें कहलाती हैं। अमाडुलित रेडियो तरंगें वाहक-तरंगें कहलाती हैं।

(b) माडुलन के प्रकार (Types of Modulation)

गणितीय रूप में वाहक तरंग निम्न प्रकार प्रदर्शित की जा सकती है :

$$e = E_m \sin(2\pi ft + \theta) \quad ....(13\cdot14)$$

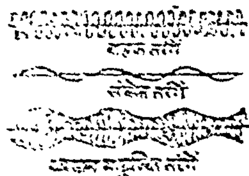
उक्त समीकरण से स्पष्ट है कि वाहक तरंग रूप में परिवर्तन (Variation) (i) 'E_m' आयाम (ii) 'f' आवृत्ति और (iii) 'θ' कला द्वारा किया जा सकता है इसी आधार पर माडुलन के तीन प्रकार माने गये हैं :

(i) आयाम माडुलन (Amplitude Modulation)
(ii) आवृति माडुलन (Frequency Modulation) और
(iii) कला माडुलन (Phase Modulation)

रेडियो संचार व्यवस्था में आयाम और आवृत्ति माडुलित तरंगों का ही प्रयोग होता है।

(i) आयाम माडुलन (Amplitude Modulation)

आयाम माडुलन में वाहक तरंगों के आयाम में परिवर्तन संकेत तरंगों के आयाम और आवृत्ति के अनुसार होता है। आयाम माडुलन का प्रभाव चित्र (13·11) के द्वारा समझा जा सकता है। चित्र में प्रथम तथा द्वितीय तरंगें क्रमशः स्थिर आयाम तथा उच्च आवृत्ति की वाहक रेडियो तरंगें और संकेत तरंगें हैं। तृतीय चित्र आयाम माडुलित तरंगों को प्रदर्शित करता है। यहाँ यह स्पष्ट है कि माडुलित वाहक तरंगों की रूपरेखा (out line) संकेत तरंग की भाँति ही है। यह रूपरेखा प्रायः माडुलन आवरण (modulation Envelope) कहलाता है।



चित्र 13·11

(ii) आवृत्ति माडुलन (Frequency Modulation)

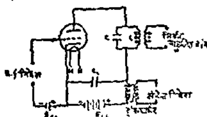
आवृत्ति माडुलन में वाहक तरंगों की आवृत्ति में परिवर्तन संकेत तरंग के आयामत या परिवर्तन की दर संकेत तरंगों की आवृत्ति के अनुसार होती है। आवृत्ति माडुलन में वाहक तरंगों के आयाम में कोई परिवर्तन नहीं होता। आवृत्ति माडुलित तरंग चित्र (13·12) में प्रदर्शित की गई है।

चित्र 13·12

आयाम माडुलित वाहक तरंगें प्राप्त करने के लिए विशेष प्रकार के इलेक्ट्रॉन नलिका परिपथ (Electron tube Circuits) की रचना की जाती है। इस आधार पर माडुलन क्रिया को (i) प्लेट माडुलन और (ii) नियन्त्रक ग्रिड माडुलन में विभक्त किया जा सकता है। यहाँ हम प्लेट माडुलन क्रिया को बहुत ही संक्षेप में समझाने की कोशिश करेंगे।

प्लेट माडुलन (Plate Modulation)

आयाम माडुलित तरंगें प्राप्त करने के लिए प्लेट माडुलित्र का परिपथ चित्र (13·13) में प्रदर्शित किया गया है। रेडियो आवृत्ति वाहक तरंगें समस्वरित रेडियो आवृत्ति प्रवर्धक (Tuned radio frequency amplifier) के ग्रिड पर आरोपित की जाती हैं। टंकी-परिपथ प्लेट परिपथ में चित्रानुसार जोड़ दिया जाता है और माडुलित वाहक तरंगें प्रेरकत्व युग्मित कुण्डली द्वारा प्राप्त हो जाती हैं। निवेश संकेत तरंगें प्लेट परिपथ के श्रेणीक्रम में चित्रानुसार ट्रांसफोर्मर द्वारा आरोपित की जाती हैं।



चित्र 13·13

निवेश संकेत की अनुपस्थिति में रेडियो आवृत्ति प्रवर्धक, वाहक तरंगों का प्रवर्धन करता है। निवेश संकेत को आरोपित करने पर प्रवर्धित वाहक तरंगों के आयाम में संकेत के अनुसार परिवर्तन होने लगते हैं तथा माडुलित तरंगें प्राप्त होने लगती हैं।

13·6. संसूचन (Detection)

माडुलन की क्रिया के विपरीत क्रिया को विमाडुलन (Demodulation) या संसूचन (Detection) कहते हैं। माडुलित तरंगों से श्रव्य आवृत्ति संकेत तरंगों को पृथक करना ही संसूचन है।

आयाम माडुलित तरंगों का विमाडुलन या संसूचन वास्तव में रेडियो आवृत्ति तरंगों का दिष्टकरण करना और फिर उसमें से श्रव्य आवृत्ति तरंगों (Audio frequency waves) को वाहक तरंगों (Carrier waves) से अलग कर प्राप्त करना है। आवृत्ति माडुलित तरंगों का संसूचन अधिक जटिल क्रिया है। अतः यहाँ हम केवल आयाम माडुलित तरंगों के संसूचन का ही वर्णन करेंगे।

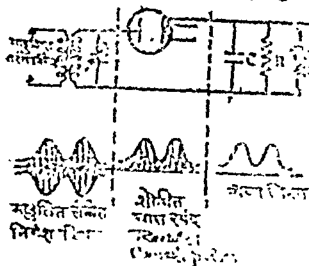
(a) आयाम माडुलित (A M.) संसूचक (Detector) का सिद्धान्त

आयाम माडुलित तरंग के संसूचन में सर्वप्रथम उसके ऋणात्मक (Negative half cycle) को हटाने के लिए उसका दिष्टकरण ...

किया जाता है। यह इसलिए आवश्यक है कि वाहक तरंगों के धनात्मक तथा ऋणात्मक अर्ध भाग एक दूसरे को नष्ट कर देना चाहते हैं। इसके पश्चात उपयुक्त फिल्टर परिपथ की सहायता से धनात्मक अर्धचक्र में से वाहक तरंगों को अलग कर दिया जाता है। इस प्रकार केवल श्रव्य आवृत्ति संकेत स्पंद प्राप्त हो जाते हैं। संसूचक के रूप में डायोड का प्रयोग निम्न प्रकार स्पष्ट किया जा सकता है :

(b) डायोड संसूचक (Diode Detector)

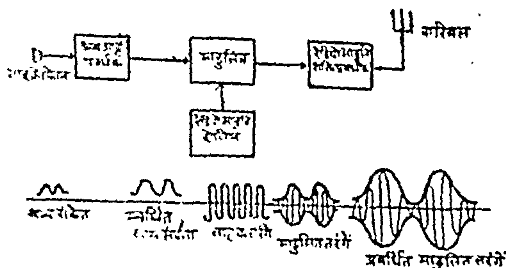
डायोड संसूचक का परिपथ तथा सम्बद्ध तरंग रूप चित्र (13·13) में दिया गया है। डायोड यहाँ मुख्य रूप से केवल अर्ध तरंग दिष्टकारी (Half wave rectifier) की भांति ही कार्य करता है। माडुलित तरंगें समस्वरित R—f ट्रांसफार्मर के द्वारा डायोड की प्लेट पर आरोपित कर दी जाती है। धनात्मक अर्ध चक्र (Positive half cycle) के समय जब कि डायोड की प्लेट कैथोड की अपेक्षा धनात्मक होती है, प्रतिरोधी लोड (Resistive Load) R से होते हुए प्लेट परिपथ में धारा स्पंद (Current pulses) प्रवाहित होते हैं। ऋणात्मक अर्ध चक्र के समय प्लेट परिपथ में कोई धारा प्रवाहित नहीं होती। इस प्रकार प्राप्त एकदिशीय (unidirectional) धारा स्पंदों में उपस्थित रेडियो आवृत्ति वाहक तरंगों को उपयुक्त फिल्टर परिपथ के द्वारा अलग कर दिया जाता है। चित्र (13·14) में प्रदर्शित फिल्टर R—C फिल्टर है। श्रव्य आवृत्ति संकेत विभव प्रतिरोध R के बीच प्राप्त होता है जिसे प्रवर्धित कर लाउडस्पीकर पर आरोपित करके ध्वनि में बदला जा सकता है।



चित्र 13·14

13·7. रेडियो प्रेषित्र और रेडियो अभिग्राहित्र का ब्लाक चित्र (Block diagram of Radio transmitter and Receiver)

रेडियो प्रेषी स्टेशन (Radio transmitting station) से रेडियो संदेश

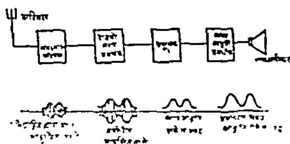


चित्र 13·15

संचारित करने की क्रिया को सरल रूप में ब्लाक चित्र (13·14) द्वारा प्रदर्शित किया गया है। संगीत या बातचीत के रूप में उत्पन्न ध्वनि को माइक्रोफोन के द्वारा

विद्युत तरंगों में बदल दिया जाता है। क्योंकि इस प्रकार प्राप्त विद्युत तरंगें या स्पन्द (Impulse) बहुत कम शक्ति की होती हैं। अतः श्रव्य आवृत्ति प्रवर्धक (Audio Frequency amplifier) द्वारा इनका प्रवर्धन किया जाता है। इस प्रकार प्राप्त तरंगें संकेत तरंगें कहलाती हैं। रेडियो आवृत्ति दोलित्र (R—f Oscillator) के द्वारा निश्चित आवृत्ति की रेडियो तरंगें उत्पन्न की जाती हैं। इन तरंगों को वाहक तरंगें कहते हैं। वाहक तरंगों और संकेत तरंगों को माडुलित्र परिपथ (Modulator Circuit) में आरोपित कर उसके द्वारा माडुलित तरंगें प्राप्त करते हैं। माडुलित वाहक तरंगें, R—f शक्ति प्रवर्धक (R—f Power Amplifier) द्वारा प्रवर्धित की जाती है और फिर प्रेषी एरियल द्वारा आकाश में संचारित कर दी जाती है। इस प्रकार संचारित विद्युत चुम्बकीय रेडियो तरंगें प्रकाश के वेग से गति करती हैं और नगण्य समय में सर्वत्र व्याप्त हो जाती हैं।

रेडियो प्रेषी स्टेशन द्वारा संचारित रेडियो तरंगें रेडियो अभिग्राहित्र (Radio receiver) के एरियल के पास पहुँचने पर विद्युत और चुम्बकीय क्षेत्र के कारण उसे प्रभावित करती हैं। अभिग्राहित्र को निश्चित आवृत्ति पर समस्वरित परिपथ (Tuned circuit or Selector) द्वारा समजित करने पर कुछ विद्युत ऊर्जा उसमें प्रवेश कर जाती है। क्योंकि इस प्रकार प्राप्त रेडियो तरंगों की शक्ति बहुत कम होती है अतः इन्हें R—f शक्ति प्रवर्धक द्वारा प्रवर्धित किया जाता है। इसके पश्चात् संसूचक द्वारा माडुलित रेडियो तरंगों का विमाडुलन (Demodulat-



चित्र 13·16

ion) कर उसमें से श्रव्य आवृत्ति संकेत तरंगों को अलग कर लिया जाता है। इस प्रकार प्राप्त श्रव्य आवृत्ति संकेत तरंगों या स्पन्दों (pulses) को श्रव्य आवृत्ति प्रवर्धक द्वारा पुनः प्रवर्धित कर लाउडस्पीकर पर आरोपित कर दिया जाता है। लाउडस्पीकर द्वारा इन विद्युत तरंगों या स्पन्दों को ध्वनि में परिवर्तित कर दिया जाता है। इस प्रकार रेडियो प्रेषित्र स्टेशन से भेजे गये संदेश रेडियो अभिग्राहित्र द्वारा प्राप्त कर पुनः ध्वनि में परिवर्तित कर दिये जाते हैं।

13·8. रेडियो तरंगों का संचरण (Propagation of Radiowaves)

रेडियो संचार व्यवस्था में प्रयुक्त रेडियो तरंगों की आवृत्ति लगभग 300 किलो-हर्ट्ज से 30 मेगा-हर्ट्ज तक होती है। 300 किलो हर्ट्ज से 3000 किलो-हर्ट्ज तक की आवृत्ति वाली रेडियो तरंगें मीडियम तरंगें (Medium wave) तथा 3000 किलो-हर्ट्ज से 30 मेगा-हर्ट्ज तक की आवृत्ति वाली रेडियो तरंगें (short

waves) कहलाती हैं। प्रत्येक रेडियो प्रेषित्र स्टेशन द्वारा प्रयुक्त रेडियो तरंगों की आवृत्ति निश्चित होती है। प्रेषी एरियल से प्रसारित रेडियो तरंगें 3×10^{10} सेमी प्रति सेकण्ड के वेग से सभी दिशाओं में गमन करती हैं। प्रेषी एरियल से ग्राही एरियल (Receiver antenna) तक ये तरंगें निम्न प्रकार संचारित की जा सकती हैं।

(1) भू-तरंगों के रूप में (Ground or surface waves)
(2) अंतरिक्ष तरंगों के रूप में (Space waves)
(3) आकाश तरंगों के रूप में (Sky waves)

भू-तरंगें पृथ्वी को छूती हुई संचरित होती हैं जिससे पृथ्वी द्वारा उनका अवशोषण हो जाता है। इसलिए कुछ दूरी तक संचरित होने में ही इनकी शक्ति बहुत कम हो जाती है। अतः रेडियो तरंगों को इस रूप में अधिक दूर तक नहीं भेजा जा सकता है। पृथ्वी की गोलाई के कारण अंतरिक्ष तरंगों द्वारा भी रेडियो तरंगों को अधिक दूरी तक भेजने में कठिनाई आती है।

रेडियो प्रेषी स्टेशन से प्रसारित रेडियो तरंगों के आकाश तरंगों के रूप में संचरण में आयनमंडल (Ionosphere) का विशेष योगदान है। सूर्य से आने वाली परा बैंगनी (ultraviolet) किरणों द्वारा ऊपरी वायुमण्डलीय कणों का आयनीकरण (Ionisation) हो जाता है। इससे बहुत अधिक मात्रा में स्वच्छन्द इलेक्ट्रॉन और आयन (Ions) का निर्माण होता है। आयन तथा इलेक्ट्रॉन पृथ्वी से भिन्न ऊँचाइयों पर कई तहें बनाते हैं। यह विभिन्न तहें आयनमंडल कहलाती हैं। इन तहों में प्रमुख E तथा F तहें हैं जो पृथ्वी तल से लगभग 150 किलोमीटर व 350 किलोमीटर की ऊँचाई पर हैं।

प्रेषी स्टेशन से आकाश में विशेष दिशा में भेजी जाने वाली आकाश तरंगें आयन मंडल द्वारा परिवर्तित होकर वापस पृथ्वी तल पर आ जाती है। आकाश तरंगों के रूप में रेडियो तरंगों को बहुत दूर तक भेजा जा सकता है। आयनमंडल द्वारा परावर्तित होकर वापस आने वाली रेडियो तरंगें रेडियो अभिग्राहित द्वारा ग्रहण कर ध्वनि तरंगों में परिवर्तित कर दी जाती है।

उदाहरण 13·1. एक ट्रायोड परिपथ के एनोड परिपथ में 15 किलो ओह्म का एनोड लोड प्रतिरोध लगाया गया है। यदि प्रवर्धक का निविष्ट (Input) 5 मिली वोल्ट का संकेत है तो निर्गत संकेत वोल्टता की गणना कीजिये। ट्रायोड का प्रवर्धक गुणक तथा प्लेट प्रतिरोध क्रमशः 28 और 6000 ओह्म हैं।

(रा०वि० 1973)

$$\text{वोल्टता प्रवर्धन} = \frac{e_o}{e_g}$$

$$= \frac{\mu R_L}{r_p + R_L}$$

$$\text{अतः} \quad \frac{e_o}{e_g} = \frac{\mu R_L}{r_p + R_L}$$

$\therefore$ e_o = निर्गत संकेत वोल्टता

$$= \frac{\mu R_L e_g}{r_p + R_L}$$

दिया हुआ $R_L = 15000$ ओह्म, $e_g = 5$ मिली वोल्ट $= 5 \times 10^{-3}$ वोल्ट

$\mu = 28$

और $r_p = 6000$ ओह्म

मान रखने पर

$$e_o = \frac{28 \times 15000 \times 5 \times 10^{-3}}{6000 + 15000}$$

या $$e_o = \frac{28 \times 15 \times 5}{21000}$$

या $$= 100 \times 10^{-3} \text{ वोल्ट}$$

$\therefore$ $e_o = 0{\cdot}1$ वोल्ट

अतः निर्गत संकेत 0·1 वोल्ट का है।

उदाहरण 13·2. निम्नलिखित आँकड़ों से वोल्टता प्रवर्धन तथा अधिकतम वोल्टता प्रवर्धन का मान ज्ञात कीजिये।

$\mu = 20$, $R_L = 45$ किलो ओह्म, $r_p = 9000$ ओह्म

वोल्टता प्रवर्धन $A = \frac{\mu R_L}{r_p + R_L}$

मान रखने पर

$$A = \frac{20 \times 45000}{9000 + 45000}$$

या $$= \frac{90000}{54000}$$

$\therefore$ $A = 16 6$

वोल्टता प्रवर्धन का अधिकतम मान

$A_{max} = \mu$

$\therefore$ $A_{max} = 20$

प्रश्न

1. अर्ध तरंग तथा सम्पूर्ण तरंग दिष्टकारी के भेद को समझाइये।
एक सम्पूर्ण तरंग डायोड दिष्टकारी की कार्य विधि समझाओ। फिल्टर परिपथ का क्या कार्य है?

2. ट्रायोड प्रवर्धक के सिद्धान्त को समझाइये।
वोल्टता प्रवर्धन से क्या अभिप्राय है? ट्रायोड प्रवर्धक के लिए वोल्टता प्रवर्ध
की गणना कीजिए।

3. दोलित्र के रूप में ट्रायोड वाल्व की क्रिया एवं व्यवहार समझाइये।

4. पुनः निविष्टता से आप क्या समझते हैं?
पुनः निविष्टता प्रवर्धक के सिद्धान्त को स्पष्ट रूप से समझाइये।

5. माडुलन से क्या अभिप्राय है?
माडुलन की आवश्यकता को समझाते हुए बताइये कि आवृत्ति माडुलन
आयाम माडुलन में क्या भेद हैं?

6. संसूचन क्या है?
डायोड वाल्व का वर्णन कीजिये तथा संसूचक के रूप में इसकी क्रियापर प्र
डालिए।

. विद्युत चुम्बकीय तरंगों द्वारा रेडियो प्रेषण तथा ग्रहण पर निबन्ध लिखिए

. निम्नलिखित के बारे में संक्षेप में लिखिये :—

(i) रेडियो तरंगों का संचरण
(ii) विद्युत चुम्बकीय तरंगें
(iii) डायोड संसूचक

). एक ट्रायोड वाल्व को वोल्टता प्रवर्धन 50 कि० ओह्म का लोड लगाने
30 तथा 85 कि० ओह्म का लोड लगाने पर 34 है। वाल्व के निय
ज्ञात करो।
[उत्तर : $\mu = 42$; $r_p = 20000$ ओह्म तथा $g_m = 2{\cdot}1 \times 10^{-3}$ अ

). एक डायोड का पूर्ण तरंग दिष्टकारी की भाँति कार्य समझाइये और
श्यक परिपथ चित्र बनाइये। (रा० वि० 1

1. आवश्यक परिपथ बनाकर ट्रायोड का प्रवर्धक उपयोग समझाइये।
गुणक μ तथा वोल्टता प्रवर्धन A_v की परिभाषा देकर सूत्र $A_v = \frac{\mu}{R ...}$
की स्थापना कीजिए जहाँ r_p प्लेट प्रतिरोध तथा R लोड प्रतिरोध है।
(रा० वि०

12. एक ट्रायोड के लिए प्लेट प्रतिरोध और अन्योन्य चालकता का मान
6 किलो ओह्म तथा 3×10^{-3} म्हो हैं। यदि इसके द्वारा बनाये गये
से किसी संकेत को 10 गुना प्रवर्धित करना हो तो प्लेट परिपथ में
लोड प्रतिरोध लगाना पड़ेगा। [उत्तर : 10000

13. निम्न आंकड़ों से वोल्टता प्रवर्धन तथा अधिकतम वोल्टता प्रवर्धन क
निकालिए :—